

Premessa

Nella trattazione scolastica dell'analisi matematica si usa strutturare la materia secondo canoni ormai acquisiti stabilmente dagli insegnanti : prima i limiti , poi le derivate , ed alla fine gli integrali. Gli approcci storici a tale materia mostrano, invece , il reale e complesso processo storico secondo il quale l'analisi matematica si è evoluta . Le origini più lontane si possono ricercare nell'antichità classica , nelle opere di Zenone di Elea , di Democrito, di Eudosso di Cnido , di Archimede , ed è proprio dallo studio delle opere di quest'ultimo che trae origine , nel Rinascimento , il decisivo sviluppo dell'analisi infinitesimale . Lo storico Castelnuovo scrive : << Non c'è un fondatore del calcolo infinitesimale . La costruzione del Calcolo ha luogo durante un lungo processo , che si estende per oltre un secolo dai primi traduttori e commendatori di Archimede fino a Newton e Leibniz . Ogni passo , entro questo periodo , si compie quando i tempi sono maturi per farne sentire l'interesse e per imporne la necessità >>. Non c'è stata scoperta che abbia prodotto nelle scienze matematiche una rivoluzione così felice ed immediata quanto quella dell'analisi infinitesimale ; nessun'altra ha saputo fornire mezzi più semplici e più eleganti per penetrare nella conoscenza delle leggi della natura. Ben pochi tratti del mondo in cui oggi viviamo sarebbero concepibili se non ci fossero stati gli sforzi dei vari Galileo Galilei, Cavalieri, Torricelli, Newton, Leibniz, Eulero, Cauchy che riuscirono nella sfida titanica di fissare l'attimo fuggente. Che cosa è un indivisibile? E' un atomo di grandezza. Per esempio: un punto è un indivisibile, poiché non c'è grandezza alcuna in cui lo si possa dividere; analogamente, una linea è un indivisibile di superficie, potremmo dire un atomo di superficie o addirittura un infinitesimo di superficie ; infine , una superficie è un indivisibile di volume .

Queste entità bizzarre hanno suscitato per generazioni le dispute dei matematici e dei filosofi . Spesso con interessanti paradossi : un punto può toccare un altro punto ? Quanti punti sono necessari per formare un segmento ? Paradossi del genere non avevano impedito ai matematici di impiegare gli indivisibili . Archimede , forse anche Democrito , aveva ammesso che una superficie si compone di linee : ma era ancora un punto di vista provvisorio , puramente euristico . Una volta trovato un risultato per questa via , si doveva ancora dimostrarlo rigorosamente per un'altra via che di indivisibili non facesse uso . La condanna più forte ed esplicita era venuta da Aristotele secondo il quale è impossibile che la linea si componga di punti , che il tempo sia composto di istanti , il moto sia composto di salti infinitesimi . Se l'avvenimento più importante è rappresentato dalla creazione del calcolo infinitesimale da parte di Newton e di Leibniz , è anche vero che prima di esso si era sviluppata una pratica matematica assai ricca e sofisticata : problema della tangente , calcolo di aree e volumi , velocità istantanea di un punto materiale , rettificazione di una curva . Ma ogni autore aveva il proprio procedimento ed era spesso difficile scorgere cosa mai collegasse questi differenti artifici . La geometria degli indivisibili appartiene alla preistoria del calcolo infinitesimale , una preistoria fatta di intuizioni e di ricerca a tentoni . Ma al tempo stesso essa era una teoria , con dei fondamenti e dei teoremi generali . In Italia , tre personaggi hanno svolto un ruolo di primo piano nella creazione di questa geometria nuova : Galileo , Cavalieri e Torricelli . Il primo , Galileo , è il Maestro cui ci si rivolge per consigli ed appoggi . Galileo non ha dedicato esplicitamente alcun lavoro ai metodi di dimostrazione infinitesimale , ma in svariati testi , soprattutto alla fine della sua carriera scientifica , ha trattato della composizione del continuo . Nella sua ultima opera << Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze >> Galileo enuncia il suo convincimento che ogni grandezza continua è costituita da una infinità di elementi infinitamente piccoli .

Il secondo personaggio , Bonaventura Cavalieri , è di un'altra generazione : ha 44 anni nel 1642 , quando Galileo si spegne all'età di 78 anni . Il vero divulgatore del metodo degli indivisibili è il nostro terzo eroe Evangelista Torricelli . Fu lui a diffondere ed a mettere in pratica i nuovi procedimenti di Cavalieri . Nelle sue mani la geometria degli indivisibili doveva trasformarsi in uno strumento potentissimo . La strategia di Cavalieri consiste nello schivare la questione filosofica e lasciare indeterminato il legame tra indivisibili e grandezze .

Bonaventura Cavalieri

Bonaventura Cavalieri nacque a Milano nel 1598 e morì a Bologna nel 1647 . Entrato nell'ordine dei Gesuiti , fu mandato a Pisa dove studiò matematica con Benedetto Castelli , allievo di Galileo ; egli stesso si proclama discepolo del sommo Pisano . Nel 1629 fu chiamato alla cattedra di matematica dell'Università di Bologna , che occupò fino alla morte . La sua opera fondamentale è la << Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota >> (Geometria promossa con gli indivisibili dei continui mediante un metodo nuovo) . nei decessi successivi il nome di Bonaventura Cavalieri sarà sinonimo di << metodo degli indivisibili >> ; sfortunatamente la sua geometria è un'opera pesante e sarà poco letta . A ben intendere il significato storico dell'opera del Cavalieri , occorre considerare che prima di lui la scienza geometrica non aveva fatto alcun sensibile avanzamento oltre i limiti raggiunti con le opere di Archimede e di Apollonio .L'intendere quelle opere era considerato come il massimo acquisto che potesse essere fatto dai cultori della matematica . Come fondamento logico della sua teoria , il Cavalieri pone una genesi delle grandezze geometriche , per cui queste erano rappresentate come totalità di elementi primordiali , detti indivisibili : la linea è concepita come totalità di punti , una superficie come totalità di linee , un solido come totalità di superfici . Le misure di lunghezze , di aree , di volumi erano

ricondotte alla somma di infiniti indivisibili , cioè a quella operazione che oggi viene detta di integrazione definita. Quindi l'idea direttrice del Cavalieri è la seguente : << una figura piana è costituita dalle infinite corde che un fascio di rette parallele intercetta entro la figura stessa , mentre una figura solida è costituita dalle infinite superfici piane intercettate da un fascio di piani paralleli >>. Uno dei punti fondamentali ed anche più oscuri del complesso pensiero di Cavalieri che resti ancora da chiarirsi bene è la vera natura degli indivisibili . I pareri degli storici non sono concordi . Castelnuovo sostiene che Cavalieri non considera gli indivisibili come infinitesimi attuali e sostiene che Cavalieri si avvale di una infinità discreta di indivisibili di una figura per paragonarli con un'analogia infinità di una seconda figura. Il Bortolotti afferma che il Cavalieri considera gli indivisibili come privi di spessore a condizione di supporli animati da una “ flussione “ , cioè da un movimento . Questa veduta porta alla considerazione degli indivisibili come elementi geometrici aventi estensione non assolutamente nulla , ma infinitesima .

Per quanto riguarda la vera natura degli indivisibili , possiamo dire che cavalieri non ha detto espressamente e chiaramente se li intendeva come infinitesimi attuali o piuttosto come degli infinitesimi potenziali . Con tutta probabilità gli indivisibili di Cavalieri nascono come infinitesimi attuali e maturano come infinitesimi potenziali. Ai tempi di Cavalieri l'infinito attuale , in ossequio all'autorità di Aristotele , era considerato impensabile . Tutte le linee e tutte le superfici di Cavalieri erano insieme di infiniti elementi infinitamente piccoli in atto . Infiniti ed indivisibili. L'obiezione più ovvia che da Zenone in poi è stata rivolta contro la composizione del continuo per mezzo di elementi indivisibili è che mai può avere grandezza una somma di elementi di grandezza nulla : una linea come somma di punti , una superficie come somma di linee , un solido come somma di superfici .

La stessa obiezione che solleva Guldino quando dice che << la moltitudine delle linee , per quanto grandissima essa sia , non può comporre neppure una piccola superficie >>> .

D'altro canto , è impossibile ammettere che gli indivisibili abbiano grandezza . Perché , in questo caso , non si spiegherebbe come la somma di infiniti di loro potrebbe essere uguale ad una figura finita. L'unica alternativa possibile sembra che una figura possa essere suddivisa in un numero comunque grande di parti di grandezza sempre più piccola , minore di qualunque grandezza piccola a piacere .

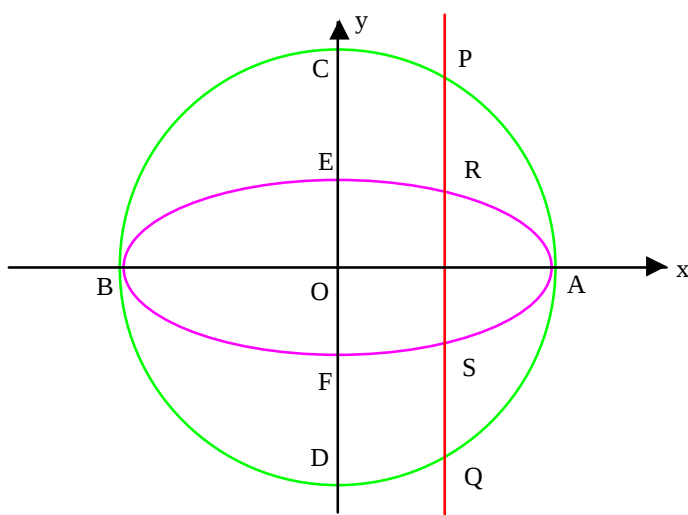
<< Il continuo, dice Guldino, è divisibile all'infinito, ma non costa di infinite parti in atto, bensì soltanto in potenza, le quali parti non possono mai essere esaurite. >>

Questa è la posizione ufficiale nel 600 . Quello del confronto tra gli insiemi infiniti di tutte le linee e di tutte le superfici è il primo serio nodo da sciogliere che si presenta a Cavalieri nella ricerca di un'impostazione razionale al nuovo metodo .

Spronato da taluni oppositori a chiarire la metafisica della sua teoria , il Cavalieri espone due diversi punti di vista , che dovevano diventare classici . Il primo di questi riconosce il suo fondamento nel concetto di continuità che si manifesta sotto forma di movimento . Da questo punto di vista gli indivisibili si possono considerare come privi di spessore a condizione di supporli animati da una flussione , cioè da un movimento : gli enti geometrici sono fluenti nei loro indivisibili e la misura dell'estensione si desume dal confronto globale degli indivisibili . Le parole fluente , flussione , e queste idee del Cavalieri ebbero più tardi fortuna nella scuola del Newton , che considerò il calcolo infinitesimale come calcolo delle flussioni . Il secondo punto di vista appare guidato dai concetti , che allora si affacciavano alla scienza , di infinitesimo e di limite . In esso il confronto fra gli indivisibili delle figure geometriche viene fatto singolarmente , cioè il rapporto di due figure geometriche viene desunta dal rapporto fra un indivisibile (generico) dell'una ed il corrispondente indivisibile dell'altra . Questa veduta porta alla considerazione degli indivisibili come elementi geometrici aventi estensione non assolutamente nulla , ma infinitesima , ed alla valutazione di rapporti fra i vari gradi di infinitesimo e fra infinitesimi dello stesso grado .

Il Cavalieri , dopo avere immaginato le superfici ed i corpi come generati dal moto continuo ed uniforme rispettivamente di una linea e di una superficie , era giunto a concepire una figura piana come un tessuto formato da fili o segmenti rettilinei , tutti fra loro paralleli , ed una figura solida come un libro , vale a dire , come costituita dalla sovrapposizione di tanti fogli paralleli . Quei fili e questi fogli sono precisamente gli indivisibili della figura piana e della figura solida . Nella << Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota >> (1635) , il Cavalieri calcolò aree e volumi , mostrando che l'indivisibile della figura da misurare era in rapporto costante con l'indivisibile corrispondente di un'altra figura opportunamente scelta , di misura nota . Nelle << Exercitationes geometricae sex >> (Bologna 1647) egli , seguendo una via diversa , confrontò , non più singolarmente gli indivisibili corrispondenti nelle due figure , ma la somma degli indivisibili della prima figura con la somma di quelli della seconda . Quest'ultimo metodo è quello che più si accosta all'uso del moderno calcolo integrale . Il concetto di indivisibile è alla base di quel principio conosciuto come Principio di Cavalieri e che permette di determinare l'area o il volume di una figura geometrica mediante il confronto con un'altra figura la cui area o il cui volume sia noto . Nella << **Geometria degli Indivisibili** >> tale principio è contenuto in due formulazioni diverse , una più generale dell'altra , che Cavalieri chiama << **primo e secondo metodo degli indivisibili** >>; oggi, lo stesso principio viene formulato nel modo seguente: se due superfici piane tagliate da un fascio di rette parallele intercettano , sopra ognuna di queste , due corde uguali le superfici sono equiestese ; se le corde corrispondenti hanno un rapporto costante , lo stesso rapporto esiste fra le aree delle due superfici . Se le sezioni di due solidi , ottenute mediante piani paralleli fra loro , sono a due a due equiestese , allora i due solidi hanno lo stesso volume ; se dette sezioni hanno un rapporto costante , uguale è il rapporto dei volumi dei due solidi .

Ad esempio , per determinare l'area di un'ellisse , si costruisca il cerchio tangente ad essa negli estremi dell'asse maggiore e si osservi che questo cerchio e l'ellisse intercettano sopra la perpendicolare a tale asse segmenti che stanno fra di loro in un rapporto fisso , cioè nel rapporto $\frac{b}{a}$ dei due assi dell'ellisse .



$$\frac{RS}{PQ} = \frac{EF}{CD} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{S_E}{S_C} = \frac{b}{a} \Rightarrow S_E = \frac{b}{a} \cdot S_C = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi a b$$

Quindi , se conosciamo l'area del cerchio possiamo calcolare l'area dell'ellisse .

<< Se due figure piane intercettano sulle rette parallele ad una direzione fissa (regola) segmenti che stanno tra loro in un rapporto costante , questo rapporto è anche quello delle aree racchiuse dalle due figure . I segmenti anzidetti vengono considerati come elementi indivisibili generatori della figura. in modo simile il principio si estende alle figure solide , che intercettano sopra un sistema di piani paralleli superfici aventi tra loro un rapporto costante : così , in particolare , appaiono senz'altro equivalenti due piramidi aventi uguale base ed altezza , e il cono ed il cilindro risultano equivalenti rispettivamente alla piramide ed al prisma d'uguale base ed uguale altezza .

Per ciò che si riferisce alla questione del rigore , è naturale domandarsi : che cosa sono gli indivisibili di Cavalieri , linee o superfici generatrici di figure a più dimensioni ? Sono veri infinitesimi per riguardo alla figura generata , o all'opposto si debbono prendere come rigorosamente nulli , secondo Zenone d ' Elea ? Tutto sembra indicare che Cavalieri fosse ben conscio che tale dilemma toglie ogni esistenza possibile ai suoi elementi : e perciò che questi rappresentano una comoda finzione . Comunque l'autore stesso ha tentato di giustificare i suoi principi in due modi diversi : nel primo dei quali le figure vengono considerate come fluenti attraverso il moto (flussione) dei loro indivisibili , mentre nel secondo si fa appello più direttamente alla nozione di infinitesimo .

Evangelista Torricelli (1608/1647) , che doveva estendere e proseguire le ricerche del Cavalieri così ne giustificava nelle sue Lezioni Accademiche :

<< La nuova teoria degli indivisibili va per le mani dei dotti come miracolo di scienza ,e per essa ha imparato il mondo che i secoli di Archimede e di Euclide furono gli anni d'infanzia per la scienza della nostra adulta geometria >> .

Cavalieri ha esercitato una forte influenza sui matematici che dopo di lui hanno segnato le vie del calcolo infinitesimale , e sui fondatori stessi di questo calcolo : Newton riprendeva da lui la nozione ed il nome delle fluenti e delle flussioni (derivate) , Leibniz introduceva il nostro segno di integrale , cioè lo $\int$ (deformazione d'una S , iniziale di somma) per indicare la somma degli indivisibili secondo Cavalieri .

I tempi erano ormai maturi per portare i matematici del seicento a prendere in serio esame le grandezze infinitesimali ed il modo come esse determinano le grandezze finite , ricavabili dalla composizione di un'infinità di grandezze infinitesimali . Il problema è sempre lo stesso : ricavare le proprietà del tutto (cioè della figura nella sua interezza) partendo dalle proprietà delle infinite parti infinitesime che lo compongono .

Ma esso risulta preceduto da un altro problema , ancora più profondo : in che modo dovremo intendere l'anzidetta composizione ? Bonaventura Cavalieri ritiene di potere evitare le difficoltà insite in questo quesito , limitandosi a confrontare le proprietà di due figure (per esempio le aree di due superfici o i volumi di due solidi) sulla base del rapporto fra gli indivisibili staccati dall'una e dall'altra sopra un medesimo fascio di rette parallele ; è chiaro però che il ricorso ad una infinità di grandezze infinitesime resta sostanzialmente presente nella sua argomentazione (per esempio la superficie che è una figura geometrica a due dimensioni viene da lui considerata come ottenibile a partire dall'infinità delle corde , unidimensionali , che essa stacca sopra un fascio di rette parallele .

Si dovrà o non si dovrà avere il coraggio di considerare il trapasso dagli infinitesimi al finito (o meglio la costruibilità di questo a partire da un'infinità di quelli) come una operazione matematica lecita ?

la possibilità di ottenere un risultato finito , sommando infiniti termini sempre più piccoli , era già stata intravista dai greci . Erano state proprio le famose antinomie di Zenone ad attrarre l'attenzione su di essa . Una di tali antinomie aveva fatto comprendere che un segmento può venire identificato come la somma di questi infiniti termini : la sua metà , più la metà della metà residua , più la metà del quarto residuo , e così di seguito . Ma i pericoli di cadere nell'assurdo , connessi a tipi siffatti di operazioni , avevano indotto i matematici classici ad evitarle con scrupolo o ad usarle solo con la massima cautela , adoperando all'uopo laboriosi artifici , capaci di fornire serie garanzie contro ogni spiacevole sorpresa .

I matematici del seicento non sono più disposti ad una rinuncia del genere ; essa appare loro troppo gravosa , mentre un numero sempre maggiore di esempi mette in luce l'norme utilità di ampliare somme e prodotti nel senso accennato . E' vero che non si sa con chiarezza cosa si debba intendere per somma di infiniti addendi o prodotto di infiniti fattori, e tanto meno si sa se tali somme o tali prodotti continuino a godere delle proprietà possedute nel caso finito .

Obiezioni all'ampliamento della matematica verso l'infinito e l'infinitesimo

Se sono ben comprensibili i motivi che da più parti sollecitavano i matematici del Seicento a spingersi , con ardita spregiudicatezza , dall'algebra delle grandezze finite a quella delle grandezze infinitesime , altrettanto comprensibili sono i motivi che trattenevano alcuni di essi dal pericoloso passo .

Il nuovo calcolo introdurrà effettivamente nella matematica non poche proposizioni contraddittorie , che ne oscureranno la rispettabilità lungo tutto il XVIII secolo . Eppure la storia ha dimostrato che gli antiarchimedei avevano ragione : il loro coraggio sarà infatti largamente premiato dalla straordinaria fecondità che il nuovo capitolo della matematica rivelerà assai presto in tutti i più importanti rami della scienza . Il primo tema che affiora ripetutamente nelle obiezioni degli archimedei riguarda la struttura delle grandezze geometriche continue (linee , superfici , solidi) , a proposito delle quali essi sostengono l'impossibilità che vengano costituite col riunire grandezze aventi una dimensione in meno (le linee riunendo punti , le superfici riunendo linee , i solidi riunendo superfici) . Ecco ciò che Guldino scrive nella sua critica al Cavalieri : << Che dunque quella superficie sia “ tutte le linee di tale figura “ non sarà concesso da nessun matematico : mai possono essere chiamate superfici più linee , oppure tutte le linee ; giacché la moltitudine delle linee , per quanto grandissima essa sia , non può comporre la più piccola superficie >> . La profondità della questione è incontastabile : essa verte su uno dei punti nodali del pensiero geometrico , già preso in esame con la massima serietà dai filosofi e dai matematici greci . La tesi di Guldino si ricollega al risultato più maturo di tale esame : << **Rispondo che il continuo è divisibile all'infinito, ma non consta di infinite parti in atto, bensì soltanto in potenza, le quali parti non possono mai essere esaurite** >> .

Anche altri esempi vanno incontro ad analoghe difficoltà. Così potremmo chederci: che significato ha l'affermazione che la tangente ad una curva in un suo punto P è

la secante che passa per P e per il punto Q infinitamente vicino a P ? Non sappiamo forse , in base ai risultati ottenuti dai matematici greci nelle ricerche intorno al continuo lineare , che fra due punti distinti , per quanto prossimi , esiste sempre (su quel continuo) un'infinità potenziale di altri punti ? Il bersaglio di questi interrogativi è proprio il concetto di “ vicinanza infinita “ , che sfugge ad ogni tentativo di definizione geometrica seria . Ma non basta . Supponiamo di avere in qualche modo accolto nel quadro della geometria le nozioni di “ grandezza infinitesima “ , di “ infinità in atto “ , di “ totalità delle linee di una superficie “ . Sorge ora il problema , non più geometrico ma aritmetico , di instaurare un calcolo coerente ed efficace sugli infiniti e gli infinitesimi . Qui di nuovo si possono sollevare innumerevoli obiezioni . Questa per esempio : se introduciamo un particolare simbolo per le grandezze infinitesime (se ad esempio le indichiamo con E come aveva proposto Fermat) dovremo operare con esso come si opera con lo zero o come si opera con un numero finito diverso da zero ? Tutto il nuovo calcolo , nella sua fase di graduale elaborazione caratteristica dell'epoca che stiamo esaminando , prestava il fianco a domande del genere (né esse troveranno una risposta davvero soddisfacente in Leibniz e in Newton) ; non dobbiamo , dunque , stupirci , se molti matematici seri lo guardavano con profonda diffidenza malgrado i suoi crescenti successi .