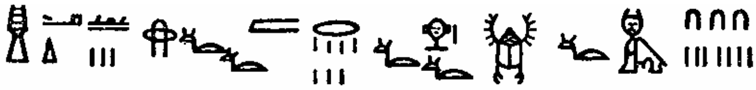
Dall’algebra retorica all’algebra simbolica passando attraverso l’algebra sincopata

La parola algebra deriva dal termine arabo al-giabr ed indica l’operazione del trasporto di un termine di un’equazione da un membro all’altro mediante il cambiamento del segno .
Il termine almucabala deriva dalla parola araba al-muqabalah ed esprime l’operazione di riduzione , in ognuno dei due membri di una stessa equazione , dei termini simili .
Il termine algoritmo deriva dalla parola al-Khuwarizmi , soprannome del matematico arabo Muhammad ibn Musà , ed indica un qualsiasi sistema di notazioni e convenzioni che ci consentono di eseguire determinate operazioni secondo certe regole . Con parole più semplici possiamo affermare che la parola algoritmo indica qualsiasi procedimento sistematico di calcolo . Nel secolo XVI con il termine algebra si intendeva sia la teoria delle equazioni sia il calcolo che ne deriva .
Poiché l’incognita veniva chiamata res o causa o cosa ed il suo quadrato census , dal Pacioli e da altri l’algebra fu anche detta arte o regola della cosa . Gli algebristi del Rinascimento la chiamarono ars magna (arte maggiore) .
Oggi col nome di algebra si suole comprendere lo studio delle funzioni razionali intere (polinomi) di una o più variabili o , sotto altra forma , lo studio delle equazioni algebriche . Nel Papiro di Rhind sono presenti problemi che si risolvono mediante equazioni di primo grado in una incognita . Infatti nel famoso Papiro di Rhind ,manuale di calcolo attribuito all’egiziano AHMES (figlio della luna) e composto tra il 2000 ed il 1700 a.C. , si trovano risolti problemi che si traducono in equazioni di primo grado ad una incognita . Fra i molteplici esempi presenti nel Papiro ne riporto uno riproducendolo sia con i simboli originali che con i simboli attuali :



$$x\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+1\right)=37$$

Equazioni di secondo grado del tipo $x^2+bx=c$, $x^2=bx+c$, $bx=x^2+c$ erano state risolte geometricamnte ai tempi di Pitagora ed i simboli in esse presenti rappresentavano segmenti .

Più estesi sviluppi ebbe l'algebra geometrica presso i geometri greci posteriori ad Euclide (Archimede , Apollonio , Pappo) e venne da essi usata anche per la risoluzione di problemi di terzo e quarto grado .

Soltanto all'inizio del secolo XIII Leonardo Fibonacci,il più grande matematico del Medioevo , diede un grande impulso allo studio dell'algebra aprendo la strada agli algebristi del Cinquecento .

Leonardo Fibonacci , detto Leonardo Pisano (1170-1240)

La sua opera più importante è il *Liber Abbaci* **(1202) nel quale espone l'aritmetica araba,le equazioni di primo e secondo grado . In tale opera tratta importanti questioni di analisi diofantea risolvendo in numeri interi le equaziopni di primo grado a due incognite . Altre sue opere importanti sono la** *Practica Geometriae* **, il Flos ed il** *Liber quadratorum* **. Dobbiamo a Fibonacci l'uso delle cifre arabe e del sistema di misurazione decimale .**

LeonardoFibonacci
Disegno del pittore M. Truscia

L'imponente trattato denominato Liber Abaci , scritto nel 1202 **ed ampliato nel** 1228 , presenta un quadro completo delle più importanti cognizioni sull'aritmetica e sull'algebra acquiste dagli Arabi e dai Bizantini ed è il frutto di un'elaborazione limpida ed originale riguardo ad ogni sorta di calcoli commerciali con numeri interi e fratti ,a progressioni aritmetiche e geometriche ,all'estrazione di radici quadrate e cubiche e alla risoluzione di problemi che dipendono da equazioni determinate e indeterminate di primo e di secondo grado,con una o più incognite .

Tra i molti libri che giovarono a mantenere e a divulgare l'interesse per lo studio dell'aritmetica e dell'algebra sono da ricordare per la Germania Giovanni Widmann , per l'Italia Luca Pacioli che con l'opera Summa riassumeva tutto il sapere del tempo in aritmetica , algebra e geometria . L'opera di Luca Pacioli contiene moltissimi problemi risolti con grande abilità e tratta con rara sensibilità scientifica la risoluzione di equazioni di primo e secondo grado ad una e due incognite . Né Leonardo Pisano , né Luca Pacioli , né altri ritenevano possibile la risoluzione delle equazioni di grado superiore al secondo . Solo nel Cinquecento,per opera di eminenti matematici Italiani , l'algebra progredì divenendo una teoria completa . Presso i Greci , gli Arabi e i matematici del Medioevo l'esposizione si mantenne sempre verbale ed anche le formule algebriche si enunciarono con parole oppure per mezzo di esempi numerici . Questo carattere dell'esposizione andò a poco a poco attenuandosi soltanto nella seconda metà del Cinquecento , con l'introduzione di notazioni convenzionali . Per l'addizione e la sottrazione Leonardo Fibonacci usava le parole et e minus , Pacioli adoperava i segni $\tilde{p}$ ed $\tilde{m}$ abbreviazioni delle parole plus e minus . In Luca Pacioli le costanti si dicono numeri , l'incognita si chiama cosa e le sue successive potenze prendono i nomi di censo , cubo , censo censo ,primo relato , censo del cubo , secundo relato e così di seguito . Il primo a risolvere l'equazione di terzo grado $x^3 + px = q$ [1] fu Scipione Dal Ferro nel 1515 elaborando una regola estensibile anche alle due seguenti equazioni di terzo grado :

$$x^3 = px + q \quad [2] \quad x^3 + q = px \quad [3] .$$

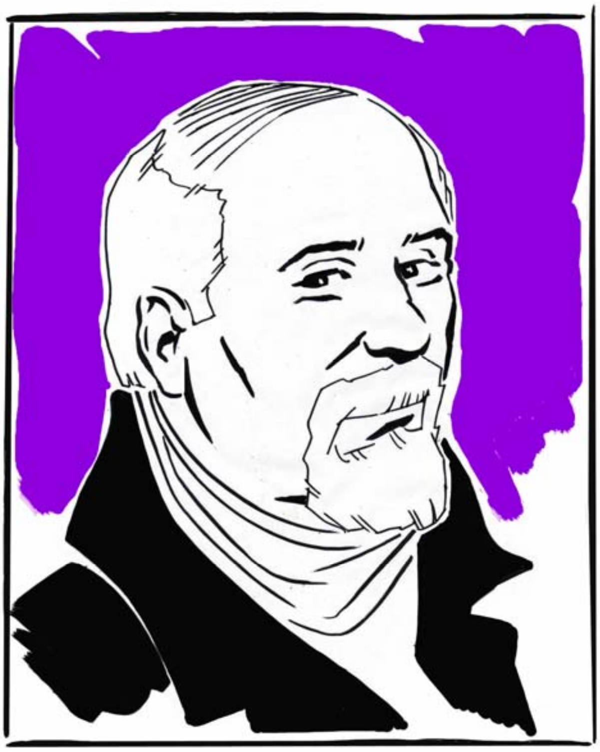
La risoluzione del matematico Dal Ferro fu in seguito ritrovata da Nicolò Tartaglia e comunicata , senza risoluzione ,a Gerolamo Cardano . Questi la rielaborò e la pubblicò corredandola con la dimostrazione ed attribuendo la progenitura della scoperta a Dal Ferro ed a Tartaglia . La soluzione delle equazioni di quarto grado prive del termine contenente il cubo dell'incognita ,si deve a Lodovico Ferrari , discepolo del Cardano ed esposta nel libro del Cardano dal titolo "Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus " .

Con l ' Algebra del Bombelli si ha una notevole divulgazione della teoria delle equazioni di terzo e quarto grado e queste equazioni vengono risolte in tutti i casi possibili . Nella risoluzione dell'equazione di terzo grado interveniva il termine $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$ che poteva dare luogo all'estrazione della radice quadrata di un numero negativo anche in presenza di tre radici sicuramente reali . Si era in presenza del casus irriducibilis dell'equazione di terzo grado che generò diverse discussioni .

Spetta al Bombelli il merito di avere per primo introdotto nell'algebra il calcolo dei numeri immaginari , e di avere riconosciuto , per mezzo di lui , la generale validità della formula di Dal Ferro e Tartaglia e l'esistenza di radici reali nel caso irriducibile .

Raffaele Bombelli (1562-1573)

Matematico italiano del XVI secolo . Introdusse per primo i numeri immaginari , che consentivano di superare il caso irriducibile delle equazioni di terzo grado con tre radici reali . La sua opera più importante è l ' **Algebra** , composta verso il 1560 e pubblicata nel 1572 .



Raffaele Bombelli

disegno del pittore M.Truscia

L'interesse per gli studi dell'algebra , suscitato dalle scoperte dei matematici italiani , contribuì al perfezionamento del relativo simbolismo .

Un passo essenziale alla fondazione del calcolo algebrico letterale fu compiuto da Francesco Viète ($1540-1603$) . **Nelle sue opere utilizzò sistematicamente l'uso delle lettere dell'alfabeto latino sia per indicare le incognite che i coefficienti delle incognite .**

Si deve a Cartesio il merito di avere fuso in maniera mirabile l'algebra e la geometria fino ad allora considerate nettamente distinte . La supremazia dell'algebra in tutti i rami della matematica si consolidò in maniera definitiva soltanto verso la fine del Settecento per opera del matematico Leonardo Eulero . Il simbolismo del Cartesio che indicava le incognite con le ultime lettere dell'alfabeto latino e le quantità note con le prime lettere , si affermò per la sua semplicità ed efficacia. Cartesio è il primo matematico che introduce lo zero come secondo membro di un'equazione ridotta a forma canonica . L'adozione sistematica del calcolo letterale , permettendo una grande economia di pensiero e porgendo all'algebra un linguaggio necessario per lo studio generale dei problemi , diede un forte impulso allo sviluppo di tutta la matematica e, grazie all'avvenuta fusione dell'algebra con la geometria , preparò la strada al calcolo infinitesimale . Il successo riportato con la risoluzione algebrica delle equazioni di terzo e quarto grado aveva ben presto fatto sorgere la speranza di potere conseguire un analogo risultato per le equazioni di grado superiore . Tuttavia i diversi tentativi fallirono tutti e soltanto agli inizi dell'Ottocento si dimostrò che era impossibile risolvere per radicali equazioni di grado superiore al quarto . L'impossibilità della risoluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto , esplicitamente affermata da Carlo Federico Gauss nella sua Dissertazione del 1799 fu dimostrata nel 1799, da Paolo Ruffini nell'opera "Teoria generale delle equazioni" . Una dimostrazione in forma più elegante fu data nel 1826 dal norvegese Niels Enrico Abel .

Lo sviluppo storico dell'algebra passa attraverso tre fasi :

- l'algebra retorica ,così denominata in quanto i problemi e le loro soluzioni sono esposti mediante parole o frasi della lingua corrente , senza l'impiego di alcun simbolismo .

Nell'algebra retorica non esistono segni particolari per denotare le operazioni algebriche e non esistono simboli letterali per indicare le incognite e le costanti . E' l'algebra dell'età classica .

- l'algebra sincopata , nella quale compaiono delle abbreviazioni per indicare incognite . Nel Cinquecento fu la notazione maggiormente in uso e rappresentò un notevole progresso rispetto alla fase retorica . **Verso la seconda metà del Cinquecento ebbe inizio l'uso di particolari segni per denotare le operazioni e cominciarono a fare la loro comparsa le lettere per indicare le incognite .** Questo momento costituisce la seconda fase dell'algebra sincopata che prelude alla terza rappresentata dalla notazione simbolica ,in uso dalla seconda metà del Seicento .
- l'algebra simbolica si serve di lettere per rappresentare quantità note o incognite e di segni speciali per indicare le operazioni .

Un contributo importante nella trasformazione dell'algebra sincopata in algebra simbolica fu dato nel sedicesimo secolo dal matematico francese Francesco Viète ($1540-1603$). **L'equazione** $3x^2 - 5x + 6 = 0$ **dell'attuale algebra simbolica , col simbolismo adoperato da Luca Pacioli** (1494) **assume la forma :**

3 census p. 6 de 5 rebus ac 0

e con le modifiche di un secolo dopo (1591 **) dovute al Viète diventa :**

3 in A quad – 5 in A plano + 6 aequatur 0

L'algebra alla fine del Quattrocento e durante il Cinquecento ebbe uno sviluppo notevole grazie a studiosi italiani quali Scipione Dal ferro , Tartaglia , Cardano , Lodovico Ferrari e Raffaele Bombelli .

Analizziamo brevemente il percorso che ha condotto alla risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado . Nel 1225 **Leonardo Pisano volendo risolvere un problema che si traduceva nell'equazione di terzo grado** $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ **dimostrò che la suddetta equazione non poteva ammettere soluzioni esprimibili mediante radicali quadratici .**

Fino alla fine del Quattrocento i matematici erano convinti che le equazioni di terzo e quarto grado potevano ammettere soluzioni esprimibili mediante radicali quadratici , eventualmente anche doppi . Il matematico italiano Scipione Dal Ferro ebbe per primo la brillante idea che una equazione di terzo grado potesse avere delle soluzioni esprimibili mediante radicali cubici del tipo $x = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}$

Per le equazioni di terzo grado del tipo $x^3 = px + q$ **trovò che le soluzioni si potessero ricavare dalla seguente formula :**

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Le cose andavano bene se $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \geq 0$ **ma creavano notevoli difficoltà se** $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$ **, perché in tal caso l'equazione** $x^3 = px + q$ **poteva avere radici reali che dovevano essere ricavate mediante l'estrazione della radice quadrata di un numero negativo .**

Infatti esistono equazioni di terzo grado del tipo $x^3 = px + q$ **che , pur avendo** $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$ **, presentano tre radici reali . Siamo in presenza del caso irriducibile che creò notevoli difficoltà ai matematici del Cinquecento .**

Infatti , quando le tre radici dell'equazione di terzo grado $x^3 = px + q$ **erano reali e diverse da zero , la formula di Dal Ferro-Tartaglia-Cardano presentava l'inconveniente del caso irriducibile che conduceva all'estrazione di radici quadrate di numeri negativi .**

L'equazione di terzo grado $x^3 = 15x + 4$ **ammette tre radici reali** $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ **,** $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ **,** $x_3 = 4$ **che sono in contrasto con la formula** $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ **in quanto non esiste alcun numero reale il cui quadrato è un numero negativo .**

Il caso irriducibile per una equazione di terzo grado si presenta tutte le volte che una simile equazione ammette tre radici reali nonostante il suo discriminante risulti negativo .

Risolve brillantemente l'apparente contraddizione il matematico Raffaele Bombelli che amplia l'insieme numerico dei numeri reali introducendo prima l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$ **e poi il numero complesso** $a + b \cdot i$ **.**

Si entra nel mondo dei numeri complessi dei quali i numeri reali sono un caso particolare .

L'introduzione dei numeri complessi , che consentiva di superare il caso irriducibile per le equazioni di terzo grado , fu utilissimo per gli sviluppi successivi dell'algebra .

Utilizzando il simbolismo attuale vediamo come Bombelli riuscì a ricavare le radici reali dell'equazione proposta .

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = \sqrt[3]{(2+i)^3} + \sqrt[3]{(2-i)^3} = 2+i+2-i=4$$

Introducendo i numeri complessi Bombelli aveva dimostrato che la formula risolutiva per le equazioni di terzo grado era valida ed aveva carattere generale .

Tuttavia i numeri complessi che non avevano convinto i suoi contemporanei si affermarono definitivamente con Gaspar Wessel , Jean Robert Argand , e col << princeps mathematicorum >>
Carl Friedrich Gauss .
Il grande filosofo e matematico Leibniz ritenne il Bombelli << *egregium certe artis analyticae magistrum* >>
Le vicende che portarono alla scoperta della formula risolvente le equazioni di terzo grado presentano aspetti curiosi .
Nel 1535 **il maestro d'abaco Antonio Maria Fiore che era a conoscenza della formula trovata Da Scipione Dal Ferro sfidò Tartaglia a risolvere un problema che si traduceva nella risoluzione dell'equazione di terzo grado** $x^3 + px = q$ **. Tartaglia , genio matematico di prima grandezza , rispose da par suo risolvendo il problema proposto utilizzando una formula simile a quella trovata da Scipione Dal Ferro dondone una nuova e più elegante dimostrazione .**
Tartaglia , nel 1539 **, comunicò i suoi risultati a Gerolamo Cardano il quale si impegnò , sotto giuramento , a non divulgare i risultati ottenuti .**

Niccolò Fontana , detto Tartaglia

Famoso matematico italiano del 500 . Trovò la soluzione algebrica dell'equazione cubica . A lui si deve la prima traduzione italiana degli *Elementi* **di Euclide .**
Opere pubblicate da Tartaglia :

- **la nova scientia (1537)**
- la Travagliata inventione (1551)
- Il general trattato di numeri et misure (1556-1560)

Niccolò Fontana,detto Tartaglia (1499-1557)
Disegno del pittore M. Truscia

Questi furono comunicati all'illustre medico e matematico in forma retorica mediante l'invio della seguente poesia che passo a descrivere e tradurre in forma simbolica .

Quando che il cubo con le cose appresso $x^3 + px = q$
se agguaglia a qualche numero discreto
trovan dui altri differenti in esso . $u - \mathrm{v} = q$
Da poi terrai questo per consueto
che il loro produtto sempre sia eguale
al terzo cubo delle cose neto . $u \cdot \mathrm{v} = \left(\frac{\mathrm{p}}{3}\right)^3$
El residuo poi suo generale $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{\mathrm{v}} = x$
dalli loro lati cubi sottratti
varrà la tua cosa principale .

In maniera più espressiva possiamo tradurre la poesia in prosa matematica nella seguente maniera . Se devi risolvere l'equazione $x^3 + px = q$ **, trova due numeri u e v per i quali risulta :**

$$u - \mathrm{v} = q \qquad \textbf{e} \qquad u \cdot \mathrm{v} = \left(\frac{\mathrm{p}}{3}\right)^3$$

Allora le radici dell'equazione $x^3 + px = q$ **ci vengono fornite dalla seguente formula :** $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{\mathrm{v}}$ **. In maniera ancora più sintetica possiamo dire che** $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ **è la formula che ci consente di risolvere l'equazione** $x^3 + px = q$ **.**

Nel Cinquecento i coefficienti dell'incognita ed il termine noto erano espressi da numeri positivi sicché si avevano tante equazioni di terzo grado quante erano le combinazioni dei loro segni .

Per le equazioni di terzo grado prive del termine quadratico abbiamo i tre seguenti casi : $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$

Nel 1542 **Cardano venne a conoscenza che la formula del Tartaglia era stata dimostrata in precedenza dal matematico Scipione Dal ferro e quindi , ritenendosi sciolto dal vincolo del giuramento , la pubblicò con la relativa dimostrazione nel suo capolavoro , l'Ars Magna, attribuendo il merito della scoperta a Dal Ferro e Tartaglia .**

In questa mirabile opera il Cardano include anche le risoluzioni complete delle equazioni di terzo e quarto grado che attribuisce al suo geniale allievo Lodovico Ferrari .

Gerolamo Cardano

Matematico,astrologo,filosofo e medico del 500 . Fu una tipica figura di scienziato del Rinascimento , versato in astrologia,magia naturale,matematica,diritto,medicina
Contribuì assieme a Tartaglia alla scoperta della soluzione dele equazioni cubiche . La sua opera più importante è l ' Ars Magna , che contiene la formula di risoluzione delle equazioni di terzo grado .
Inventò il giunto cardanico .

Gerolamo Cardano (1501-1576)
Disegno del pittore M. Truscia

Infatti la formula di Dal Ferro-Tartaglia non poteva essere applicata alle equazioni cubiche contenenti il termine di secondo grado , cioè ad equazioni del tipo $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ **. Occorreva trasformare la suddetta equazione in un'altra priva del termine quadratico . Ci riuscirono brillantemente il Cardano ed il suo allievo Ferrari .**
Tartaglia andò su tutte le furie ed accusò di plagio e malafede il Cardano , in difesa del quale insorse il suo brillante discepolo Lodovico Ferrari che il 10 **febbraio** 1547 **lanciò da Milano un primo "Cartello di matematica disfida" a Tartaglia seguito da altri 5 cartelli .**
Tartaglia rispose con altrettanti "controcartelli di matematica disfida"
Questi cartelli , che contenevano 62 **quastioni (** 31 **per parte) , abbracciavano tutti i rami del sapere scientifico dell'epoca con particolare riferimento a questioni di algebra e geometria .**
La sfida , avvincente e piena di imprevisti , si concluse con la vittoria del Ferrari e con la perdita , da parte del povero Tartaglia , della cattedra di Brescia .

Gerolamo Cardano giura sulla Bibbia che non avrebbe mai rivelato la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado scoperta da Niccolò Tartaglia . Non mantenne il suo impegno in quanto convinto che il primo risolutore fosse il matematico Scipione dal Ferro .

Niccolò Tartaglia e Gerolamo cardano

disegno del pittore M. Truscia

Dopo la scoperta della formula risolutiva per le equazioni di terzo grado il matematico bolognese Lodovico Ferrari si interessò delle equazioni di quarto grado sicuro di essere in grado di trovare un procedimento che gli consentisse la risoluzione di una qualsiasi equazione di quarto grado . I suoi sforzi furono premiati ed i brillanti risultati ottenuti gli assicurarono fama perenne ed universale . Di lui il Cardano disse che in matematica , per ingegno erudizione ed originalità , non era secondo a nessuno .Tra le altre cose il Nostro espose le regole da utilizzare per prevedere il segno delle radici di una qualsiasi equazione di quarto grado senza doverla risolvere .

Prima di lui le radici negative delle equazioni erano escluse perché ritenute false o finte .

Nell'Ars Magna vengono fornite le regole che governano l'abbassamento del grado di un'equazione della quale conosciamo una soluzione .

In essa sono presenti anche le trasformazioni a radici opposte , a radici aumentate ed a radici inverse . Sono esposte e dimostrate le relazioni fondamentali che intercorrono tra i coefficienti e le radici dell'equazioni algebriche .