

La Relatività Ristretta di Einstein

di Germano Germani

È più difficile disintegrare un pregiudizio che un atomo.

(A. Einstein)

.....

stava all'erta, il fucile pronto. Lontano cinquantamila anni-luce dalla patria, a combattere su un mondo straniero e a chiedersi se ce l'avrebbe mai fatta a riportare a casa la pelle.

E allora vide uno di loro strisciare verso di lui. Prese la mira e fece fuoco.

Il nemico emise quel verso strano, agghiacciante, che tutti loro facevano, poi non si mosse più.

Il verso e la vista del cadavere lo fecero rabbrivire. Molti, col passare del tempo, s'erano abituati, non ci facevano più caso, ma lui no. Erano creature troppo schifose, con solo due braccia e due gambe, la pelle d'un bianco nauseante, e senza squame (F. Brown).

Ecco un bellissimo esempio di quello che può definirsi *relativismo psicologico*; naturalmente questo esempio nulla ha a che vedere con la teoria della relatività, e tuttavia quante persone, anche di una certa cultura, sarebbero indotte a concludere che *tutto è relativo*, magari citando a testimonianza proprio A. Einstein. Il fine che si propone A. Einstein è invece proprio il contrario, in quanto con la sua teoria egli riesce a stabilire quali delle nostre conoscenze hanno il valore di conoscenza scientifica, in quanto indipendenti dal sistema di riferimento nel quale vengono osservate.

Un pò di storia.

Le leggi dell'elettromagnetismo, sintetizzate nelle quattro equazioni di Maxwell, non sono consistenti con il principio di relatività di Galileo.

In particolare la IV equazione sembra presupporre l'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato, rispetto al quale

le onde elettromagnetiche (quindi anche la luce), si propagano con velocità $c=300000$ km/sec. Perciò la misura della velocità della luce in un particolare sistema di riferimento consentirebbe di stabilire lo stato di moto assoluto o di quiete di quel sistema.



Galileo verifica il principio di relatività classica all'interno di una nave che si muove di moto rettilineo uniforme. illustrazione del pittore Manlio Truscia

Afferma Galileo nell'enunciare il suo principio di relatività:

Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coperta di alcun gran naviglio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi dei pascetti; suspendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quegli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice a pié giunti, eguali spazi passerete verso tutte le parti.

Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre 'l vassello sta fermo non

debbano succedere così, fate muovere la nave con quanta si voglia velocità, ché (purché il moto sia uniforme e non fluttuante...) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina oppure sta ferma...

Le trasformazioni di Galileo sono espresse dalle equazioni (relatività galileiana):

$$x' = x + vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

dove x, y, z, t sono le coordinate nel sistema di riferimento O , mentre x', y', z', t' sono le coordinate dello stesso punto nel sistema O' . I due sistemi di riferimento sono in movimento l'uno rispetto all'altro con velocità uniforme v . Si fa inoltre l'ipotesi che il moto avvenga nella direzione dell'asse x , per cui y e z restano invariate e che nell'istante $t=0$ le due origini coincidano. Il tempo invece è lo stesso nei due sistemi di riferimento indipendentemente dalla direzione del moto e dalla velocità. Dalle equazioni segue la legge di composizione delle velocità:

$$u' = u + v$$

Il famoso esperimento di Michelson e Morley negò la possibilità di dedurre lo stato di moto della Terra dalla variazione della velocità della luce nei diversi sistemi di riferimento. La luce si propaga in tutte le direzioni sempre con la stessa velocità. In altre parole il principio di relatività di Galileo conserva validità anche se gli animalletti, il vaso d'acqua ecc. di Galileo vengono sostituiti con altrettanti fenomeni elettromagnetici.

Allora le equazioni della relatività galileiana, in particolare la legge di

composizione delle velocità, non possono valere per i fenomeni elettromagnetici. Ci troviamo di fronte a tre possibilità:

- 1) Esiste un principio di relatività per la meccanica ma non per l'elettrodinamica; le leggi dell'elettromagnetismo valgono solo in un sistema di riferimento privilegiato, ed è in questo sistema che la luce viaggia con velocità c .
- 2) Il principio di relatività è valido sia per la meccanica che per l'elettricità, ma le equazioni di Maxwell devono essere modificate;
- 3) Il principio di relatività è valido, ma sono le leggi della meccanica che devono essere modificate.

Einstein scelse la terza via e, sulla base di due postulati, riformulò le equazioni della meccanica in quella che venne definita *la rivoluzione relativistica*.

I postulati.

- il principio di relatività è valido per tutti i fenomeni fisici, sia per quelli meccanici che per gli elettromagnetici (il principio di relatività galileiana viene esteso a tutti i fenomeni);
- la velocità della luce nel vuoto è la stessa per ogni osservatore in un sistema di riferimento inerziale, qualunque sia il moto relativo tra la sorgente che la emette e l'osservatore.

Il postulato della costanza della velocità della luce (la velocità di propagazione della luce è sempre la stessa indipendentemente da quella della sorgente che la emette), comporta dei fatti abbastanza curiosi. Ad esempio un'automobile procede con velocità v e viene superata da una seconda automobile che procede con velocità $2v$. Nel preciso istante in cui avviene il sorpasso la prima automobile accende i fari; un secondo dopo l'accensione dei

fari la luce si trova a distanza c da entrambe le automobili. Come può essere che nello stesso istante il raggio di luce si trovi alla stessa distanza da punti diversi? Infatti la prima automobile ha nel frattempo percorso la distanza v , la seconda ha percorso distanza $2v$; secondo la fisica classica la distanza tra il raggio di luce e la prima automobile dovrebbe essere $c-v$, mentre dalla seconda la distanza dovrebbe essere $c-2v$.

Se il postulato della costanza della velocità della luce è esatto, allora c'è un solo modo per spiegare una simile contraddizione, ed è di supporre che il conteggio del tempo sia influenzato dal moto; in altre parole, un secondo (inteso come intervallo di tempo) di un osservatore a terra non è lo stesso di quello di un osservatore in moto.

Il fine di Einstein è dunque quello di sostituire i concetti della fisica classica, con altri più rispondenti alle nuove esigenze. Uno di questi è l'intervallo spazio-temporale: non reggono più i concetti di spazio assoluto e di tempo assoluto; questi due enti vengono sostituiti da un unico ente, lo *spazio-tempo*; spazio e tempo infatti sono grandezze che si influenzano vicendevolmente.

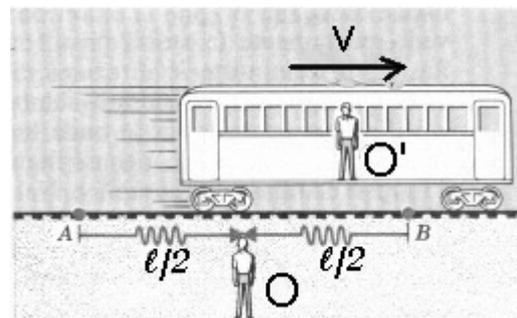
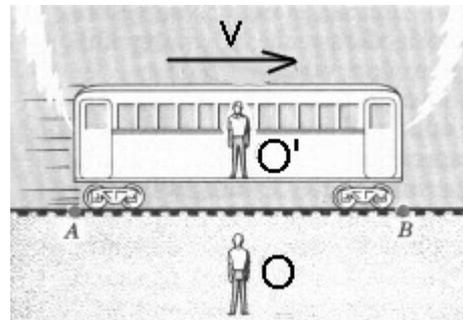
Per comprendere il significato di quanto detto, riconsideriamo il concetto di simultaneità.

Critica al concetto di simultaneità.

Nella fisica classica non sorge alcun dubbio quando si devono definire *simultanei* due eventi. Il postulato della costanza della velocità della luce mette in crisi questa certezza.

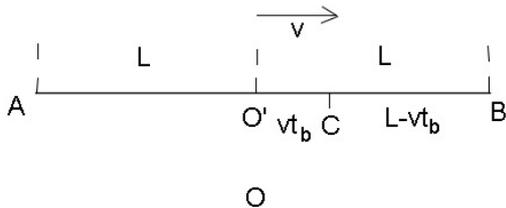
Consideriamo il seguente *Gedankenexperiment* (esperimento ideale, nella teoria della relatività abbondano gli esperimenti ideali); due impulsi luminosi partono contemporaneamente, visti da terra, dai due estremi A e B di un vagone; l'osservatore O , fisso a terra

(riferimento inerziale), e l'osservatore O' , solidale con il vagone, si trovano proprio a metà strada dagli estremi e non hanno difficoltà ad ammettere la simultaneità dei due avvenimenti quando il vagone è fermo. Ripetiamo lo stesso esperimento con il vagone in moto rettilineo ed uniforme rispetto al riferimento terrestre (entrambi i riferimenti sono quindi inerziali); quando O' passa all'altezza di O partono i due impulsi di luce; l'osservatore O vede i due lampi contemporaneamente ma non così O' .



Il segnale proveniente da B percorre uno spazio minore rispetto a quello che proviene da A perché nel frattempo O' è andato incontro al segnale di destra e si è allontanato da quello di sinistra. Perciò O' vedrà prima il segnale che proviene da B ; egli sa di trovarsi a metà strada tra A e B , sa di trovarsi in un sistema di riferimento inerziale e sa che la velocità della luce è sempre uguale a c indipendentemente dal moto delle sorgenti, perciò O' conclude che se vede prima il segnale proveniente da B , il

motivo è che questo segnale è partito prima. I due eventi non sono quindi simultanei per O' mentre continuano ad esserlo per O . Facilmente ci possiamo altresì convincere che osservatori diversi posti tra A e B , giudicheranno in maniera diversa la successione dei segnali. La conclusione però è che nessuno degli osservatori si sbaglia in quanto *realmente* per O' il segnale proveniente da B precede quello proveniente da A e non c'è nessuna possibilità di convincerlo del contrario come invece sarebbe possibile se al posto dei segnali luminosi si usassero segnali con velocità inferiore a c , ad esempio due segnali acustici emessi da A e da B . Sia infatti $2L$ la distanza tra A e B , v_s la velocità del suono e v la velocità del vagone.



Indichiamo con t_b il tempo impiegato dall'impulso B per pervenire all'osservatore che nel frattempo si è spostato in C ; lo spazio percorso da questo impulso è $L - vt_b$, ma la velocità del segnale è in questo caso $v_s - v$. Pertanto

$$L - vt_b = (v_s - v)t_b$$

da cui

$$t_b = \frac{L}{v_s}$$

nello stesso intervallo di tempo lo spazio S percorso dall'impulso A (che procede alla velocità $v_s + v$) è:

$$S = (v_s + v) \frac{L}{v_s} = L + vt_b$$

in conclusione quindi i due segnali giungono contemporaneamente in C in modo che entrambi gli osservatori li giudicheranno simultanei. È confermato quindi che la perdita della simultaneità, nel caso dei segnali di luce, è dovuta all'ipotesi che nessun segnale può avere velocità superiore a quella della luce nel vuoto.

Ma allora, si potrà obiettare, se vi sono posizioni dalle quali è possibile vedere un evento successivo precedere uno antecedente, sarà anche possibile osservare l'effetto prima della causa?

Questa eventualità è impossibile; supponiamo infatti, per fissare le idee, che il segnale di A venga emesso prima (anche per l'osservatore terrestre), ed il segnale di B venga emesso dopo un intervallo di tempo Δt ; se in questo intervallo di tempo il primo segnale ha percorso l'intera distanza AB , nessun osservatore giudicherà il segnale di B antecedente o simultaneo rispetto ad A ; l'ordine degli eventi è lo stesso per tutti gli osservatori. Se il segnale B è generato da A , ad esempio se B emette il suo segnale quando viene raggiunto dal segnale A , nessun osservatore potrà giudicare che sia il segnale B a precedere A . L'ordine degli eventi può essere diverso solo quando la distanza tra A e B è maggiore della distanza percorsa dalla luce nell'intervallo di tempo Δt che intercorre tra i due eventi misurato da un qualsiasi osservatore in un sistema di riferimento inerziale.

A questo punto però le trasformazioni di Galileo non sono più valide; occorre un nuovo gruppo di equazioni. Queste equazioni già esistevano in quanto erano state formulate da Lorentz come spiegazione del fallimento dell'esperimento di Michelson e Morley.

Le trasformazioni di Lorentz.

Le trasformazioni di Lorentz mettono in relazione le coordinate spaziali e temporali misurate da due osservatori in

moto l'uno rispetto all'altro con velocità costante v ; entrambi i sistemi di riferimento sono inerziali. Supponendo, per semplicità, che il moto avvenga nella sola direzione dell'asse x , in modo che le coordinate y e z restino invariate, le equazioni della trasformazione sono:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y ; z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

le coordinate accentate si riferiscono ad un osservatore, quelle non accentate all'altro, c indica la velocità della luce. Si vede subito che se v è molto minore di c le trasformazioni di Lorentz coincidono con le equazioni di Galileo, tuttavia le prime non sono una semplice generalizzazione delle seconde in quanto ci dicono qualcosa in più sul piano concettuale: sanciscono infatti la esistenza di una unica entità *spazio-tempo* in cui lo spazio ed il tempo sono interdipendenti mentre nella fisica classica spazio e tempo sono entità separate ed indipendenti l'una dall'altra. Ad ogni modo Lorentz propose le suddette equazioni, accogliendo il suggerimento del fisico irlandese G.F. Fitzgerald, come ipotesi *ad hoc* per giustificare il risultato del famoso esperimento di Michelson e Morley; Fitzgerald aveva osservato che ammettendo la contrazione della lunghezza nel senso del moto di un fattore $\lambda = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ i risultati dell'esperimento trovavano una spiegazione. La apparente assurdit , di fronte al senso comune, delle implicazioni conseguenti a tale gruppo di

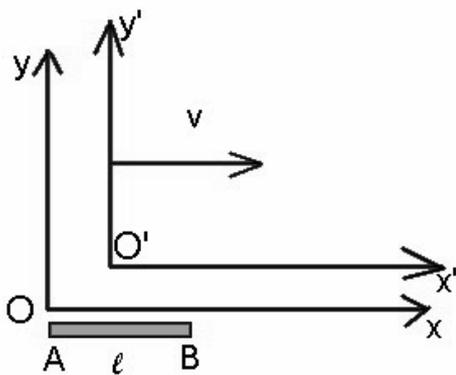
trasformazioni, avevano indotto Lorentz ad abbandonare questa speculazione. Einstein invece dimostra che tali equazioni sono conseguenza necessaria dei postulati da lui stesso indicati. Ma quali sono le sorprendenti implicazioni deducibili dalle trasformazioni di Lorentz? Gi  si   visto che il concetto di simultaneit  non regge pi ; ma questo vuol dire anche che non pu  esistere un tempo universale uguale per tutti gli osservatori in qualunque parte dell'universo, quale invece era ipotizzato nella fisica classica.



Albert Einstein ; illustrazione del pittore Manlio Truscia

Contrazione delle lunghezze.

La relativit  della simultaneit  ha come conseguenza la contrazione delle lunghezze. Consideriamo un regolo AB in quiete nel riferimento O e di lunghezza l , misurata in questo sistema di riferimento. Per semplicit  supponiamo che l'estremo A coincida con l'origine O .



Misuriamo il tempo a partire dall'istante in cui O e O' coincidono, pertanto $t_1 = t'_1 = 0$; $x_1 = x'_1 = 0$. O' si muove con velocità uniforme nella direzione dell'asse x e quando raggiunge l'estremo B dell'asta il suo orologio segna t' mentre l'orologio di O segna $t = \ell/v$. Per O' la lunghezza dell'asta è vt' (v è la velocità con la quale O' vede scorrere il regolo verso sinistra). Pertanto:

$$\begin{aligned}
 \ell' = vt' &= v \frac{t - \frac{v}{c^2} \ell}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = v \frac{\frac{\ell}{v} - \frac{v}{c^2} \ell}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \\
 &= \ell \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \ell \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}
 \end{aligned}$$

dunque l'osservatore O' vedrà l'asta AB contratta del fattore

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

per il principio di relatività O vedrà un'asta uguale alla prima ma solidale con O' , contratta dello stesso fattore. Le dimensioni perpendicolari alla direzione del moto non subiscono invece contrazione, infatti le coordinate y e z restano costanti.

Dilatazione del tempo

La dilatazione del tempo richiede una più accurata argomentazione. Consideriamo un orologio molto particolare, formato da due specchi paralleli posti ad esempio alle estremità di un tubo di lunghezza D (fig.1).

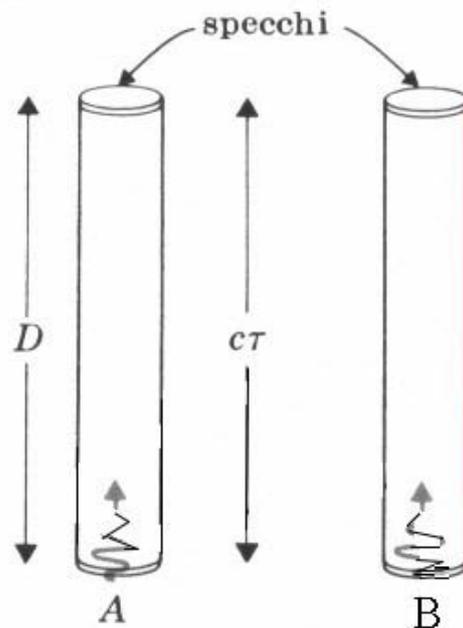


Figura 1: Da A e B partono contemporaneamente due raggi di luce; se A e B sono entrambi fermi, il tempo impiegato dalla luce a raggiungere lo specchio superiore nei due casi è lo stesso. (Tratta da Orear: Fisica generale vol. II - Zanichelli)

Un raggio di luce parte dallo specchio inferiore, viene riflesso da quello posto superiormente e torna indietro. Assumiamo come unità di misura l'intervallo di tempo che intercorre tra una riflessione e l'altra; tale intervallo di tempo è $\tau = D/c$. Consideriamo ora un secondo orologio perfettamente uguale al primo e con esso sincronizzato; questo secondo orologio, mantenendosi parallelo al primo, si sposta, ad esempio, verso destra con velocità v .

Poiché la sua lunghezza si mantiene perpendicolare alla direzione del moto,

non vi è contrazione della lunghezza che quindi rimane invariata anche per un osservatore O solidale con il primo orologio.

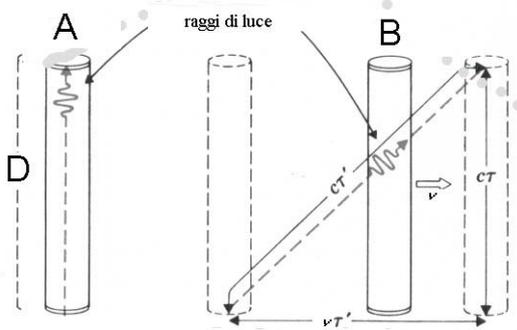


Figura 2: Adesso B si muove verso destra con velocità v ; poiché lo spostamento è perpendicolare alla lunghezza, non vi è contrazione. (Figura tratta da Orear op. citata)

Il raggio di luce dunque nel secondo caso deve percorrere una distanza maggiore e poiché la velocità è la stessa per entrambi gli osservatori, ne deriva che l'unità di misura del tempo di O' è maggiore di quella di O . Sia τ' tale unità di misura; applicando il teorema di Pitagora (v. figura), si ricava

$$(c\tau')^2 = (v\tau')^2 + (c\tau)^2$$

$$(c^2 - v^2)\tau'^2 = c^2\tau^2$$

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dunque l'unità di misura del tempo di O' è aumentata del fattore $1/\lambda$ rispetto all'analogia unità di misura di O .

Dal punto di vista invece della fisica classica il ragionamento sarebbe questo: la somma vettoriale delle velocità, nel caso B, dà come risultante, in modulo:

$$c' = \sqrt{c^2 + v^2}$$

lo spazio percorso è:

$$D' = \sqrt{D^2 + v^2\tau^2} = \sqrt{c^2\tau^2 + v^2\tau^2} = \tau\sqrt{c^2 + v^2}$$

il tempo impiegato quindi è:

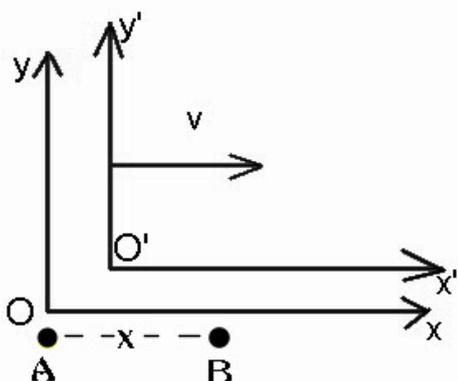
$$\tau' = \frac{D'}{c'} = \frac{\tau\sqrt{c^2 + v^2}}{\sqrt{c^2 + v^2}} = \tau$$

Per stabilire quindi se la fisica classica deve essere sostituita dalla nuova fisica relativistica occorre una prova sperimentale. Siamo qui di fronte infatti a due modelli interpretativi della realtà fisica che conducono a risultati diversi; solo una prova sperimentale sarà in grado di dirci quale dei due deve essere conservato.

Ma allora se le distanze sono relative, gli intervalli di tempo sono relativi, tutti i moti sono relativi, qual è la validità della conoscenza fisica? Cosa si salva nella miriade di moti relativi che ci circonda?

L'intervallo spazio-temporale.

Sia L la distanza tra i due eventi e t il tempo impiegato dalla luce a percorrerla, allora $L=ct$; se per un secondo osservatore la suddetta distanza è L' e il tempo impiegato dalla luce a percorrerla è t' , deve comunque essere $L'=ct'$ in quanto la velocità della luce c è la stessa per entrambi gli osservatori; ma allora $L/t=L'/t'$. Questo ci fa capire che anche nella teoria della relatività esistono grandezze indipendenti dal particolare sistema di riferimento inerziale. Una di queste è l'intervallo spazio-temporale.



L'osservatore O registra il verificarsi, a distanza di tempo t , di due eventi A e B in due luoghi posti a distanza x l'uno dall'altro. Per semplificare il ragionamento supponiamo che l'evento A si verifichi al passaggio di O' per O e quindi nell'istante zero per entrambi gli osservatori. Quindi per O l'evento B si verifica dopo un tempo t a distanza x da A ; per O' l'evento B si verifica a distanza x' da A dopo un intervallo di tempo t' . Allora:

$$\begin{aligned}
 x'^2 - c^2 t'^2 &= \\
 &= \frac{x^2 + v^2 t^2 - 2vxt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - c^2 \frac{t^2 + \frac{v^2}{c^4} x^2 - 2\frac{v}{c^2} tx}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \\
 &= \frac{x^2 + v^2 t^2 - 2vxt - v^2 t^2 - \frac{v^2}{c^2} x^2 + 2vxt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \\
 &= \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x^2 - c^2 t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = x^2 - c^2 t^2
 \end{aligned}$$

dunque l'espressione $x^2 - c^2 t^2$ è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz; più in generale è invariante l'espressione

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

questa espressione prende il nome di *intervallo spazio-temporale*; il suo valore è indipendente dal particolare sistema di riferimento. Se si trova che in un sistema di riferimento inerziale

l'intervallo spazio-temporale è positivo, allora il suo valore continuerà ad essere positivo in qualsiasi altro sistema di riferimento in moto rispetto al primo di moto rettilineo ed uniforme. Un intervallo spazio-temporale positivo si chiama intervallo spaziale, e tale è senz'altro il caso di due eventi simultanei per un osservatore inerziale e che si verificano in posti diversi (per questo osservatore $dt=0$); in questo caso l'ordine con cui si verificano gli eventi non è determinato essendo relativo al particolare sistema di riferimento.

Se invece l'intervallo spazio-temporale è negativo, esso prende il nome di intervallo temporale; tale, ad esempio, è il caso di due eventi che si verificano nello stesso posto in tempi diversi; in questo caso l'ordine con cui si manifestano i due eventi è univocamente determinato e non dipende dal particolare sistema di riferimento.

Analogo è il caso dell'intervallo spazio-temporale uguale a zero; in questo caso infatti la distanza tra i due eventi è proprio uguale alla distanza percorsa dalla luce nell'intervallo di tempo che li separa; per tutti gli osservatori l'intervallo di luce è uguale a zero.

Nessun evento può propagarsi ad una velocità superiore alla velocità della luce; se così fosse esisterebbe certo qualche particolare osservatore inerziale in grado di vedere l'effetto prima della causa. Ad esempio se gli effetti della gravitazione si propagassero con velocità maggiore di quella della luce potrebbe verificarsi il fenomeno qui di seguito descritto.

Poiché la scomparsa di un pianeta del sistema solare determinerebbe qualche variazione nell'orbita della Terra, noi assisteremmo prima al mutamento dell'orbita e poi, forse, alla causa da cui è stata generata. Se ciò non è possibile è proprio perché gli effetti gravitazionali

si propagano con velocità al più uguale a quella della luce.

Come variano le leggi della meccanica.

La composizione delle velocità.

Un corpo si muove verso destra con velocità u , un secondo corpo procede in direzione opposta con velocità v ; qual è la velocità u' del primo oggetto valutata da un osservatore posto sul secondo? La fisica classica risponde $u'=u+v$. Per la fisica relativistica invece:

$$1) \quad u' = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

in tal modo:

$$\lim_{u \rightarrow c} u' = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c$$

la velocità risultante non può mai eguagliare c , e questo è vero non solo quando u tende a c ma anche se contemporaneamente è v tendente a c , come è facile verificare. Due ipotetici osservatori su due raggi di luce che si propagano in versi opposti lungo la stessa direzione, un secondo dopo il loro incontro si troverebbero a distanza c .

Come si giustifica la legge di composizione delle velocità?

Dalle equazioni di Lorentz si ricava:

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x + vt}{t + \frac{v}{c^2}x}$$

dividendo numeratore e denominatore del secondo membro per t si ricava appunto la 1).

La conservazione della quantità di moto.

Una grandezza si dice invariante rispetto ad un gruppo di trasformazioni se il suo valore numerico non varia; tale è appunto

l'intervallo spazio-temporale; una relazione si dice covariante rispetto ad un gruppo di trasformazioni se la sua forma algebrica non varia (il suo valore numerico invece può variare da un sistema di riferimento ad un altro).

Il principio di conservazione della quantità di moto, nella sua formulazione classica, è covariante rispetto a trasformazioni galileiane, ma non lo è rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Ma il primo postulato della teoria della relatività afferma che tutte le leggi fisiche devono essere le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Se dunque il suddetto principio deve soddisfare la relazione di covarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz, la sua espressione algebrica deve essere opportunamente modificata.

Consideriamo, al solito, due sistemi di riferimento, il primo di origine O , che supporremo in quiete, il secondo di origine O' in moto rispetto ad O con velocità uniforme v . Due particelle, una nel sistema O e l'altra in O' hanno la stessa massa m_0 e procedono con velocità u e u' rispettivamente (la prima misurata da O e la seconda da O') perpendicolari rispetto alla direzione di v . Le due particelle si urtano centralmente in modo che le velocità u_1 e u'_1 dopo l'urto siano ancora perpendicolari rispetto alla direzione di v . Come valuta l'osservatore O il moto della particella in O' ? Egli non nota nessuna differenza per quanto riguarda le lunghezze, infatti la contrazione delle lunghezze si manifesta nella stessa direzione di v ma le particelle si muovono, sia prima che dopo l'urto, in direzione perpendicolare a v . Quello che accade invece è che l'orologio di O' segna il tempo più lentamente del suo, perciò O valuta che la velocità della massa in O' è minore secondo il fattore di dilatazione del tempo della velocità della velocità della stessa particella

misurata da O' . Se la velocità è minore e se è sempre valida la conservazione della quantità di moto, allora O deve dedurre che la massa usata da O' è maggiore della propria secondo la quantità $1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Naturalmente O' giungerebbe alle stesse conclusioni rispetto alle misure effettuate da O . Perciò entrambi gli osservatori sono d'accordo sul fatto che la massa di un oggetto in movimento è maggiore della massa dello stesso oggetto in quiete. Gli effetti relativistici infatti sono sempre simmetrici rispetto a due osservatori in moto relativo l'uno rispetto all'altro (purché tale moto sia uniforme, ossia non accelerato).

La massa di un oggetto misurata in un sistema di riferimento in quiete rispetto all'oggetto stesso è denotata con m_0 ed è chiamata *massa a riposo* o *massa propria*.

La massa misurata da un osservatore che si muove con velocità v rispetto all'oggetto è pertanto (*massa relativistica*):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

la massa quindi non è più una grandezza invariabile caratteristica di ogni corpo, ma è essa stessa funzione della velocità. Poiché

$$\lim_{v \rightarrow c} m = +\infty$$

si deve concludere che nessuna particella materiale può raggiungere o superare la velocità della luce e, a causa della regola per la composizione delle velocità, in ogni sistema di riferimento una particella materiale si muove con velocità inferiore a quella della luce.

La seconda legge della dinamica
La seconda legge della dinamica a sua volta è covariante rispetto alle

trasformazioni di Lorentz, purché si assuma come massa di un oggetto la sua *massa relativistica*.

Ciò implica, in particolare, che una forza costante applicata ad un oggetto non genera una accelerazione costante in quanto l'aumento di velocità comporta un aumento di massa e quindi, a parità di forza, una accelerazione tendente a zero. Quando la velocità diventa prossima alla velocità della luce, la massa è talmente grande da impedire ulteriori accelerazioni.

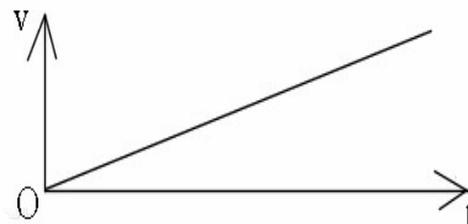


Figura 3: secondo la fisica classica la velocità, a parità di forza applicata, cresce senza limitazioni. La pendenza della retta è l'accelerazione.

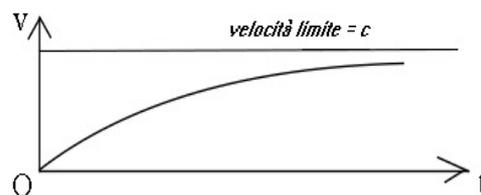


Figura 4: nella fisica relativistica invece la velocità tende asintoticamente al valore limite c ; l'accelerazione è la pendenza della curva e tende a zero.

Equivalenza tra massa ed energia.

Era già noto che un fascio di luce è in grado di generare una pressione (v. radiometro di Crookes); era stata proposta la formula empirica

$$P_{luce} = \frac{2E}{c}$$

nella quale E rappresenta l'energia del fascio incidente nell'unità di tempo sullo specchio (nel sistema cgs) e c indica, al solito, la velocità della luce nel vuoto. Ma dalla meccanica sappiamo anche che

tale pressione equivale alla variazione della quantità di moto, $2mv$, della particella che urta la parete. Attribuendo quindi alla luce incidente massa m , la sua variazione di quantità di moto è $2mc$. Eguagliando con la precedente espressione si deduce:

$$E = mc^2$$

questa è la famosa legge di Einstein sulla equivalenza tra la massa e l'energia, la quale assicura all'imponderabile energia radiante della fisica classica, una corrispondenza con la normale materia ponderabile. Secondo questa equivalenza il Sole perde circa 4×10^{11} tonnellate della sua massa in un giorno emettendo energia radiante nello spazio.

Le prove.

Quali sono le prove a sostegno della teoria formulata da A. Einstein? Malgrado le difficoltà operative legate alla condizione che gli effetti relativistici si manifestano a velocità prossime alla velocità della luce, esiste ormai una abbondanza di prove sperimentali molto convincenti. Accenneremo qui a due di queste.

La dilatazione del tempo.

Quando particelle di altissima energia colpiscono come proiettili un nucleo atomico, è possibile che dall'urto escano altre particelle che normalmente si trovano all'interno del nucleo. Queste nuove particelle sono instabili, hanno cioè una vita media molto breve per poi decadere in altre particelle. Ad esempio il "pione", che normalmente vive nel nucleo allo stato nascosto, una volta liberato ha una vita media, misurata quando è fermo, di circa 10 nanosecondi (10×10^{-9} sec), quindi decade dando origine ad altre due particelle, tra queste il "muone", la cui vita media è circa un milionesimo di secondo (10^{-6} sec).

"Pioni" e "muoni" che anche ad altissime velocità, secondo la fisica classica, potrebbero percorrere solo brevi tratti, in realtà riescono a percorrere, in determinate occasioni, percorsi molto lunghi. Queste osservazioni sono state condotte su di un fenomeno naturale.

È noto che lo spazio al di fuori dell'atmosfera è continuamente percorso da protoni di altissima energia generati nei processi che avvengono nelle stelle. Questi protoni raggiungono la parte alta della nostra atmosfera e colpiscono nuclei di atomi ivi presenti. Nell'urto si generano pioni che decadono rapidamente in muoni molto veloci. Questi ultimi giungono al suolo e vengono registrati da opportuni contatori di particelle.

La vita media del muone è, come si è detto, circa un microsecondo, e quindi anche alla velocità della luce potrebbe percorrere al più qualche centinaio di metri. Come è possibile invece che il muone riesca a percorrere vari chilometri?

Se accettiamo la teoria della relatività, allora la spiegazione è la seguente. Poiché i muoni si muovono rispetto a noi ad altissima velocità, noi vediamo il loro tempo trascorrere molto più lentamente del nostro, ed in questo tempo lo spazio che percorrono è di qualche chilometro invece che qualche decina di metri.

Ma dal punto di vista dei muoni le cose non vanno proprio così; infatti nel loro sistema di riferimento i muoni sono fermi ed il tempo scorre normalmente, cioè la loro vita media rimane sempre un microsecondo. Però i muoni vedono l'atmosfera scorrere verso l'alto ad altissima velocità e, per l'effetto relativistico della contrazione delle lunghezze, lo spessore di qualche chilometro si riduce a poche decine di metri, che il muone è in grado di attraversare nel corso della sua vita media.

L'aumento della massa.

Sappiamo, dalla teoria degli urti elastici, che se una massa urta centralmente ed elasticamente con velocità v una seconda massa inizialmente ferma, allora, se le due masse sono uguali, accade che la massa urtante si arresta e la massa inizialmente ferma si mette in moto con velocità v .

Secondo la fisica classica la stessa cosa dovrebbe accadere nell'urto tra particelle della stessa massa, ad esempio nell'urto tra due protoni, anche se l'urto avviene a velocità molto elevata.

Un protone può essere accelerato fino a raggiungere velocità molto prossime a quella della luce. In questa circostanza l'urto avviene con modalità diverse rispetto a quelle previste dalla fisica classica. Nei grandi acceleratori di particelle l'energia dei protoni proiettile è così grande che la loro massa, in accordo con le previsioni della teoria della relatività, diventa decine di volte maggiore per effetto relativistico rispetto alla massa a riposo.

Perciò l'urto non avviene tra particelle della stessa massa, ma tra particelle di massa assai diversa ed infatti il protone proiettile non si ferma, ma prosegue la sua corsa con velocità leggermente inferiore.

La dinamica delle alte velocità è quindi ben diversa da quanto prevede la fisica classica. Nei laboratori di ricerca vengono studiati urti di particelle dotate di grande energia con bersagli fermi. Effettivamente i fenomeni che si verificano non trovano spiegazione nell'ambito della fisica classica, trovano invece una convincente spiegazione se applichiamo la dinamica relativistica. D'altra parte però la fisica relativistica non esclude del tutto la fisica classica; questa infatti funziona molto bene quando i fenomeni presi in considerazione non implicano velocità elevate. Possiamo

perciò a ragione considerare la fisica classica come una valida approssimazione della relativistica quando le velocità in gioco sono una piccola frazione della velocità della luce.

Conclusioni.

Da tempo immemorabile lo spazio ed il tempo erano considerati due enti indipendenti; nei suoi *Principia* il grande Newton scriveva:

Lo spazio assoluto, per sua natura, resta tale ed invariabile senza alcuna relazione con l'esterno.

Il tempo assoluto, vero e matematico, per sua natura scorre allo stesso modo, senza alcuna relazione con l'esterno.

I concetti newtoniani di *spazio proprio* e *tempo proprio* della fisica classica possono ormai essere considerati superati; essi vanno sostituiti da un unico ente fisico, lo *spazio-tempo*. Per ciascun corpo vi è un definito ordine di tempo riguardante gli avvenimenti che si verificano nelle sue vicinanze; lo possiamo chiamare il *tempo proprio* di quel corpo. Ogni orologio fornisce una misura esatta del suo *tempo proprio*, ma non fornisce una misura esatta delle grandezze fisiche che si riferiscono ad avvenimenti attinenti a corpi in rapido movimento rispetto ad esso. Fornisce un dato che deve essere combinato con un altro dato dedotto dalla misura delle distanze spaziali. Lo spazio in sé è una grandezza relativa, come lo sono il tempo ed il moto. Tuttavia dire che ogni moto è relativo non significa sminuire il valore della conoscenza fisica del fenomeno in quanto le leggi del moto sono comunque le stesse per ogni osservatore inerziale:

La fisica si propone di fornire informazioni su quel che realmente accade nel mondo fisico e non soltanto sulle singole percezioni dei diversi osservatori. Quindi la fisica deve occuparsi di quegli aspetti di un processo fisico che si presentano in comune a

tutti gli osservatori, dato che soltanto questi aspetti possono essere giudicati attinenti al fenomeno fisico stesso. Ciò esige che le leggi dei fenomeni siano sempre le stesse, sia che i fenomeni vengano descritti come appaiono ad un osservatore, sia che vengano descritti come appaiono ad un altro (B. Russell).

La *soggettività* di cui parla la teoria della relatività non dipende dal nostro modo di pensare è una *soggettività fisica*, che esisterebbe comunque, anche se nell'universo non ci fosse niente di simile ai nostri cervelli. La teoria non dice che *tutto è relativo*, al contrario mette a disposizione una tecnica per distinguere ciò che è relativo da ciò che a buon diritto può essere considerato un fenomeno fisico. È un equivoco piuttosto diffuso considerare la teoria della relatività come un aspetto del *relativismo filosofico*. Non solo non è relativismo, ma potrebbe, a ragione, essere chiamata teoria degli *invarianti*, ossia delle grandezze fisiche non relative ai sistemi di riferimento. Però in questo caso non avrebbe forse avuto la stessa risonanza, in quanto sarebbe rimasta confinata in ambito fisico-matematico. Il termine *relativo* è certo più comune del termine *invariante* ed ha una più vasta accezione. Diremo che qualsiasi termine può andare bene, purché poi non si giochi sul significato della parola allo scopo di travisarne il contenuto.

Il sarto del villaggio aveva letto "I Reali di Francia" di Andrea da Barberino ed era per questo motivo ritenuto dai suoi compaesani *uomo di talento e di scienza*; ma anche la cultura, si sa, è un fatto relativo.

Bibliografia:

- F. Brown: Sentry (1954) - Mondadori
- B. Russell: L'ABC della Relatività (1960) - Longanesi&C
- V. Silvestrini: Guida alla teoria della relatività (1982) - Editori Riuniti
- Marion: La fisica e l'universo fisico vol. III (1976) - Zanichelli
- Orear: Fisica generale vol. II (1970) - Zanichelli
- Davies: Spazio e tempo nell'universo moderno (1980) - Laterza
- Bergmann: L'enigma della gravitazione (1969) - EST Mondadori
- Gamow: Biografia della fisica (1972) - EST Mondadori
- Storia del pensiero filosofico e scientifico (a cura di L. Geymonat) vol. V - Garzanti