Il costituirsi del calcolo infinitesimale

La serietà delle obiezioni di molti matematici di un certo valore non valse a fermare lo slancio dei costruttori del nuovo calcolo . Questo venne inizialmente impianto lungo due direttrici : 1) ricerca delle tecniche atte a determinare le aree di superfici racchiuse da curve di equazione nota , i volumi di solidi di rotazione , i baricentri di figure piane e solide ; 2) ricerca delle tecniche atte a determinare le tangenti a curve di equazione nota , in un loro punto generico , gli eventuali massimi e minimi di tali curve , i loro punti di flesso , la loro curvatura .

Il primo ordine di problemi era già stato sistematicamente affrontato dai matematici greci , che avevano ideato per risolverlo il cosiddetto metodo di esaustione . Si trattava ora di scoprire nuove tecniche di più agevole applicazione , capaci non soltanto di ritrovare i risultati raggiunti da Euclide e da Archimede , ma anche di risolvere problemi analoghi , che essi non avevano studiato o non avevano risolto . Il metodo degli indivisibili di Cavalieri , accolto e generalizzato da Torricelli , fu una delle tecniche moderne che rivelò particolare efficacia allo scopo anzidetto . va però notato che Torricelli , pur utilizzando largamente gli indivisibili (rettilinei e curvilinei) , continuò ad applicare spesso il metodo classico .

Fra i molti interessantissimi risultati da lui raggiunti , ci limiteremo a citarne uno che suscitò subito una notevole sorpresa . Esso riguarda , da un lato l'area delimitata da un ramo di iperbole equilatera di equazione $y = \frac{1}{x}$ **ed i suoi asintoti , dall'altro , l'analoga area racchiusa fra un ramo di iperbole generalizzata (di equazione** $y = \frac{1}{x^n}$ **, con** $n > 1$ **) ed i suoi asintoti . Nel primo caso Torricelli dimostrò che l'area è infinita , nel secondo caso (e proprio qui risiedeva la singolarità del risultato) che essa è finita sebbene la superficie si estenda all'infinito .**

Il problema delle tangenti era assai più nuovo di quello delle aree ; i greci non lo avevano trattato nella sua generalità , ma solo per tipi speciali di curve (in particolare per le coniche) . Mentre la ricerca delle aree equivale al calcolo degli integrali definiti , la determinazione delle tangenti (nonché dei massimi e dei minimi) equivale al calcolo delle derivate . In questo tipo di ricerche un merito particolare spetta a Pascal che per primo mostrò l'enorme importanza , nello studio di una curva di equazione $y = f(x)$, del suo " triangolo caratteristico " , cioè del triangolo rettangolo avente per ipotenusa la corda che collega il generico punto P della curva ad un punto Q (sempre sulla curva) molto prossimo a P , ed avente per cateti l'incremento Δx subito dall'ascissa e quello Δy subito dall'ordinata nel passaggio da P a Q . L'utilità di considerare questo triangolo costituirà uno dei più preziosi suggerimenti , che Leibniz ricaverà dalla lettura delle opere di Pascal . l'importanza del triangolo caratteristico fu scoperta , indipendentemente da Pascal , anche dall'inglese Barrow (il maestro di Newton) .

Il punto più delicato , nello sviluppo del calcolo infinitesimale , consisteva nel trovare una precisa relazione fra i due tipi di problemi (oggi è noto che il calcolo delle derivate e quello degli integrali sono uno l'inverso dell'altro) . Il teorema di inversione , che risolveva il difficile problema , fu raggiunto (limitatamente ad alcuni casi particolari) da Torricelli ed intuito in forma generale ma esposto molto oscuramente da Barrow . La scoperta di tale teorema e la chiara formulazione di esso costituirà uno dei meriti fondamentali di Newton e segnerà un'autentica svolta nella storia di questo capitolo della matematica moderna .

Le notizie fin qui riferite possono essere sufficienti a darci un'idea del fervore di ricerche , spesso molto acute ma anche assai disorganiche , che si andavano sempre più diffondendo con l'avanzare degli anni intorno ai problemi dell'infinito e dell'infinitesimo .

Oggi essi sogliono venire considerate , dagli storici della matematica , come costituenti la prima fase dell'elaborazione del calcolo infinitesimale , fase che verrà

gloriosamente conclusa da Newton e da Leibniz : ai quali non si può attribuire il merito di avere inventato (nel senso etimologico della parola) il nuovo calcolo , ma solo quello di avergli fornito una prima solida sistemazione .

<< Nel momento in cui Newton e Leibniz cominciarono ad occuparsi di matematica , si può dire che un metodo infinitesimale era già costituito , nel senso che i principali geometri si erano abituati a maneggiare gli infinitamente piccoli (almeno quelli del primo ordine , sia come elementi di somma , sia come elementi di rapporti . Nel primo caso (quadratura) , essi possedevano , nel processo di riduzione all'assurdo imitato dagli antichi , un metodo di dimostrazione rigoroso fondato implicitamente sulla nozione di limite . Per il secondo caso (problema delle tangenti) , la teoria non era stata approfondita ; ma i procedimenti di calcolo avevano ricevuto , in entrambi i casi , ampi sviluppi e bastavano in realtà per la risoluzione dei problemi allora sollevati . >> Ciò che mancava era l'uniformità dei simboli : ogni geometra aveva le sue notazioni particolari e le sue abbreviazioni , che il più delle volte riservava per sé . Proprio questa era la lacuna che verrà colmata in modo pressoché definitivo dai due cosiddetti " inventori " dell'analisi infinitesimale . Ciò che l'analisi infinitesimale riuscì a fare emergere , in tutta la sua importanza , fu la funzione veramente essenziale compiuto (nella matematica) dalla sistemazione dei simboli . In effetti uno dei principali contributi di Newton e Leibniz allo sviluppo di questa disciplina fu proprio l'introduzione di ben precisi e comodi simboli per le operazioni fondamentali della derivazione e dell'integrazione (i simboli ideati da Leibniz risultarono migliori di quelli inventati da Newton e per questo motivo il sorgere della nuova disciplina venne spesso collegato più a lui che non allo scienziato inglese) .

La storia dell'analisi infinitesimale ci dimostra che il primo passo veramente essenziale per il costituirsi di una disciplina del tutto nuova è la sua sistemazione simbolico-operativa. In un secondo tempo si renderà necessario un passo ulteriore,

altrettanto e forse ancora più essenziale , costituito dall'elaborazione logica dei principi della disciplina in questione , ma esso può venire seriamente eseguito solo se la disciplina stessa possiede già una sua consistenza , sia pure provvisoria e non del tutto soddisfacente .

Quanto alle riflessioni filosofiche sull'analisi infinitesimale , è chiaro che , nel Seicento , esse non potevano fare a meno di riflettere tutte le incertezze ancora presenti nelle nozioni di infinito e di infinitesimo . Non possiamo rimproverare a Leibniz , che fu in quell'epoca il più eminente filosofo della nuova disciplina , di non avere compreso con la dovuta chiarezza l'autentico significato delle anzidette nozioni , ma averle spesso agganciate a presupposti metafisici , rivelatisi poi inaccettabili .

Abbiamo visto che la nascita del calcolo infinitesimale moderno risale all'inizio del Seicento . Mentre i matematici del secolo precedente avevano soprattutto mirato a recuperare i testi dei grandi geometri greci , per riuscire ad assimilare il prezioso insegnamento , ora ci si pone apertamente il compito di andare al di là di essi . sarà questa una delle molle principali che spingerà alla creazione del nuovo calcolo . E' risaputo che uno dei più importanti e difficili problemi affrontati dai matematici greci era stato quello di calcolare lunghezze di linee , aree di superfici , volumi di solidi , non trattabili con i metodi elementari . Se ne erano occupati Eudosso ed Euclide , ma spettava soprattutto ad Archimede il merito di avervi recato contributi eccezionalmente significativi . Era riuscito a farlo sulla base del cosiddetto " metodo di esaustione " , l'unico cui fa esplicitamente ricorso nelle opere recuperate dai matematici del secolo XVI .

Gli innovatori del secolo XVII non possono mettere in dubbio la coerenza logica di tale metodo , né la validità dei risultati che esso ci permette di raggiungere. Sottolineano però la sua estrema complessità ed il suo carattere poco intuitivo , che rendono pressoché impossibile , quanto ci si avvalga unicamente di esso , raggiungere nuovi risultati che oltrepassino quelli già conosciuti di Archimede . Di

qui la necessità , se non ci si vuole arrestare al livello dei greci, di cercare coraggiosamente altre vie meno tortuose e più feconde di quella classica . Il punto più caratteristico del metodo di esaustione consisteva nell'aggirare con opportuni artifici l'ostacolo , che i greci avevano ritenuto pericolosissimo , rappresentato dall'introduzione in matematica dell'infinito , sia sotto forma dell'infinitamente grande sia sotto forma dell' infinitamente piccolo . La svolta operata dagli innovatori doveva basarsi proprio sull'abbandono delle riserve tradizionali nei confronti del ricorso all'infinito . Il primo a compiere un passo decisivo in questa direzione fu Keplero , che concluse la sua famosa Nova stereometria doliorum (Nuova misura del volume delle botti) del 1615 **, ove sviluppò le sue considerazioni di tipo infinitesimale per giustificare un criterio empirico usato dai bottai austriaci , con un Supplementum ad Archimedem (Supplemento ad Archimede) , ove i volumi di alcuni complicati solidi vengono calcolato mediante la suddivisione di essi in un numero (tendente all'infinito) di corpiccioli piccolissimi (al limite infinitesimi) . Un secondo importante passo è compiuto da Cavalieri che introduce il famoso metodo degli indivisibili, basato sulla concezione delle linee come insiemi (infiniti) di punti e , analogamente , delle regioni piane come insieme di linee e dei solidi come insieme di superfici . Egli è convinto che questo metodo , se bene applicato , non possa condurre ad errori , ma i fedeli di Archimede sollevano contro di esso numerose obiezioni . Il più autorevole di tali fedeli è il gesuita Paolo Guldino , il quale obietta che il continuo è senza dubbio divisibile all'infinito, ma non consta di infinite parti in atto, bensì soltanto in potenza, le quali non possono essere mai esaurite . Emerge qui la distinzione (risalente ad Aristotele) fra infinito in atto ed infinito in potenza, che costituirà uno dei temi centrali dei dibattiti intorno al nuovo calcolo. Malgrado queste obiezioni , Evangelista Torricelli accoglierà il metodo di Cavalieri , ampliandolo con l'introduzione degli indivisibili curvi , e riuscirà per questa via a conseguire risultati di grandissimo interesse . Il più**

sorprendente di essi è che esistono " solidi acutissimi " i quali , pur estendendosi all'infinito , possiedono un volume finito . Altri tre generi di problemi , oltre a quelli finora considerati , conducevano all'introduzione in matematica dell'infinito (in grandezza o in piccolezza) . Ci limiteremo a darne un cenno molto schematico . Il primo problema è connesso allo sviluppo della meccanica . E' noto che Galileo diede un contributo decisivo a questo sviluppo , iniziando lo studio sistematico della cinematica . Sono proprio i concetti più caratteristici della cinematica come quelli di velocità e di accelerazione che esigono di prendere in considerazione rapporti fra grandezze infinitamente piccole . In termini moderni : la velocità è il rapporto tra lo spazio percorso da un mobile e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo quando questo tempo tende a zero . L'accelerazione è l'analogo rapporto tra la variazione di velocità ed il corrispondente intervallo di tempo richiesto per tale variazione , quando questo tempo tende a zero . Il legame tra la meccanica ed il nascente calcolo infinitesimale si rivelerà sempre più stretto ed essenziale nei prosecutori delle ricerche galileiane . Il secondo tipo di problemi che diedero un grande stimolo all'introduzione dell'infinito (in grandezza e piccolezza) nella matematica , è ancora di natura geometrica , ma non più legato alla determinazione delle aree e dei volumi bensì a quella delle tangenti .

Gli antichi matematici greci avevano preso in considerazione solo pochi tipi di curve , ideando di volta in volta qualche metodo particolare per la determinazione delle tangenti alle principali fra esse (circonferenze , ellissi) .

Nel Seicento la creazione della geometria analitica ad opera di Cartesio e Fermat condusse ad un radicale ampliamento del concetto di curva e di conseguenza aprì la via al fondamentale problema della ricerca delle tangenti ad una curva generica . Furono sufficienti semplici considerazioni geometriche per comprendere l'analogia fra la tangente in un punto P della curva e le secanti che collegano tale punto con un altro punto Q della curva . L'intuizione stessa ci mostra che la secante PQ **si avvicina sempre più alla tangente , allorché il punto Q**

si muove verso P .Di qui a considerare la tangente come una secante passante per P e per un punto infinitamente prossimo a P , il passo è molto breve . Ma che significato potremo attribuire al concetto di punti infinitamente prossimi uno all'altro ? Furono soprattutto i matematici francesi (Fermat , Roberval , Pascal) ad interessarsi di questo problema . Il risultato di maggiore rilievo da essi ottenuto in tali indagini fu la comprensione dell'enorme importanza spettante , nello studio di una curva di equazione $y = f(x)$, al suo cosiddetto " triangolo caratteristico " , cioè al triangolo rettangolo avente per ipotenusa la corda che collega il generico punto P della curva ad un altro punto Q , situato sulla medesima curva e molto prossimo a P , ed avente per cateti l'incremento Δx subito dall'ascissa e quello Δy subito dall'ordinata nel passaggio da P a Q . le più elementari nozioni di trigonometria dimostravano che la posizione della retta secante PQ dipende dal rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ fra i due incrementi anzidetti ; onde segue che la posizione della tangente alla curva in P dipenderà dal limite di questo rapporto quando Q tende a P , cioè quando Δx tende a zero . Di qui l'importanza di sapere calcolare questo limite , cioè di sapere calcolare quella che oggi chiamiamo la derivata della funzione $f(x)$.

Mentre la ricerca delle lunghezze , delle aree e dei volumi è stata il punto di partenza per il calcolo integrale , il problema della determinazione delle tangenti è stato il punto di partenza per il calcolo delle derivate .

Come è composto il continuo ?

Galileo pensava di scrivere un libro De compositione continui . Non lo fece , ma il suo ardito pensiero era che il continuo fosse composto da infinite particelle " indivisibili " , prive di grandezza , ma non nulle .

L'idea di considerare un segmento , una superficie piana , un solido come composti rispettivamente da tutti i punti , tutte le linee (omnes lineae) , tutte le sezioni piane tra loro parallele , permise a Bonaventura Cavalieri e ad Evangelista Torricelli di ritrovare molte misure di aree e volumi di Archimede e di andare al di là delle scoperte del sommo matematico dell'antichità .

Il metodo degli indivisibili è però di portata assai più limitata del metodo del passaggio al limite , nel quale non si considerano " infinitesimi in atto " (gli indivisibili) ma infinitesimi in potenza (i differenziali) .

Tradotte in termini più moderni , le ricerche volte a determinare lunghezze , aree e volumi fanno parte del calcolo integrale , quelle dirette a determinare tangenti , punti di massimo o di minimo , velocità istantanee ed accelerazioni istantanee fanno parte del calcolo differenziale .

Risulta chiaro da quanto detto che i due calcoli trassero origine da problemi notevolmente diversi , pur caratterizzati tutti dall'applicazione di procedimenti infiniti . Si trattava ora di individuare il rapporto tra tali generi di calcolo , il che richiedeva come prima tappa il passaggio dal concetto di " integrale definito " di una funzione a quello di " integrale indefinito " e di comprendere poi che questo integrale è una nuova funzione , la cui derivata risulta uguale alla funzione integranda . (Teorema di inversione)

Il merito di avere chiarito questo rapporto spetta a Newton e Leibniz , i quali vennero considerati gli " inventori " dell'analisi infinitesimale , cioè del calcolo differenziale e del calcolo integrale . A volere essere rigorosi si deve riconoscere che , pur avendo dato contributi fondamentali alla sistemazione dell'analisi infinitesimale , né Newton né Leibniz riuscirono a darle un assetto logico soddisfacente (questo verrà raggiunto solo dai grandi analisti dell ' Ottocento ed in particolare da Cauchy) , sicché l'analisi infinitesimale conserverà per tutto il Settecento un carattere aperto a dubbi e perplessità . Newton elaborò il suo nuovo calcolo (chiamato calcolo delle flussioni) fra il 1665 **ed il** 1670 **quando era poco**

più che ventenne , ma non pubblicò che parecchi anni più tardi gli scritti dedicati all'esposizione delle proprie idee sull'argomento . Il linguaggio di Newton è diverso dal nostro in quanto egli adopera il termine fluente per indicare una funzione ed il termine flussione per indicare ciò che oggi siamo soliti chiamare derivata .
Tuttavia Newton enuncia con chiarezza le principali regole di derivazione (calcolo delle flussioni a partire dalle fluenti) e quelle di integrazione (calcolo delle fluenti a partire delle flussioni) , a determinare con esattezza il legame che intercede fra i due calcoli , ad impostare e risolvere alcune equazioni differenziali , a farne numerose applicazioni alla geometria ed alla meccanica . Leibniz cominciò ad interessarsi di analisi infinitesimale nel 1672 **, e poco dopo ebbe occasione di entrare in contatto con l'ambiente dei matematici inglesi (incluso lo stesso Newton) , contatto che lo stimolò a proseguire ed approfondire questo genere di indagini .**
La sua idea maggiormente innovatrice fu quella die estendere le ricerche , compiute dai matematici della generazione precedente , sul rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ **fra i cateti del " triangolo caratteristico " , al caso in cui il numeratore ed il denominatore di tale rapporto non siano più delle grandezze finite ma siano delle grandezze infinitesime .**
Questa ardita estensione lo condusse a sostituire al rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ **il rapporto differenziale** $\frac{dy}{dx}$ **. In verità Leibniz non ci dice esattamente che cosa siano i differenziali** dy **e** dx **, ma fornisce alcune regole precise per operare sul loro rapporto (cioè su quella che oggi chiamiamo la derivata di y rispetto ad x) . Si tratta di regole identiche a quelle stabilite da Newton per le flussioni e che dimostrano una pari utilità nella risoluzione dei problemi geometrici .**
In termini moderni potremmo dire che Leibniz determina il tipo di algebra applicabile ai differenziali , scoprendo che essa risulta per molti aspetti analoga alla

solita algebra valida per le grandezze finite . Ciò che distingue Leibniz da Newton non è soltanto la diversità delle notazioni da essi usate , ma la sicura fiducia che Leibniz nutre nel nuovo calcolo , fiducia che gli proviene dalla sua stessa concezione del mondo costituito da monadi prive di dimensioni (come i differenziali) . Dal calcolo delle derivate , passò ben presto a quello delle aree concepite come somme di indivisibili . Il segno di integrale , da lui introdotto per indicare l'operazione che ci porta da tali indivisibili alla misura della regione piana da essi riempita , ricorda da vicino l'iniziale del termine sommatoria . Una geniale intuizione lo indusse a comprendere che l'integrale di una variabile y , funzione della variabile indipendente x , non deve fare riferimento alla sola y ma anche al differenziale dx . E questo lo possiamo notare anche dal simbolo che Leibniz propose : $\int y dx$. Il simbolismi leibniziano si rivelò subito estremamente felice , e permise di dare al nuovo ramo della matematica un assetto sistematica assai soddisfacente . L'indiscutibile successo conseguito dalla formulazione leibniziana dell'analisi infinitesimale non fu esente da inconvenienti , in quanto favorì una certa confusione fra l'algebra degli infinitesimi e l'algebra delle grandezze finite , a tutto danno di una trattazione rigorosa dell'importante argomento . Solo nell ' Ottocento i problemi ad esso connessi vennero notevolmente chiariti con la dimostrazione che tutta l'**analisi infinitesimale classica** si fonda sul concetto di limite .

Newton

Nel settore della matematica la fama di Newton è soprattutto legata all'invenzione del **calcolo infinitesimale** . Le sistemazioni che Newton ideò per il **calcolo infinitesimale** furono due : il **calcolo delle flussioni** e quello delle **prime ed ultime ragioni** . Da un punto di vista storico va riconosciuto che anche il **metodo delle prime ed ultime ragioni** conteneva non poche novità . Se sotto l'aspetto meramente calcolistico esso non reggeva il confronto con l'agile metodo delle flussioni , sotto l’aspetto concettuale era ricco di idee altrettanto profonde . Per chiarire i concetti di **prima ed ultima ragione** è opportuno riportare quanto Newton ha scritto nella sezione prima del primo libro dei Principia : << **Si obietta che non esiste l’ultimo rapporto di quantità evanescenti in quanto esso , prima che le quantità siano svanite non è l’ultimo , e allorché sono svanite non c’è affatto . Ma con lo stesso ragionamento si può sostenere che non esiste la velocità ultima di un corpo che giunga in un certo luogo , dove il moto finisce . La velocità prima che il corpo giunga nel luogo non è l’ultima e quando vi giunge non c’è . La risposta è facile : per velocità ultima si intende quella con la quale il corpo si muove, non prima di giungere al luogo ultimo nel quale il moto cessa , né dopo , ma proprio nel momento in cui vi giunge : ossia con quella stessa velocità con la quale il corpo giunge al luogo ultimo e con la quale il moto cessa . Similmente per ultime ragioni delle quantità evanescenti si deve intendere il rapporto delle quantità non prima di diventare nulle e non dopo , ma quello col quale si annullano . Del pari , anche la prima ragione delle quantità nascenti è il rapporto col quale nascono . >>**

Quanto al calcolo delle flussioni , occorre ricordare che esso prende le mosse dalla seguente constatazione : che << **le linee vengono descritte , non mediante addizioni di parti , ma per moto continuo di punti , le superfici per moto continuo di linee , i solidi per moto continuo di superfici .** >>

Partendo da questa constatazione , Newton osserva che le quantità così generate variano , in tempi uguali , di più o di meno a seconda della maggiore o minore << **velocità di accrescimento** >> : a queste velocità egli attribuisce il nome di **flussioni** , mentre chiama **fluenti** le anzidette quantità descritte per moto continuo . Se indichiamo con $x, y, z, \cdots$ diverse **fluenti** , tutte funzioni del medesimo parametro (tempo convenzionale) , ad ogni valore di questo t corrisponderà un

valore per ciascuna fluente e corrisponderà pure un valore per la sua rispettiva flussione , che Newton denota con i simboli $\dot{x},\dot{y},\dot{z},\cdots$ **.**

Ne sorgeranno due problemi fondamentali : calcolare il valore delle flussioni quando si sappia che le fluenti sono legate una all'altra da certe equazioni algebriche ; e viceversa calcolare il valore delle fluenti quando siano note le relazioni esistenti fra le loro flussioni . Si tratta di due noti problemi che oggi indichiamo come calcolo delle derivate e calcolo degli integrali .

Newton riuscì ad enunciare con molta chiarezza le principali regole di derivazione e di integrazione ; scoprì i concetti di derivata seconda , terza , ecc. ; vide esattamente il legame che intercede fra derivazione ed integrazione (teorema di inversione) ; comprese che , mentre la flussione è perfettamente determinata allorché è data la fluente , la fluente ricavata da una flussione è invece determinata soltanto a meno di una costante additiva arbitraria .

Nelle opere << Tractatus de quadratura curvarum >> e << Methodus fluxionum >> Newton affronta e risolve le questioni che oggi chiamiamo di derivazione e di integrazione .

La ragione del nome flussione adottato da Newton sta nel modo come egli concepisce le quantità variabili, che egli chiama fluenti , cioè variabili allo scorrere del tempo . fluenti = funzione flussione derivata prima di una funzione Egli parte da due o più variabili $x,y,z,\cdots$ **ed introduce un parametro t , di cui** $x,y,z,\cdots$ **siano funzioni . Il parametro t dà una misura del tempo , ma il Newton ha cura di avvertire che si tratta di un tempo convenzionale e che , quando si prescinda dalle applicazioni , la misura del tempo è largamente arbitraria . Una stessa di quelle variabili , la x ad esempio , può essere assunta come parametro (cioè come variabile indipendente) e ciò fa il Newton quando gli convenga . Fissata la misura t del tempo , ad ogni istante corrisponde una velocità di variazione di ciascuna delle fluenti** $x,y,z,\cdots$ **.Queste velocità , che egli chiama**

flussioni , e denota con $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \cdots$ sono nel linguaggio e nella scrittura attuale (dovuta a Leibniz) , i coefficienti differenziali , o derivate , $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \cdots$

Le derivate seconde sono indicate con i seguenti simboli $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \cdots$. Più difficile ed interessante è il metodo inverso delle flussioni, o problema delle quadrature .

Il Newton dimostra che se si parte da un'area limitata da una curva nota , dall'asse delle ascisse e da due ordinate , di cui una variabile , la flussione o derivata dell'area rispetto all'ascissa è l'ordinata della variabile . Di qua egli deduce che la ricerca dell'area equivale alla ricerca di una funzione di cui la derivata è già nota (ricerca della funzione primitiva secondo il linguaggio moderno) . Nella deduzione viene tacitamente ammesso che la detta funzione rimanga determinata (a meno di una costante additiva arbitraria) dalla conoscenza della derivata . Con queste considerazioni il Newton viene a stabilire nettamente , in modo analogo a quello che oggi si segue , il carattere inverso delle operazioni di derivazione e di integrazione che avevano già intravisto , in forma meno chiara , Torricelli e Barrow . Rispetto a questi due matematici Newton ha il vantaggio di potere sfruttare , nella ricerca dell'integrale , i procedimenti di derivazione o calcolo delle flussioni che egli ha precedentemente esposto. Con tal mezzo Newton fa compiere un passo gigantesco al calcolo integrale.

Con Newton il calcolo infinitesimale è già costituito . Occorre tuttavia renderlo più accessibile ai cultori della matematica e più facilmente adoperabile con la scelta di una notazione adatta e con una esposizione ordinata dei principi su cui si fonda . Di siffatte questioni metodologiche il Newton , assorto da più gravi problemi , non si è mai preoccupato . sarà questo il compito di Leibniz che segnerà la via a tutte le trattazioni successive .