Da << il tutto è maggiore di una sua qualsiasi parte >> di Euclide alla dimostrazione che , in talune situazioni , il tutto può essere uguale ad una sua parte .

I paradossi del tutto e della parte

Una parte non può essere uguale al tutto aveva sentenziato Euclide nei suoi Elementi . Questa affermazione , che agli uomini dotati di buon senso sembra assolutamente vera , è contraddetta da quelli che possiamo chiamare i << paradossi del tutto e della parte >> .

Paradosso degli interi e dei quadrati

Nel 1622 Bonaventura Cavalieri aveva chiesto al sua maestro Galileo Galilei qualche delucidazione sul confronto tra due infiniti . Galileo rispose che aveva qualche difficoltà a rispondere ad una questione così delicata . Nel 1638 , nell'opera Nuove scienze , Galileo dà una risposta indiretta, affermando che, nel confrontare due infiniti, si incontrano << difficoltà che derivano dal discorrere che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agli infiniti , dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate ; il che penso che sia inconveniente , perché stimo che questi attributi di maggioranza , minorità ed ugualità non convenghino agli infiniti , dei quali non si può dire , uno essere maggiore o minore o uguale all'altro >> . Con paradosso dell'infinito in campo aritmetico , che tratteremo dettagliatamente in seguito , Galileo fa vedere che una infinità dovrebbe essere contemporaneamente maggiore ed uguale ad un'altra infinità . Tutto questo lo conduce ad affermare che il confronto tra gli infiniti non è possibile .

Illustriamo adesso il paradosso del tutto e della parte in campo aritmetico, trascrivendo quanto lo stesso Galileo espone nell'opera le Nuove scoenze . Si tratta di un'opera scritta in forma di dialogo dove Simplicio rappresenta l'uomo aristotelico , Sagredo il gentiluomo dilettante di scienze e Salviati lo scienziato nuovo , cioè lo stesso Galileo .

Paradosso degli interi e dei quadrati

L'aristotelico Simplicio sa che i << numeri quadrati >> sono quelli che nascono dai singoli numeri << in se medesimi moltiplicati >> .

Salviati **: Benissimo , e sapete ancora , che sì come i prodotti si dimandano quadrati , i producenti , cioè quelli che si moltiplicano , si chiamano lati o radici ; gli altri [numeri] poi ,**

che non nascono da numeri moltiplicati in se stessi , non sono altrimenti quadrati . Onde se io dirò ,i numeri tutti , comprendendo i quadrati e i non quadrati , essere più che i quadrati soli , dirò cosa vera : non è così ?

Simplicio **: Non si può dire altrimenti .**

Salviati **: Interrogando io di poi , quanti siano i numeri quadrati , si può con verità rispondere , loro essere tanti quante sono le proprie radici , avvenga che ogni quadrato ha la sua radice , ogni radice il suo quadrato , né quadrato alcuno ha più di una sola radice , né radice alcuna più di un quadrato .**

Simplicio: **Così sta .**

Salviati **:Ma se io domanderò , quante siano le radici , non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri , poiché non vi è numero alcuno che non radice di qualche quadrato ; e stante questo , converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri , perché tanti sono quante le loro radici , e radici sono tutti i numeri ; e pur da principio dicemmo , tutti i numeri essere più che i propri quadrati , essendo la maggior parte non quadrati .**

Con linguaggio moderno possiamo affermare quanto segue :

- **I quadrati sono soltanto una parte dei numeri naturali .**
- **I numeri naturali sono tanti quanti sono i loro quadrati in quanto tra questi insiemi di numeri è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca , come si evidenzia dalla seguente tabella :**

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & \cdots & n^2 \end{array}$$

Questa tabella ci dice che ad ogni numero (naturale) della prima riga corrisponde un solo numero (il suo quadrato) della terza ed inversamente a ciascun numero (che è il quadrato di un numero naturale) corrisponde un solo numero (naturale) della prima riga .

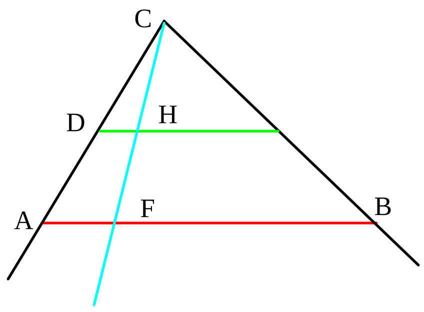
Appare evidente che i quadrati , che sono solo una parte dei numeri naturali sono tanti quanti i numeri naturali . L'affermazione di Euclide che il tutto non può essere uguale ad una sua parte è contraddetta da questo paradosso .

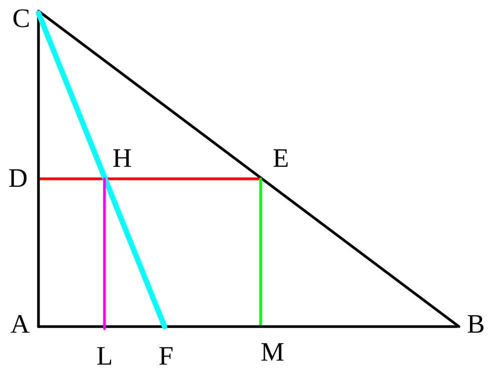
Salviati, **cioè Galileo , a questa apparente contraddizione dà la seguente interpretazione .**

<< Io non veggo che ad altra decisione si possa venire , che a dire , infiniti essere tutti i numeri , infiniti i quadrati , infinite le loro radici , né la moltitudine dei quadrati essere minore di quella di tutti i numeri , né questa maggiore di quella , ed in ultima conclusione , gli attributi di uguale , maggiore e minore non aver luogo negli infiniti , ma solo nelle quantità terminate . >> . Quindi per Galileo gli infiniti non possono essere confrontati tra di loro .

Un altro paradosso dell'infinito , il paradosso geometrico

I punti di un segmento sono tanti quanti sono i punti della sua metà .





Sia dato il segmento AB . Dal punto C tracciamo le rette CA e CB congiungenti C con gli estremi del segmento AB . Prendiamo il punto medio D di AC e per esso tracciamo la parallela DE ad AB , fino a tagliare nel punto E la retta CB . Otteniamo il segmento DE che è la metà del segmento AB .

Ci domandiamo ora : quanti punti contiene il segmento AB ? Secondo la concezione degli enti geometrici idealizzati dobbiamo rispondere : AB contiene infiniti punti in quanto sappiamo che tra due punti qualsiasi possiamo inserire almeno un altro punto . E se ci domandiamo quanti punti contiene il segmento DE dobbiamo rispondere che ne contiene infiniti .

Siccome AB è doppio di DE verrebbe di pensare che gli infiniti punti di AB debbano essere il doppio degli infiniti punti di DE . Il senso comune ci indurrebbe a stabilire un confronto tra i due infiniti con netto vantaggio dell'infinità dei punti di AB .

Ma ora possiamo mettere in evidenza un fatto piuttosto sconcertante : i punti del segmento AB sono tanti quanti sono i punti del segmento DE .

Per dimostrarlo , consideriamo un generico punto F di AB e congiungiamolo con C : la retta FC taglia il segmento DE in un punto H . Possiamo dire che al punto F di AB corrisponde il punto H di DE . E , poiché possiamo ripetere la costruzione per tutti i punti del segmento AB diremo che possiamo stabilire una corrispondenza tra tutti i punti di AB ed i punti di DE : più precisamente, ad ogni punto di AB corrisponderà un solo punto di DE .

Si osserva pure che ad ogni punto di DE corrisponde un solo punto di AB . Abbiamo stabilito una corrispondenza biunivoca tra i punti del segmento AB ed i punti del segmento DE .

Quindi i punti del segmento AB sono tanti quanti sono i punti del segmento DE .

Ecco uno dei paradossi dell'infinito .

Lo rendiamo ancora più evidente se , anziché il segmento DE ,consideriamo il segmento ad esso uguale AM (ottenuto abbassando da E la perpendicolare EM su AB) . I punti di AB ,essendo in numero uguale a quelli di DE , dovrebbero essere in numero uguale a quelli di AM . Infatti i punti di AB possono porsi in corrispondenza biunivoca con quelli di AM , mentre essi costituiscono solo una parte (la metà) dei punti di AB . Cioè per gli insiemi infiniti non sembra valido il principio ben noto : il tutto è maggiore di una sua parte , dal momento che è possibile che un insieme infinito venga posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte .

Chi risolve in maniera completa e definitiva il concetto di infinito è Cantor . Questi introduce il concetto primitivo di insieme descrivendolo con le seguenti

parole : << Per insieme intendiamo una collezione di determinati oggetti della nostra intuizione o del nostro pensiero ben distinti e riuniti in un tutto : tali oggetti sono detti gli elementi dell'insieme >>

Definizione : << quando due insiemi possono porsi in corrispondenza biunivoca si dice che essi hanno la stessa potenza >> .

Poiché insiemi finiti aventi lo stesso numero di elementi hanno la stessa potenza e , inversamente, insiemi finiti aventi la stessa potenza hanno lo stesso numero di elementi , conviene rappresentare la potenza di un insieme finito dal numero dei suoi elementi , cioè assumiamo :

potenza di un insieme finito = numero dei suoi elementi

Cantor identifica anche per gli insiemi infiniti il numero degli elementi con la potenza : cioè hanno lo stesso numero di elementi due insiemi infiniti aventi la stessa potenza , cioè due insiemi i cui elementi possono porsi in corrispondenza biunivoca fra loro .

Consideriamo l'insieme N , cioè l'insieme di tutti gli infiniti numeri naturali :

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6.\cdots\}$$

Chiameremo potenza del numerabile la potenza dell'insieme N . Ciò in relazione al fatto che chiameremo insieme numerabile l 'insieme N stesso e qualsiasi altro insieme che possa porsi con N in corrispondenza biunivoca . L'importanza della considerazione della potenza del numerabile sta nel fatto che essa è la più piccola potenza che un insieme infinito pussa avere .

Esistono insiemi infiniti che hanno potenza maggiore del numerabile , ma non esistono insiemi infiniti aventi potenza minore .

Definizione : Un insieme finito A ha potenza maggiore di un insieme finito B quando è possibile porre B in corrispondenza biunivoca con una parte propria di A , ma non è possibile porre A in corrispondenza biunivoca con una parte propria di B .

Vediamo adesso in che cosa consiste l'originalità del pensiero di Cantor :
egli estende la definizione elementare di uguaglianza del numero cardinale di due insiemi anche al caso di insiemi infiniti .
Cantor ha il coraggio , che era mancato a Galileo Galilei , di ammettere che << una parte può essere uguale al tutto >> ; ma cerchiamo di chiarire il significato da dare alla parola << uguale >> . Uguale in senso aristotelico : la parte non può essere uguale (identica) al tutto che la contiene , in quanto il tutto ha sempre qualche elemento che la parte non ha ;   Uguale nel senso di Cantor : la parte può essere uguale al tutto per numero .
Tanti sono i numeri quanti sono i loro quadrati , che sono << meno >> dei numeri , perché ci sono dei numeri che non sono quadrati .
Se per concetti diversi non usiamo più la stessa parola uguale , ma usiamo rispettivamente i termini identico ed equipotente , allora la condraddizione si elimina . Un fatto incredibile diventa un fatto normale .
Nel caso di un insieme infinito , può accadere che l'intero insieme ed una sua parte , certamente non identici , siano equipotenti , cioè esprimano la stessa numerosità .
Definizione :   Un insieme X si chiama infinito se è equipotente con un suo sottoinsieme , cioè con una sua parte ; in caso contrario l'insieme sarà detto finito .
Cantor scopre anche che . a) i punti di un cubo sono tanti quanti i punti di un suo lato b) i punti di un quadrato sono tanti quanti i punti di un suo lato .

Confronto fra insiemi infiniti

L'insieme di tutti i numeri naturali è solo l'infinito attuale più piccolo .

Sono insiemi numerabili : a) l'insieme Z degli interi relativi b) l'insieme Q dei numeri razionali c) l'insieme U , unione di insiemi numerabili .

Teorema : Qualunque sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è numerabile .

Teorema

Non esiste alcun insieme infinito avente potenza inferiore al numerabile : quella del numerabile è la minima potenza degli insiemi infiniti .

Cantor prosegue il suo percorso sull'infinito scoprendo che non tutti gli insiemi infiniti sono numerabili . Siamo nel dicembre del 1873 ; nasce il concetto di infinito attuale trasfinito , sempre accrescibile e non assoluto .

Non sono insiemi numerabili l'insieme formato da tutti i punti di un segemento , l'insieme R dei numeri reali .

Definizione

Chiamiamo potenza del continuo , quella dell'insieme di tutti i punti della retta e quindi anche dell'insieme R di tutti i numeri reali .

Incontriamo le prime due potenze per insiemi infiniti :

1) la potenza del numerabile , che è la minima possibile (ad esempio la potenza dell'insieme N)

2) la potenza del continuo , che è maggiore di quella del numerabile (ad esempio la potenza dell'insieme R) .

Postulato del continuo

Non esistono insiemi infiniti aventi potenza intermedia tra quella del numerabile e quella del continuo .

Teorema

L'insieme delle parti di un insieme numerabile ha la potenza del continuo (che è maggiore di quella del numerabile)

Teorema

L'insieme P delle parti di un insieme qualunque A ha potenza maggiore di A

Teorema

Esistono insiemi infiniti aventi potenza superiore alla potenza del continuo .

Quando consideriamo insiemi infiniti , si ha sempre un aumento della potenza nel passare da un insieme infinito all'insieme delle sue parti .

Quindi , partendo da un insieme numerabile N (avente potenza del numerabile) si passa all'insieme delle sue parti P che ha la potenza del continuo , e l'insieme P' **delle parti di P ha potenza maggiore del continuo , l'insieme** P'' **delle parti di** P' **ha potenza maggiore di** P' **, e così di seguito .**

Le successive potenze degli insiemi N , P , P' **,** P'' **…. si presentano come le successive gigantesche , infinitamente grandi unità di una nuova serie numerica infinita . Sono nati i numeri trasfiniti di Cantor che ha elaborato in maniera impeccabile una sua aritmetica .**

Paradosso significa << contrario alla comune opinione >> , mentre antinomia significa contraddizione .

Bibliografia

1) Frajese . introduzione elementare alla matematica moderna pagina 75

2) Lucio Lombardo radice   l’Infinito

3) Quaderno grande : storia dell’anaòisi matematica