Il metodo di esaustione [1]

L'introduzione dell'infinito , nei ragionamenti matematici , presenta delle difficoltà gravi , sulle quali gli argomenti di Zenone avevano contribuito a richiamare l'attenzione di matematici e filosofi. Aristotele tuonava contro l'infinito attuale , e nessuno avrebbe osato di riconoscere come logicamente rigorosa una dimostrazione imperniata sull'infinito . da qui la necessità per i geometri greci , di possedere un metodo di ragionamento da potere utilizzare nelle questioni relative alle aree ed ai volumi e che evitasse o per lo meno mascherasse l'uso dell'infinito . Il merito di avere creato questo schema di ragionamento è universalmente riconosciuto ad Eudosso di Cnido (IV secolo A.C.) , con il quale i risultati delle prime ricerche infinitesimali furono definitivamente acquisite alla scienza . Il metodo di esaustione è , sostanzialmente , il metodo delle classi contigue ancora oggi usato da molti testi per il calcolo di lunghezze , aree , volumi . Il punto centrale di esso consiste nel dimostrare che due lunghezze o are o volumi " debbono " essere uguali perché assurdo che la loro differenza sia diversa da zero . la prova di questa assurdità si ottiene , non da un confronto diretto delle due figure che non è possibile , salvo ad immaginarle suddivise in una infinità attuale di parti (con tutti i rischi dell'infinito attuale) , ma dal confronto tra classi di altre figure (di lunghezza , di area o di volumi calcolabili) che racchiudono le due date con differenze via via

[1] Treccani : Vol XIX pag. 365 **Integrale , Calcolo** ; Boyer : Storia della matematica Pag. 108

minori : concezione questa che implica soltanto l'infinito potenziale , cioè l'illimitata proseguibilità delle classi di figure considerate .

Qui l'intento di Eudosso era manifestamente quello di evitare le antinomie connesse alla suddivisione di una figura in una infinità (attuale) di grandezze infinitamente piccole , antinomie che avevano provocato tante preoccupazioni a tutta la matematica pitagorica . Il metodo di cui si serve è contorto , artificioso , di scarsissima intuitibilità , ma logicamente impeccabile . sarà il metodo seguito , in questo genere di ricerche , da tutti i più grandi geometri fino alla scoperta del calcolo infinitesimale moderno . Se , per esempio ,volessimo provare che due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei rispettivi diametri dovremmo verificare che il rapporto dei cerchi non può essere maggiore né minore di quello dei quadrati dei loro diametri . Questo veniva fatto inscrivendo e circoscrivendo nel primo cerchio poligoni regolari di lati via via crescenti . Siccome con l'iscrizione , nel primo cerchio , dei poligono regolari di lati in numero continuamente crescente , si viene man mano ad esaurire tutta l'area del primo cerchio , a questo metodo fu dato il nome di metodo di esaustione . Tale metodo è essenzialmente fondato sulla riduzione all'assurdo della tesi contraria a quella che si deve provare e , come tutti i ragionamenti per assurdo , ha il torto di convincere ma non di illuminare . Esso , inoltre , richiede che il risultato . al quale si vuole pervenire , sia già conosciuto , e manca di quell'agilità e di quella possibilità di larghissime applicazioni che sono il vanto dei procedimenti schiettamente infinitesimali di cui oggi dispone l'analisi .

La dimostrazione per esaustione può farsi in diverse maniere . Il metodo utilizzato da Euclide è assai diverso da quello utilizzato da Archimede . Il procedimento euclideo potrebbe indirre un matematico moderno alla somma di una serie o al limite di successioni convergenti, quello archimedeo , al calcolo degli integrali definiti : entrambi sostituiscono il passaggio al limite (che interverrebbe in una trattazione moderna) colla riduzione all'assurdo . Nonostante ciò , l'uso del metodo di esaustione condusse i geometri greci , e specialmente Archimede a risultati notevolissimi e rese possibile la dimostrazione rigorosa di fatti acquisiti per vie non geometriche .

Il metodo meccanico di Archimede

Il genio di Archimede non poteva accontentarsi completamente di un metodo che , pur essendo impeccabile come procedimento di dimostrazione , non apriva la via alla scoperta di nuove verità e , superando ogni esistazione , affrontò l'infinito , per servirsene nelle sue ricerche . E così si costruì un procedimento di natura infinitesimale che risultò fondato su concetti che , molti secoli dopo , nel Rinascimento , dovevano ripresentarsi alle menti dei precursori del calcolo infinitesimale . Questo metodo della cui esistenza , fino ad un secolo fa , non si avevano prove sicure , traspariva da alcune dimostrazioni di Archimede , che erano rimaste in dominio della scienza . d'altra parte , certi risultati del siracusano , che apparivano delle vere divinazioni (ad esempio i teoremi sul volume e sulla superficie della sfera) , inducevano a ritenere che egli si fosse servito realmente di

mezzi di ricerca di gran lunga superiori a quelli che , dopo di lui , erano rimasti in possesso dei geometri . A confermare pienamente queste induzioni venne , nel 1906 , la scoperta fatta dal filologo Heiberg in un palinsesto della biblioteca Metochion di Costantinopoli , di uno scritto di Archimede indirizzato al matematico alessandrino Eratostene , e intitolato Metodo sui teoremi meccanici , in cui è esposto un metodo che , secondo lo stesso autore, serve a scoprire certe verità col mezzo della meccanica . Metodo , dunque , di scoperta e non di dimostrazione , giacché il grande geometra non avendo raggiunto una sistemazione critica della sua analisi infinitesimale , sentiva la necessità di chiedere al ragionamento per esaustione la sicura conferma dei risultati che , sulle aree , sui volumi , sui centri di gravità egli andava conquistando . Come risulta dal Metodo , Archimede riguardava ogni superficie come composta da tanti segmenti di retta , paralleli ad una data direzione che la riempiono tutta , e ognuno di tali segmenti era per lui l'elemento infinitesimale costitutivo della figura . Analogamente , un solido era considerato composto da tante superfici piane , fra loro parallele , riempenti tutto il volume e costituenti gli elementi infinitesimali del solido .

Le superfici ed i volumi erano così pensati come somme di tanti elementi infinitamente piccoli ; e le linee e le superfici , di cui Archimede riempiva le superfici ed i volumi , dovevano poi corrispondere a quegli indivisibili sui quali il cavalieri nel secolo XVII , costruì la sua geometria .

Con Archimede si ebbe la prima applicazione sistematica dei metodi infinitesimali ed i risultati brillantissimi da lui ottenuti sembrano avere esaurita , nel suo tempo , la potenza di tali metodi . I suoi continuatori immediati ed i suoi primi commentatori non aggiunsero nulla di importante alle sue scoperte , e questo mostra , molto probabilmente , che essi non avevano compreso tutta la profondità del pensiero del celebre Siracusano . Esponiamo in maniera elementare il metodo che usa Archimede per calcolare l'area di una figura piana a contorno curvilineo .

Archimede pensa la figura come costituita da una serie di fili pesanti , paralleli tra loro . immagina poi nel piano una leva PQ **, il cui fulcro sia un punto conveniente O di** PQ **, e fa cedere che se quei fili venissero trasportati parallelamente ed applicati in P , essi col loro peso farebbero equilibrio ad un'altra figura** S' **, di area nota , avente il baricentro in Q . dalla legge di equilibrio della leva che egli , nella sua prima opera , aveva scoperto e dimostrato , Archimede ricava il peso applicato in P , e quindi l'area S . La parte euristica del procedimento , per le nostre abitudini mentali di oggi , sta nell'avere sostituito la serie dei rettangoli approssimanti S , di cui Archimede avrebbe fatto uso in una dimostrazione rigorosa , mediante una serie di fili paralleli che costituiscono , per così dire , dei rettangoli infinitesimi .**

Nei **Teoremi di meccanica dedicati ad Eratostene** Archimede scrive quanto segue: **Spesso io scopersi con l'aiuto della meccanica proposizioni che ho poi dimostrato col mezzo della geometria , perché il metodo in questione non costituisce una vera dimostrazione . Giacché riesce più**

facile dopo che con tale metodo si sia acquisita una qualche conoscenza di ciò che esso comporta. **Per avvalorare quanto ha fatto , Archimede cita come esempio le dimostrazioni di Eudosso relative al cono ed alla piramide , che erano state facilitale dalle preliminari affermazioni , senza dimostrazioni , fatte da Democrito . Cerchiamo di fare capire qual è il metodo seguito da Archimede per fare vedere che l'area di un segmento parabolico è uguale ad** $\frac{1}{3}$ **dell'area del triangolo** ACF **o a** $\frac{4}{3}$ **dell'area del triangolo inscritto** ABC**. Consideriamo il segmento parabolico** ABC **, limitato dalla base** AC **perpendicolare all'asse della parabola** BD **.La tangente alla parabola nel punto C incontra l'asse** BD **nel punto E tale che** $EB = BD$ **(Questa era dimostrato negli elementi di Euclide ; in termini moderni abbiamo : la sottotangente** ED **di un qualsiasi punto C è dimezzata dal vertice B) . La parallela per A all'asse della parabola incontra la tangente** CE **nel punto F e la secante** BC **nel punto K .**

$FA // MO // ED \Rightarrow \quad KA = KF \quad , \quad ON = NM$

Prolunghiamo CK **di un segmento** $KH = Kc$ **.**

Conduciamo per un qualsiasi punto O preso sulla base AC **la perpendicolare ad** AC **. Tale perpendicolare incontra la parabola nel punto O , la secante nel punto N e la tangente nel punto M e si ha** $MN = NO$ **.**

Sussiste la seguente proporzione : $CA:AO=MO:OP$ **(proporzione dimostrata negli elementi di Euclide ; proprietà della parabola)**

Per il teorema di Talete sussiste la seguente proporzione : $CA:AO=CK:KN$ **.** **dall'uguaglianza dei primi membri delle due proporzioni deduco la seguente proporzione :** $CK:KN=MO:OP \Rightarrow \boxed{HK:KN=MO:OP}$

Le seguenti osservazioni ci consentiranno di pervenire alle conclusioni di Archimede .

1) Considero CH **come una leva di fulcro F. Per avere equilibrio bisogna applicare, da parte opposta rispetto al fulcro K , pesi inversamente proporzionali ai rispettivi bracci .**

2) Considero i segmenti MO **ed** OP **come fili omogenei pesanti , con pesi proporzionali alle rispettive lunghezze . In particolare possiamo considerare il loro peso uguale alla loro lunghezza . . Il punto medio N del segmento pesante** MO **è il suo baricentro . Similmente il baricentro del segmento pesante** PO **è il suo punto medio .**

3) Trasporto parallelamente a se stesso il segmento pesante PO **nella posizione** TG **(** $TG = OP$ **) in modo che H sia il suo baricentro (** $HG = HT$ **, H deve essere il punto medio del segmento** $TG = OP$ **) .**

In base a queste osservazioni preliminari posso affermare che il segmento $TG = OP$ **farà equilibrio al segmento** MO **(lasciato dove si trova col suo baricentro coincidente col suo punto medio N) in virtù della proporzione**

$$\boxed{HK:KN=MO:OP}$$

dimostrata in precedenza . (Condizione di equilibrio per una leva di primo genere)

Concludendo possiamo affermare che il segmento pesante OP **, applicato nel suo baricentro all'estremo H della leva** CH **equilibra l'altro segmento pesante** MO **applicato nel suo baricentro in un altro punto N della leva in quanto è valida la seguente proporzione :** $\boxed{HK:KN=MO:OP}$

Ora , continua Archimede , il triangolo CFA **è composto da segmenti come** MO **; il segmento parabolico è composto da segmenti ottenuti nella parabola come è stato ottenuto** PO **. Quindi il triangolo** FCA **, rimanendo al suo posto e col suo baricentro applicato in un opportuno punto W della leva , farà equilibrio rispetto al fulcro K , al segmento parabolico trasportato col suo baricentro in H .**

Vediamo adesso come è possibile individuare il punto W sulla leva CH **. Il baricentro di un triangolo coincide con l'intersezione delle tre mediane del triangolo . Esso gode della proprietà di dividere ciascuna mediana in due parti di cui quella che contiene il vertice è il doppio dell'altra .**

CK **è la mediana del triangolo** ACF **rispetto al lato** AF **.Il baricentro W del triangolo** ACF **è il punto W della mediana** CK **tale che risulti** $CW = 2WK$ **e quindi :** $CK = 3KW$ **.**

Poiché il triangolo FAC **rimanendo dove si trova col suo baricentro nel punto W fa equilibrio , nella leva di fulcro K , al segmento parabolico** ABC **posto intorno al baricentro H .**

Applicando la proporzione che regola l'equilibrio della leva di primo genere abbiamo: $S(ACF):S(APBCDOA) = HK:KW = 3:1$

Concludendo possiamo affermare che :

1) il triangolo FAC **è il triplo del segmento parabolico** ABC

2) che il segmento parabolico ABC **è uguale ai** $\frac{4}{3}$ **del triangolo** ABC **. Infatti il triangolo** FAC **è quadruplo del triangolo** ABC **in quanto risulta** $FK = KA$ **e**

$$AD = DC \quad \frac{S(ACK)}{S(BCD)} = \frac{AC^2}{DC^2} = \frac{4DC^2}{DC^2} = 4 \quad S(ACK) = 4 \cdot S(BCD)$$

E così Archimede , avvalendosi di considerazioni meccaniche sui baricentri , trasforma l'integrale incognito (area del segmento parabolico) in un integrale noto (area di un triangolo).

Così servendosi del suo metodo meccanico , Archimede supera le semplici considerazioni infinitesimali su cui si basa il metodo di esaustione ed arriva a vere e proprie integrazioni . benché Archimede non lo dica esplicitamente , le rette ed i piani di cui fa uso sono considerati come aventi una certa larghezza o un certo spessore che , si può dire , diventa il dx **del calcolo moderno quando queste rette e questi piani considerati nel loro insieme (in un certo senso nella loro infinità numerica) arrivano ad una estrema approssimazione con rette e piani matematici . la fama di Archimede è soprattutto legata alle sue mirabili scoperte geometriche , rigorosamente dimostrate con l'ausilio del metodo di esaustione . già si è detto che le scoperte di Archimede in materia di aree e di volumi vennero da lui**

rigorosamente dimostrate con l'ausilio del metodo di esaustione. Col trascorrere dei secoli furono anzi assunte , da tutti i matematici , quali esempi tra i più caratteristici di applicazione logicamente impeccabile di tale metodo . Si giunse , così , a raffigurare il loro autore come intransigente campione del più strenuo rigorismo e quindi avversario dichiarato di tutti coloro che , di fronte alla lentezza e pesantezza del metodo di esaustione , proponevano il ricorso a più rapidi procedimenti intuitivi (basati sulla scomposizione delle aree in infinite corse , dei volumi in infiniti fogli infinitamente sottili) . Orbene , la realtà storica fu ben diversa ! In una preziosa lettera ad Eratostene ritrovata solo all'inizio del secolo scorso , il grande siracusano spiega con inequivocabile chiarezza come egli si avvalga , si , del metodo di esaustione per procurare alle proprie scoperte una base logicamente sicura , ma preferisca invece ricorrere a metodi intuitivi (di carattere misto : matematico e meccanico) nella fase inventiva . Resta dunque da escludere che sia stato un puro e pedante rigorista . Egli fu qualcosa di molto più complesso ; e cioè fu insieme rigorista ed intuizionista , riassumendo in sé l'indirizzo eudossiano basato sul metodo di esaustione e quello democriteo basato invece sulla infinita decomposizione delle figure geometriche. Questa capacità di valersi simultaneamente di due metodi diversi (uno per la fase dimostrativa , l'altro per quella inventiva) dimostra , meglio di ogni altro fatto , l'agilità mentale di Archimede , il suo atteggiamento veramente nuovo di fronte alla scienza , considerata come qualcosa di vivo , non come un ammasso di vincoli e catene.

Anziché il pedante nemico dell'intuizione , noi troviamo in lui il matematico dell'antichità che si avvalse di essa con più coraggiosa libertà (sia pure nei limiti della fase inventiva) ; anziché il logico meticoloso, schiavo della propria esigenza di rigore , troviamo in lui il primo consapevole assertore dei diritti della genialità creatrice . Niente mentalità accademica dunque , ma libero uso di tutte le risorse conoscitive che sono in noi . Di fronte ad una personalità di questo genere ogni confusione con il tipo di dotto sembra ingiustificabile e fuori luogo .

La fortuna di un ritrovamento

Il Metodo , l'opera che più di duemila anni fa conteneva risultati così meravigliosi , venne recuperata quasi per caso nel 1906 **. L'infaticabile filologo danese Heiberg aveva sentito dire che c Costantinopoli si conservava un palinsesto di contenuto matematico. (Un palinsesto è una pergamena sulla quale ciò che vi era originariamente scritto è stato cancellato solo imperfettamente e sostituito con un nuovo testo diverso) Un esame accurato gli mostrò che il manoscritto originale doveva contenere qualche testo di Archimede : per mezzo di fotografie egli fu in grado di leggere gran parte del testo archimedeo . Il manoscritto era formato da** 185 **fogli , la maggior parte di pergamena , ma alcuni di carta , con il testo archimedeo copiato da una mano del X secolo . Era stato fatto un tentativo , fortunatamente non molto riuscito , di cancellare questo testo allo scopo di usare la pergamena per un Eucologion (una raccolta di preghiere e liturgie usate nella Chiesa ortodossa orientale) scritto verso il XIII secolo . Il testo matematico**

conteneva tutto il trattato Sulla sfera e sul cilindro , gran parte dell'opera Sulle spirali , una parte della Misurazione del cerchio e dell ' Equilibrio dei piani , e il trattato Sui galleggianti , che si trovano tutti conservati anche in altri manoscritti . Ma , cosa più importante , il palinsesto ci fornisce l'unica copia esistente de Il metodo . In un certo senso il palinsesto rappresenta un simbolo del contributo del Medioevo : l'intenso interesse per questioni religiose aveva quasi spazzato via una delle opere più importanti del più grande matematico dell'antichità ; tuttavia , in ultima istanza , fu l'erudizione medioevale che inconsapevolmente conservò questa , e molte altre opere , che altrimenti avrebbero potuto andare perdute .