

Da << **il tutto è maggiore di una sua qualsiasi parte** >> di Euclide alla dimostrazione che , in talune situazioni , il tutto può essere uguale ad una sua parte .

### I paradossi del tutto e della parte

Una parte non può essere uguale al tutto aveva sentenziato Euclide nei suoi Elementi . Questa affermazione , che agli uomini dotati di buon senso sembra assolutamente vera , è contraddetta da quelli che possiamo chiamare i << paradossi del tutto e della parte >> .

### Paradosso degli interi e dei quadrati

Nel 1622 Bonaventura Cavalieri aveva chiesto al suo maestro Galileo Galilei qualche delucidazione sul confronto tra due infiniti . Galileo rispose che aveva qualche difficoltà a rispondere ad una questione così delicata . Nel 1638 , nell'opera Nuove scienze , Galileo dà una risposta indiretta, affermando che, nel confrontare due infiniti, si incontrano << **difficoltà che derivano dal discorrere che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agli infiniti , dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate ; il che penso che sia inconveniente , perché stimo che questi attributi di maggioranza , minorità ed uguaglianza non convenghino agli infiniti , dei quali non si può dire , uno essere maggiore o minore o uguale all'altro** >> . Con paradosso dell'infinito in campo aritmetico , che tratteremo dettagliatamente in seguito , Galileo fa vedere che una infinità dovrebbe essere contemporaneamente maggiore ed uguale ad un'altra infinità . Tutto questo lo conduce ad affermare che il confronto tra gli infiniti non è possibile .

Illustriamo adesso il **paradosso del tutto e della parte** in campo aritmetico, trascrivendo quanto lo stesso Galileo espone nell'opera le Nuove scienze . Si tratta di un'opera scritta in forma di dialogo dove Simplicio rappresenta l'uomo aristotelico , Sagredo il gentiluomo dilettante di scienze e Salviati lo scienziato nuovo , cioè lo stesso Galileo .

### Paradosso degli interi e dei quadrati

L'aristotelico Simplicio sa che i << **numeri quadrati** >> sono quelli che nascono dai singoli numeri << **in se medesimi moltiplicati** >> .

*Salviati* : Benissimo , e sapete ancora , che sì come i prodotti si dimandano quadrati , i produttori , cioè quelli che si moltiplicano , si chiamano lati o radici ; gli altri [ numeri ] poi ,

che non nascono da numeri moltiplicati in se stessi , non sono altrimenti quadrati . Onde se io dirò ,i numeri tutti , comprendendo i quadrati e i non quadrati , essere più che i quadrati soli , dirò cosa vera : non è così ?

*Simplicio* : Non si può dire altrimenti .

*Salviati* : Interrogando io di poi , quanti siano i numeri quadrati , si può con verità rispondere , loro essere tanti quante sono le proprie radici , avvenga che ogni quadrato ha la sua radice , ogni radice il suo quadrato , né quadrato alcuno ha più di una sola radice , né radice alcuna più di un quadrato .

*Simplicio*: Così sta .

*Salviati* :Ma se io domanderò , quante siano le radici , non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri , poiché non vi è numero alcuno che non radice di qualche quadrato ; e stante questo , converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri , perché tanti sono quante le loro radici , e radici sono tutti i numeri ; e pur da principio dicemmo , tutti i numeri essere più che i propri quadrati , essendo la maggior parte non quadrati .

Con linguaggio moderno possiamo affermare quanto segue :

- I quadrati sono soltanto una parte dei numeri naturali .
- I numeri naturali sono tanti quanti sono i loro quadrati in quanto tra questi insiemi di numeri è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca , come si evidenzia dalla seguente tabella :

|   |   |   |    |    |    |    |     |       |
|---|---|---|----|----|----|----|-----|-------|
| 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | ... | $n$   |
| ⇕ | ⇕ | ⇕ | ⇕  | ⇕  | ⇕  | ⇕  | ... | ⇕     |
| 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | ... | $n^2$ |

Questa tabella ci dice che ad ogni numero ( naturale ) della prima riga corrisponde un solo numero ( il suo quadrato ) della terza ed inversamente a ciascun numero ( che è il quadrato di un numero naturale ) corrisponde un solo numero ( naturale ) della prima riga .

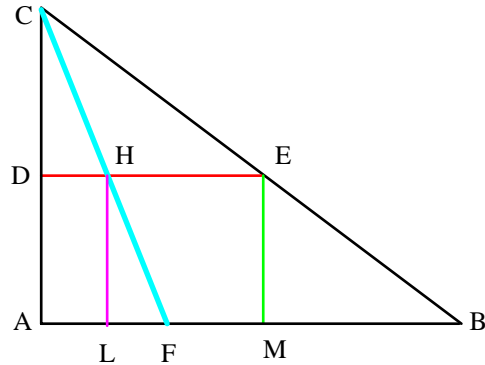
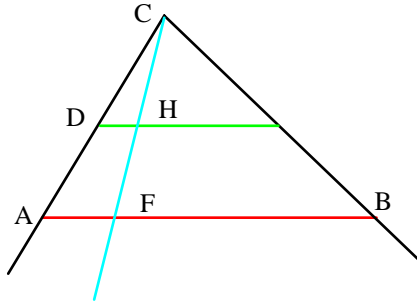
Appare evidente che i quadrati , che sono solo una parte dei numeri naturali sono tanti quanti i numeri naturali . L'affermazione di Euclide che il tutto non può essere uguale ad una sua parte è contraddetta da questo paradosso .

*Salviati* , cioè Galileo , a questa apparente contraddizione dà la seguente interpretazione .

<< Io non veggo che ad altra decisione si possa venire , che a dire , infiniti essere tutti i numeri , infiniti i quadrati , infinite le loro radici , né la moltitudine dei quadrati essere minore di quella di tutti i numeri , né questa maggiore di quella , ed in ultima conclusione , gli attributi di uguale , maggiore e minore non aver luogo negli infiniti , ma solo nelle quantità terminate . >> . Quindi per Galileo gli infiniti non possono essere confrontati tra di loro .

### Un altro paradosso dell'infinito , il paradosso geometrico

I punti di un segmento sono tanti quanti sono i punti della sua metà .



Sia dato il segmento  $AB$  . Dal punto  $C$  tracciamo le rette  $CA$  e  $CB$  congiungenti  $C$  con gli estremi del segmento  $AB$  . Prendiamo il punto medio  $D$  di  $AC$  e per esso tracciamo la parallela  $DE$  ad  $AB$  , fino a tagliare nel punto  $E$  la retta  $CB$  . Otteniamo il segmento  $DE$  che è la metà del segmento  $AB$  .

Ci domandiamo ora : quanti punti contiene il segmento  $AB$  ? Secondo la concezione degli enti geometrici idealizzati dobbiamo rispondere :  $AB$  contiene infiniti punti in quanto sappiamo che tra due punti qualsiasi possiamo inserire almeno un altro punto . E se ci domandiamo quanti punti contiene il segmento  $DE$  dobbiamo rispondere che ne contiene infiniti .

Siccome  $AB$  è doppio di  $DE$  verrebbe di pensare che gli infiniti punti di  $AB$  debbano essere il doppio degli infiniti punti di  $DE$  . Il senso comune ci indurrebbe a stabilire un confronto tra i due infiniti con netto vantaggio dell'infinità dei punti di  $AB$  .

Ma ora possiamo mettere in evidenza un fatto piuttosto sconcertante : i punti del segmento  $AB$  sono tanti quanti sono i punti del segmento  $DE$  .

Per dimostrarlo , consideriamo un generico punto  $F$  di  $AB$  e congiungiamolo con  $C$  : la retta  $FC$  taglia il segmento  $DE$  in un punto  $H$  . Possiamo dire che al punto  $F$  di  $AB$  corrisponde il punto  $H$  di  $DE$  . E , poiché possiamo ripetere la costruzione per tutti i punti del segmento  $AB$  diremo che possiamo stabilire una corrispondenza tra tutti i punti di  $AB$  ed i punti di  $DE$  : più precisamente, ad ogni punto di  $AB$  corrisponderà un solo punto di  $DE$  .

Si osserva pure che ad ogni punto di  $DE$  corrisponde un solo punto di  $AB$  . Abbiamo stabilito una corrispondenza biunivoca tra i punti del segmento  $AB$  ed i punti del segmento  $DE$  .

Quindi i punti del segmento  $AB$  sono tanti quanti sono i punti del segmento  $DE$  . Ecco uno dei paradossi dell'infinito .

Lo rendiamo ancora più evidente se , anziché il segmento  $DE$  , consideriamo il segmento ad esso uguale  $AM$  ( ottenuto abbassando da  $E$  la perpendicolare  $EM$  su  $AB$  ) . I punti di  $AB$  , essendo in numero uguale a quelli di  $DE$  , dovrebbero essere in numero uguale a quelli di  $AM$  . Infatti i punti di  $AB$  possono porsi in corrispondenza biunivoca con quelli di  $AM$  , mentre essi costituiscono solo una parte ( la metà ) dei punti di  $AB$  . Cioè per gli insiemi infiniti non sembra valido il principio ben noto : il tutto è maggiore di una sua parte , dal momento che è possibile che un insieme infinito venga posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte .

Chi risolve in maniera completa e definitiva il concetto di infinito è Cantor . Questi introduce il concetto primitivo di insieme descrivendolo con le seguenti

**parole : << Per insieme intendiamo una collezione di determinati oggetti della nostra intuizione o del nostro pensiero ben distinti e riuniti in un tutto : tali oggetti sono detti gli elementi dell'insieme >>**

**Definizione : << quando due insiemi possono porsi in corrispondenza biunivoca si dice che essi hanno la stessa potenza >> .**

**Poiché insiemi finiti aventi lo stesso numero di elementi hanno la stessa potenza e , inversamente, insiemi finiti aventi la stessa potenza hanno lo stesso numero di elementi , conviene rappresentare la potenza di un insieme finito dal numero dei suoi elementi , cioè assumiamo :**

**potenza di un insieme finito = numero dei suoi elementi**

**Cantor identifica anche per gli insiemi infiniti il numero degli elementi con la potenza : cioè hanno lo stesso numero di elementi due insiemi infiniti aventi la stessa potenza , cioè due insiemi i cui elementi possono porsi in corrispondenza biunivoca fra loro .**

**Consideriamo l'insieme  $N$  , cioè l'insieme di tutti gli infiniti numeri naturali :**

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

**Chiameremo potenza del numerabile la potenza dell'insieme  $N$  . Ciò in relazione al fatto che chiameremo insieme numerabile l 'insieme  $N$  stesso e qualsiasi altro insieme che possa porsi con  $N$  in corrispondenza biunivoca . L'importanza della considerazione della potenza del numerabile sta nel fatto che essa è la più piccola potenza che un insieme infinito possa avere .**

Esistono insiemi infiniti che hanno potenza maggiore del numerabile , ma non esistono insiemi infiniti aventi potenza minore .

**Definizione :** Un insieme finito A ha potenza maggiore di un insieme finito B quando è possibile porre B in corrispondenza biunivoca con una parte propria di A , ma non è possibile porre A in corrispondenza biunivoca con una parte propria di B .

Vediamo adesso in che cosa consiste l'originalità del pensiero di Cantor :

egli estende la definizione elementare di uguaglianza del numero cardinale di due insiemi anche al caso di insiemi infiniti .

Cantor ha il coraggio , che era mancato a Galileo Galilei , di ammettere che << **una parte può essere uguale al tutto** >> ; ma cerchiamo di chiarire il significato da dare alla parola << **uguale** >> . **Uguale in senso aristotelico** : la parte non può essere uguale ( identica ) al tutto che la contiene , in quanto il tutto ha sempre qualche elemento che la parte non ha ; **Uguale nel senso di Cantor** : la parte può essere uguale al tutto per numero .

Tanti sono i numeri quanti sono i loro quadrati , che sono << meno >> dei numeri , perché ci sono dei numeri che non sono quadrati .

Se per concetti diversi non usiamo più la stessa parola uguale , ma usiamo rispettivamente i termini identico ed equipotente , allora la contraddizione si elimina . Un fatto incredibile diventa un fatto normale .

Nel caso di un insieme infinito , può accadere che l'intero insieme ed una sua parte , certamente non identici , siano equipotenti , cioè esprimano la stessa numerosità .

**Definizione :** Un insieme X si chiama infinito se è equipotente con un suo sottoinsieme , cioè con una sua parte ; in caso contrario l'insieme sarà detto finito .

Cantor scopre anche che . a) i punti di un cubo sono tanti quanti i punti di un suo lato b) i punti di un quadrato sono tanti quanti i punti di un suo lato .

## Confronto fra insiemi infiniti

L'insieme di tutti i numeri naturali è solo l'infinito attuale più piccolo .

Sono insiemi numerabili : a ) l'insieme  $Z$  degli interi relativi b) l'insieme  $Q$  dei numeri razionali c) l'insieme  $U$  , unione di insiemi numerabili .

**Teorema : Qualunque sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è numerabile .**

### Teorema

**Non esiste alcun insieme infinito avente potenza inferiore al numerabile : quella del numerabile è la minima potenza degli insiemi infiniti .**

Cantor prosegue il suo percorso sull'infinito scoprendo che non tutti gli insiemi infiniti sono numerabili . Siamo nel dicembre del 1873 ; nasce il concetto di **infinito attuale trasfinito** , sempre accrescibile e non assoluto .

Non sono insiemi numerabili l'insieme formato da tutti i punti di un segmento , l'insieme  $R$  dei numeri reali .

### Definizione

Chiamiamo potenza del continuo , quella dell'insieme di tutti i punti della retta e quindi anche dell'insieme  $R$  di tutti i numeri reali .

Incontriamo le prime due potenze per insiemi infiniti :

1) la potenza del numerabile , che è la minima possibile ( ad esempio la potenza dell'insieme  $N$  )

2) la potenza del continuo , che è maggiore di quella del numerabile ( ad esempio la potenza dell'insieme  $R$  ) .

## Postulato del continuo

**Non esistono insiemi infiniti aventi potenza intermedia tra quella del numerabile e quella del continuo .**

### Teorema

**L'insieme delle parti di un insieme numerabile ha la potenza del continuo ( che è maggiore di quella del numerabile )**

### Teorema

**L'insieme P delle parti di un insieme qualunque A ha potenza maggiore di A**

### Teorema

**Esistono insiemi infiniti aventi potenza superiore alla potenza del continuo .**

**Quando consideriamo insiemi infiniti , si ha sempre un aumento della potenza nel passare da un insieme infinito all'insieme delle sue parti .**

**Quindi , partendo da un insieme numerabile N ( avente potenza del numerabile ) si passa all'insieme delle sue parti P che ha la potenza del continuo , e l'insieme P' delle parti di P ha potenza maggiore del continuo , l'insieme P'' delle parti di P' ha potenza maggiore di P' , e così di seguito .**

**Le successive potenze degli insiemi N , P , P' , P'' .... si presentano come le successive gigantesche , infinitamente grandi unità di una nuova serie numerica infinita . Sono nati i numeri trasfiniti di Cantor che ha elaborato in maniera impeccabile una sua aritmetica .**



**Paradosso** significa << contrario alla comune opinione >> , mentre **antinomia** significa contraddizione .

### **Bibliografia**

- 1) Frajese . introduzione elementare alla matematica moderna pagina 75
- 2) Lucio Lombardo radice l'Infinito
- 3) Quaderno grande : storia dell'analisi matematica