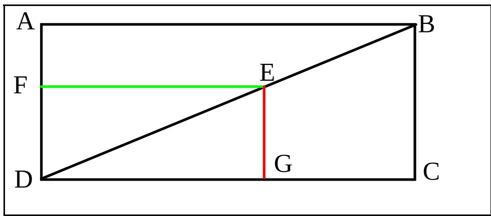
Verso una nuova teoria : Torricelli

Torricelli " divulgatore " degli indivisibili

Se la Geometria di Cavalieri è libro difficile e troppo vincolato al rispetto , almeno formale , di Euclide , Cavalieri ha però trovato un portavoce di genio nella persona di Torricelli , che ha presentato il metodo degli indivisibili in una forma diretta e facile , rendendolo attraente grazie a risultati nuovi e sorprendenti . Questa presentazione divulgativa si trova in Opera Geometrica (1644 **) , in due testi assai originali . Nel primo (De dimensione parabolae) si danno** 21 **dimostrazioni differenti della stessa proposizione , la quadratura della parabola ; le prime** 10 **sono " alla maniera degli Antichi " la dimostrazione procede indirettamente per doppia riduzione all'assurdo , secondo il metodo che nel Seicento è detto di " esaustione " ; le ultime** 11**utilizzano gli indivisibili . Il lettore non può che restare impressionato dal contrasto e convincersi che il metodo degli indivisibili appare più diretto e naturale . nel secondo (De solido hyperbolico acuto) Torricelli mostra che il volume di un certo solido iperbolico di altezza infinita è uguale a quello di un cilindro finito . E' una doppia novità : determinazione del volume di un " solido infinito " ed impiego degli indivisibili curvi . Torricelli presenta il suo lavoro come un'illustrazione della nuova geometria di Cavalieri . Per Torricelli gli indivisibili costituiscono la grandezza continua . In ogni dimostrazione torricelliana ricorre la frase omnes lineae sive figura ipsa , cioè** << **tutte le linee ovvero la figura stessa** >> **. D'altra parte , la sua opera non contiene alcuna proposizione fondamentale sulle condizioni rigorose con cui gli indivisibili dovrebbero venire " ritagliati " in un dato continuo , né sul confronto tra aggregati infiniti , né sul passaggio dagli aggregati infiniti alle figure piane o solide finite .**

Il paradosso degli indivisibili

Torricelli è ben più di un divulgatore . Egli riflette con molta penetrazione sui fondamenti del metodo, scopre tutta una serie di paraddossi che alimentano la sua ricerca e costruisce una teoria degli indivisibili differente da quella di Cavalieri , più ardita e feconda . Il paradosso fondamentale sul quale riflette Torricelli è il seguente . le due parti del rettangolo ABCD , ottenute tracciando le diagonale BD , hanno la stessa area . Tuttavia , se consideriamo tutte le linee FE e tutte li linee GE dovremmo pervenire al risultato assurdo che il triangolo BAD sta al triangolo DBC come tutte le linee dell'uno stanno a tutte le linee dell'altro , cioè come FE a EG ovvero come AB sta a BC .



Torricelli e il paradosso degli indivisibili

Cavalieri aveva evitato assurdi del genere imponendo una direzione fissa per la determinazione degli indivisibili . Ma Torricelli , più che imporre restrizioni all'impiego degli indivisibili , tenta di penetrarne il mistero . Egli collezione dei paradossi , facendo una sorta di lista di varianti del paradosso fondamentale .

Altri casi sono più sofisticati e ricchi di sorprese . Torricelli quasi si compiace di accumulare le assurdità cui porta una scelta perversa della " regola " per determinare gli indivisibili . Per Torricelli i residui ultimi delle figure finite sono dei veri e propri infinitesimi . Siamo cos' di fronte a veri e propri enti infinitamente piccoli , che hanno la stessa dimensione che hanno le figure o i solidi in cui si trovano : il segmento di retta è un rettangolo infinitamente sottile , il disco è un cilindro di altezza infinitamente piccola . L'indivisibile non è più il risultato di una sezione , ma è ottenuto come vestigium , residuo ultimo della figura .

Questo è il punto decisivo : per Torricelli ci sono delle differenze , delle relazioni di maggiore e minore , nel dominio dell'infinitamente piccolo .

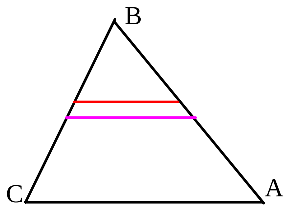
Il testo in cui egli espone più chiaramente la sua concezione (dedicato alle “ tangenti alle parabole infinite) si apre con l’affermazione che gli indivisibili non sono uguali tra loro : un punto può essere maggiore di un altro punto , una linea più grande di un’altra , una superficie più spessa o più alta di un’altra . Come è possibile determinare dei rapporti nel dominio dell’infinitamente piccolo ? per gli infinitamente piccoli , cioè tra i segmenti di retta che sono i residui dei parallelogrammi o dei rettangoli , la proporzione deve essere la stessa che esisteva tra i parallelogrammi o i rettangoli finiti . Il principio è che la "“proporzione "“tra le figure è conservata quando si perviene ai residui ultimi di queste figure .

Gli indivisibili curvi

Torricelli estese il metodo degli indivisibili di Cavalieri introducendo (alla fine del 1641 **) gli indivisibili curvi , cioè intersecando le figure non solo con rette e piani , ma anche con circonferenze , sfere , cilindri e coni e considerando come indivisibili non solo segmenti e superfici piane , ma anche archi di circonferenza , superfici sferiche , cilindriche e coniche . Per confrontare due figure (ad esempio piane) con il metodo di Torricelli si procede come segue : si interseca la prima figura con un sistema di curve e la seconda con un sistema di rette parallele ; se ogni indivisibile curvo della prima figura uguaglia il corrispondente indivisibile della seconda figura allora le due figure hanno la stessa area , mentre se tra due indivisibili corrispondenti sussiste un rapporto costante , tale rapporto sussiste anche tra le aree delle due figure . Nel caso di figure solide si procede analogamente , intersecando la prima figura con un sistema di superfici e la seconda con un fascio di piani paralleli .**

Il nuovo concetto di indivisibile

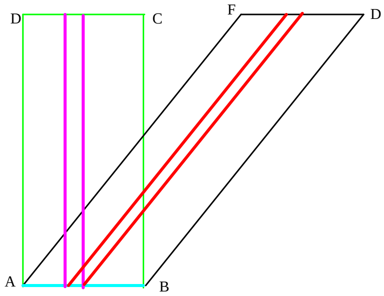
Torricelli operò un profondo cambiamneto nel concetto di indivisibile compiendo un passo avanti decisivo verso il futuro calcolo infinitesimale . Gli indivisibili di Torricelli non sono punti , linee o superfici in senso euclideo , ma hanno le stesse dimensioni della figura a cui sono associati : • di " indivisibili di linea " non sono punti euclidei , ma elementi lineari che hanno lunghezze paragonabili per rapporto , sebbene infinitesime • gli " indivisibili di superficie " non sono linee euclidee , ma elementi d'area e come tali sono paragonabili non solo perché hanno lunghezza finita , ma anche perché hanno area infinitesima e le loro larghezze , benché infinitesime , hanno fra loro rapporti paragonabili a rapporti tra grandezze finite ; • gli " indivisibili di volume " non sono superfici euclidee , ma elementi spaziali i cui spessori , sebbene infinitesimi , sono paragonabili fra loro .



Se nel triangolo ABC **che abbia il lato** AB **maggiore del lato** BC **ci immagineremo tirate tutte le infinite linee parallele alla base** AC **, tanti saranno i punti stampati dal segmento sulla retta** AB **quanti su la retta** BC **;**

dunque un punto di quella ad un punto di questa sta come tutta la linea a tutta la linea . Gli indivisibili che costituiscono il triangolo sono , in sostanza , strisce cioè elementi d'area compresi fra rette parallele e gli indivisibili che esse determinano sui lati del triangolo non sono punti , ma sono tratti rettilinei che , sebbene infinitesimi , soddisfano al teorema di Talete ed hanno rapporto determinato , uguale al rapporto dei lati su cui giacciono .

Gli indivisibili che costituiscono i parallelogrammi ABCD **e** ABDF **sono parallelogrammi aventi larghezza infinitesima e le cui aree sono uguali fra loro. Poiché indivisibili corrispondenti hanno lunghezze disuguali, le loro larghezze, sebbene infinitesime, hanno un rapporto determinato uguale all'inverso del rapporto delle lunghezze.**



Questo nuovo concetto di indivisibile permette di superare le obiezioni suscitate dalla concezione euclidea di Cavalieri , prima fra tutte la seguente : come é possibile pensare un continuo come composto dai suoi indivisibili se essi hanno una dimensione in meno rispetto ad esso? Come si può passare (ad esempio) dalle linee ad una superficie ? Le linee euclidee hanno una sola dimensione , la lunghezza , mentre le figure piane sono dotate di lunghezza e larghezza . Nemmeno riunendo infinite linee (o infiniti superfici) si riuscirebbe e formare una superficie (o un solido) e questo prescindendo dalla possibilità di potere disporre di una totalità attualmente infinita di tali enti. Le problematiche legate a questi interrogativi , riguardano la composizione del continuo e l'uso dell'infinito matematico attuale , temi troppo vasti e complessi che abbiamo affrontato nel primo paragrafo di questa conferenza . La proprietà degli indivisibili di possedere uno " spessore " permise a Torricelli di confutare numerosi paradossi derivati da applicazioni errate del metodo degli indivisibili e di stabilire in quali condizioni tale metodo era applicato correttamente . Infatti , il metodo degli indivisibili usato in modo scorretto poteva condurre all'assurdo . Torricelli stabilisce che: affinché gli indivisibili in cui si intendono scomposte due figure siano idonei alla determinazione del rapporto delle aree o dei volumi è necessario che gli indivisibili siano di spessore uguale ed uniforme. Per giudicare poi dell'uguaglianza dello spessore di detti indivisibili, Torricelli richiede che gli elementi di area o di volume passino per gli stessi punti di una stessa linea e siano ugualmente inclinati su di essa .