

I sofismi di Zenone

I argomento: la dicotomia

Con questo sofisma **Zenone** vuole dimostrare che il movimento non esiste. Secondo **Zenone** si pretende, in contrapposizione a quanto affermava Parmenide, che un corpo, muovendo da un punto di partenza, possa giungere ad un termine stabilito. Questo non è possibile in quanto tale corpo, prima di raggiungere il termine stabilito, dovrebbe percorrere la metà della strada stabilita, e prima ancora, la metà della metà e, poi, la metà della metà della metà, e così di seguito all'infinito. Con tale suddivisione non si perviene mai allo zero. Quindi il movimento non esiste.

II argomento: Achille e la tartaruga

Il secondo argomento consiste nel fatto che il più lento non sarà mai sorpassato nella sua corsa dal più veloce, perché l'inseguitore deve sempre prima arrivare al punto dal quale l'inseguito si è appena mosso, cosicché il più lento deve sempre trovarsi in poco più avanti dell'altro.

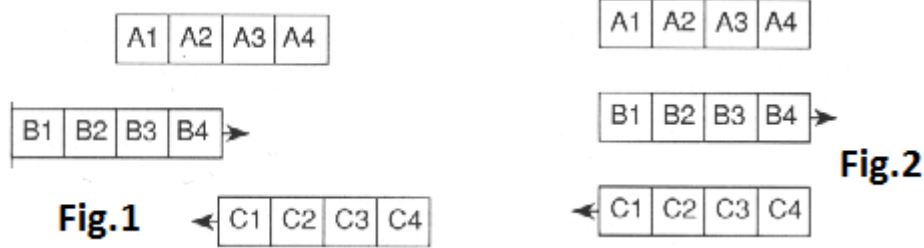
III argomento: la freccia. La freccia che si muove è ferma.

Col terzo argomento **Zenone** dimostra che una freccia scoccata da un arco, che qualsiasi persona di buon senso crede di essere in movimento, in realtà è ferma. Questo gli consente di affermare che il moto non esiste.

Una freccia lanciata è in ogni momento nello stato di riposo o nello stato di non-riposo, cioè in **movimento**; se l'istante è indivisibile, la freccia non si può muovere, altrimenti l'istante potrebbe immediatamente dividersi. Ora il tempo è fatto di istanti; siccome la freccia non può muoversi in nessun istante, non può muoversi mai. Essa resta sempre in riposo.

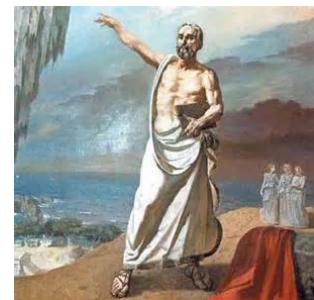
IV argomento: lo stadio

Col quarto argomento **Zenone** dimostra che uno stesso corpo percorre nello stesso tempo e con la stessa velocità spazi diversi. Questo gli consente di affermare che il moto non esiste. Il quarto argomento, detto anche delle **masse nello stadio**, è contro il movimento. Si abbiano tre aste uguali ciascuna delle quali è suddivisa in quattro tacche uguali.

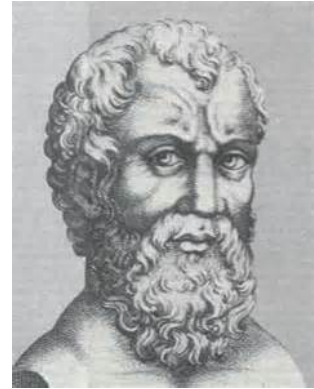


L'asta **A** ha le 4 tacche indicate con A1, A2, A3, A4, **B** ha le 4 tacche indicate con B1, B2, B3, B4, **C** ha le 4 tacche indicate con C1, C2, C3, C4. L'asta **A** è ferma, l'asta **B** si muove verso destra, l'asta **C** si muove verso sinistra con la stessa velocità dell'asta **B**. La posizione **iniziale** (**finale**) è quella indicata nella figura 1 (figura 2). Per passare dalla figura 1 alla figura 2, le aste **B** e **C** impiegano lo stesso tempo t . L'asta **B**, rispetto all'asta ferma **A**, si è spostata di 2 tacche mentre, rispetto all'asta mobile **C**, si è spostata di 4 tacche. Poiché le tacche sono tutte uguali, bisogna ammettere che l'asta **B** ha percorso nello stesso tempo t due spazi uno doppio dell'altro. Con parole diverse possiamo dire che nello stesso tempo t l'asta **B** rispetto all'asta **A** ha percorso due tacche, rispetto all'asta **C** ha percorso 4 tacche. La cella **B** rispetto all'asta ferma **A** si è spostata di due celle e rispetto all'asta mobile **C** si è spostata di 4 celle.

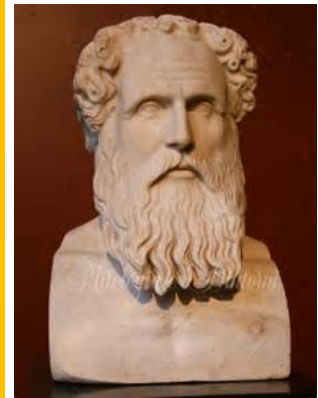
Il quarto sofisma di **Zenone** afferma che in uno stadio un punto mobile va ad una certa velocità e simultaneamente al doppio di essa, a seconda che sia riferito ad un punto fisso o ad un punto che si muove in verso opposto, generando in tal modo l'assurdo logico che la metà del tempo è uguale al suo doppio.



I celebri sofismi di **Zenone** a difesa della filosofia di Parmenide mirano a provare che, se la negazione del movimento e della molteplicità può a prima vista apparire assurda, l'ammissione di essa conduce ad assurdità ancora più gravi, nascoste, ma non risolta, dal linguaggio ordinario. Il perno di tali argomenti consiste nella dimostrazione che, sia nella nozione di movimento, sia in quella di pluralità, si annida il delicato concetto di infinito. Questi argomenti suscitarono presso i greci una tale diffidenza nei confronti dell'infinito, da persuaderli a compiere qualunque sforzo pur di escludere tale concetto da ogni seria costruzione scientifica.



Il metodo di cui **Zenone** si serve è, come notò Aristotele, quello della **dialettica**: la quale consiste nell'ammettere come vera l'affermazione dell'avversario per ricavarne deduzioni che la confutano. Tale è il procedimento di **Zenone** che ammette come ipotesi la molteplicità ed il movimento per dimostrarne l'assurdità. I 4 sofismi di **Zenone** sono 2 contro la pluralità delle cose ed altri 2 contro il movimento.



Si dice che una **grandezza variabile** costituisce un **infinito potenziale** quando, pur assumendo valori finiti, essa può crescere al di là di ogni limite; se per esempio immaginiamo di suddividere un dato segmento con successivi dimezzamenti, il risultato ottenuto sarà un **infinito potenziale** perché il numero delle parti a cui perveniamo, pur essendo in ogni caso finito, può crescere ad arbitrio. Si parla di **infinito attuale** quando ci si riferisce ad un ben determinato insieme, effettivamente costituito di un numero illimitato di elementi. Se per esempio immaginiamo di avere scomposto un segmento in tutti i suoi punti, ci troveremo di fronte ad un **infinito attuale** perché non esiste nessun numero finito che riesca a misurare la totalità di questi punti.

Le serie numeriche ed il sofisma di Achille più veloce e la tartaruga

01) La scoperta dei numeri irrazionali portò all'abbandono dell'immagine pitagorica dei punti fisici disposti in fila. Essa fu sostituita dal concetto più sottile del **continuo**.

Ogni retta è infinitamente divisibile, cioè il numero dei punti in essa contenuto è infinito. Il problema dell'infinito apriva alla scienza un mondo nuovo. Sul concetto di <<infinito>> iniziava una battaglia dialettica che sarebbe durata millenni.

02) Pitagora aveva ipotizzato che lo spazio ed il tempo potessero essere concepiti rispettivamente come somma di un numero (intero) finito di punti e di istanti.

La scoperta delle **grandezze incommensurabili** condusse ad ammettere l'infinita suddivisibilità dello spazio e del tempo in termini di elementi indivisibili.

03) **Zenone**, con i suoi 4 sofismi, voleva evidenziare che non si poteva accettare la concezione pitagorica della suddivisione dello spazio e del tempo in un numero finito di elementi indivisibili, né la concezione post pitagorica (come ad esempio quella di Euclide) secondo la quale lo spazio ed il tempo possono essere concepiti come un insieme di infiniti elementi primordiali (indivisibili). In sintesi **Zenone** riteneva che non era lecito ritenere le grandezze spazio e tempo discrete e nemmeno continue.

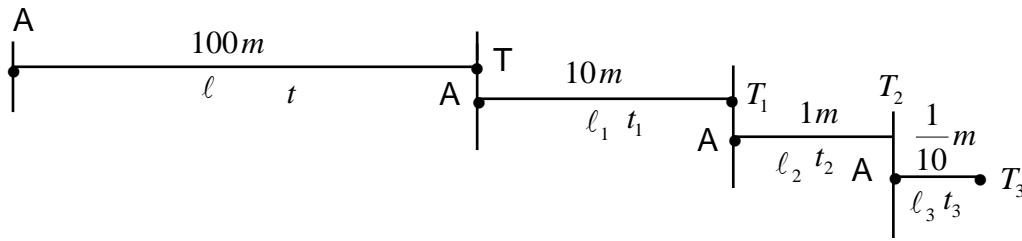
Zenone, con i sofismi della <<dicotomia>> e di <<Achille più veloce>> voleva dimostrare che se, ammettiamo l'infinita suddivisibilità del tempo e dello spazio, il movimento è impossibile, mentre i sofismi della <<freccia>> e dello <<stadio>> volevano dimostrare che il movimento è ugualmente impossibile se ammettiamo il contrario, cioè se ammettiamo la suddivisibilità dello spazio e del tempo mediante un numero finito di elementi indivisibili.

04) Noi oggi analizzeremo, il seguente sofisma di **Zenone**, sia alla luce delle attuali conoscenze della matematica, che secondo il punto di vista del filosofo eleatico.

<<Achille più veloce non può raggiungere la lenta tartaruga>>

Con questo curioso sofisma **Zenone** di Elea (vissuto nel 500 A.C.) sembrava volere dimostrare l'impossibilità del moto, ma in realtà voleva semplicemente dire che con l'<<infinito>> non possiamo operare con le consuete regole applicate alle quantità finite.

Doveva ancora nascere il primo matematico che avrebbe ammesso e dimostrato che la somma di infiniti termini, a determinate condizioni, può dare come risultato una quantità finita.



<< **Achille e la tartaruga sono distanziati di un tratto $\ell = 100m$. Partono contemporaneamente, si muovono con velocità costante e la velocità di Achille è 10 volte quella della tartaruga. Dopo quanto tempo Achille raggiungerà la tartaruga? e se la raggiungerà quale spazio avrà percorso?**>>

Secondo il ragionamento di **Zenone** Achille non poteva raggiungere la tartaruga in quanto sosteneva che la somma di infiniti termini non poteva dare una quantità finita. Secondo le nostre attuali conoscenze Achille raggiungerà la tartaruga in quanto, a determinate condizioni, la somma di infiniti termini può dare una quantità finita.

Osservazione preliminare: $v_A = 10 \cdot v_T \Rightarrow s_A = 10 \cdot s_T$.

Ragionamento di Zenone: E' logico ammettere che Achille, prima di raggiungere la tartaruga, debba percorrere i primi $100m$. Quando Achille percorre il tratto $\ell = 100m$ che lo separa dalla tartaruga, questa sarà avanzata del tratto $\ell_1 = \frac{1}{10} \ell = 10m$, quando Achille percorre il tratto ℓ_1 , la tartaruga percorre il tratto $\ell_2 = \frac{1}{10} \ell_1 = 1m$. Così seguitando vediamo che Achille è costretto a passare per una serie infinita di punti T_1, T_2, T_3, \dots posti rispettivamente a $100m, (100+10)m, (100+10+1)m$ da A senza raggiungere mai la tartaruga.

La conclusione di **Zenone** di Elea era la seguente: <<**il corridore più lento, la tartaruga, si troverà sempre un poco più avanti del corridore più veloce, Achille**>>.

Achille percorre il seguente tratto:

$$s = \ell + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \dots + \ell_n + \dots = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots$$

Zenone sosteneva che la somma di infiniti termini, anche piccoli, non può mai essere una quantità finita e quindi Achille non raggiungerà mai la tartaruga.

Alla luce delle nostre attuali conoscenze noi diciamo che Achille raggiungerà la tartaruga dopo avere percorso il seguente tratto:

$$s = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots = 111 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

Siamo in presenza di una serie geometrica avente ragione $q = \frac{1}{10} < 1$ e primo termine $a_1 = \frac{1}{10}$

Mi calcolo:
$$s_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n} = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot a_1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \cdot \frac{1}{10}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{9}$$

Achille raggiungerà la tartaruga dopo avere percorso il tratto:

$$s = 111 + \frac{1}{9} = \frac{1000}{9} m$$

I tratti via via percorsi da Achille, per quanto sempre più piccoli, sono sempre ben determinati e finiti. Vediamo così che una somma infinita di infinite quantità finite non è necessariamente infinita, non supera necessariamente, da un certo indice in poi, ogni numero per quanto grande esso sia. Se le quantità che si succedono sono sempre più piccole può accadere che il limite delle loro successive somme sia finito.

Dopo quanto tempo Achille raggiungerà la tartaruga ?

Supponiamo che Achille si muova con una velocità costante $v = 10 \frac{m}{s}$. $v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v}$.

t^* = tempo impiegato da Achille per raggiungere la tartaruga

$$t^* = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots = 11 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 11 + \frac{1}{9} = \frac{100}{9} s$$

$$t^* = 10 \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots \right) = 10 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 10 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 10 \cdot \frac{10}{9} = \frac{100}{9}$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{10} < 1$ e primo termine $a_1 = \frac{1}{10}$. Essa converge al

$$\text{valore } S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{9}$$

- Il sofisma di << **Achille più veloce e la tartaruga** >> è un **sofisma dell'infinito potenziale** perché in esso non si fa mai ricorso ad un infinito in atto (infinito attuale): sono in gioco sempre e soltanto delle successioni, delle aggiunte in numero sempre crescente, illimitato. Il sofisma viene pienamente chiarito nell'ambito della teoria dei limiti, della convergenza o meno di una successione ad un limite, dall'essere questo limite finito o infinito (caso delle serie divergenti).

La teoria dei limiti sviluppata col massimo rigore dal matematico tedesco **Karl Weierstrass** (1815–1897) e dalla sua scuola, elimina dal calcolo infinitesimale ogni riferimento agli ambigui <<infinitesimi in atto>>¹. In un certo qual senso è la rivincita di Aristotele che ammetteva **l'esistenza solo degli infinitesimi potenziali** e degli **infiniti potenziali** ma non ammetteva **l'esistenza dell'infinito attuale e dell'infinitesimo attuale**.

Saranno due allievi di **Karl Weierstrass**, il liquidatore degli infinitesimi e degli infiniti in atto nella tecnica della matematica, che riapriranno la spirale dialettica dell'infinito.

Reintrodurranno l'**infinito attuale**, ma con il rigore della scuola alla quale si erano formati, senza più ambiguità, oscurità e misticismo.

- A mio parere **Zenone** non voleva dimostrare l'impossibilità del moto, ma ridurre all'assurdo la tesi dei pitagorici, che componevano il continuo con atomi (punti) di dimensione finita.

Nell'ipotesi pitagorica la somma di un numero crescente di segmenti, anche se decrescenti, dovrebbe tendere comunque all'infinito, perché ciascuno conterrebbe un numero intero di atomi dotati di dimensione (sarebbe come fare la somma di infiniti numeri interi, che tende certamente all'infinito).

- <<**Il primo paradosso dell'infinito attuale: una parte può essere uguale al tutto**>>

- **Sofisma matematico**: dimostrazione apparentemente rigorosa, che conduce ad un risultato palesemente assurdo.

- **Sofisma filosofico**: ragionamento che, partendo da premesse vere o verosimili e rispettando le regole del ragionamento, perviene ad una conclusione assurda.

Sofismi storicamente importanti sono i sofismi di **Zenone** contro il movimento e la pluralità.

- Per **Galileo Galilei** il <<continuo>> era composto da infinite particelle <<indivisibili>>, prive di grandezza, ma non nulle.

- Il metodo degli indivisibili è di portata assai più limitata del metodo del passaggio al limite, nel quale non si considerano <<infinitesimi in atto>> (gli **INDIVISIBILI**), ma <<infinitesimi in potenza>> (i **differenziali**).

- Per **Guldino**, oppositore di **Torricelli** e di **Cavalieri**, il continuo è divisibile all'infinito, ma non consta di infinite parti in atto, le quali non possono mai essere esaurite. Per **Guldino** il continuo è costituito da infinite parti in potenza (infinito potenziale di matrice Aristotelica)

¹ Leibniz, nella sua teoria del calcolo infinitesimale, aveva introdotto le quantità sempre più piccole, evanescenti, ma non nulle; aveva introdotto gli **infinitesimi in atto**, cioè gli infinitesimi attuali. Questo aveva reso logicamente vulnerabile la teoria di Leibniz.