# I numeri di Fibonacci

Consideriamo la successione numerica

$$a_o, a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \cdots \quad \text{con} \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad [2] \quad n > 2$$

Ogni termine di questa successione è la somma dei due termini precedenti. $a_4 = a_3 + a_2$

I termini della $[1]$ non possono essere determinati in modo univoco facendo uso della sola condizione $[2]$. Infatti esiste un numero arbitrario di successioni diverse fra loro e che soddisfano alla condizione $[2]$. Esempi:

- $1, 5, 6, 11, 17, 28, 45, 73, \cdots$ • $2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, \cdots$ • $3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \cdots$

La condizione $[2]$ non è sufficiente; bisogna determinare altre condizioni aggiuntive.

Se imponiamo che i primi due termini della successione siano $a_o = 0 \ e \ a_1 = 1$ otteniamo la seguente successione detta serie di Fibonacci (Fibonacci è la contrazione di **filius Bonacci**, cioè figlio di Bonaccio) dal nome del grande matematico pisano Leonardo da Pisa.

$$\begin{array}{cccccccccccccc} a_o, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, & a_9, & a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 & 144 & 233 \cdots \end{array}$$

- Due numeri di Fibonacci consecutivi, a partire dal terzo, sono sempre primi tra loro, cioè sono coprimi.

- Sommando i primi **n** numeri di Fibonacci otteniamo, diminuito di una unità, il numero di Fibonacci che occupa il numero $\mathbf{n+2}$.

$$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n = a_{n+2} - 1 \qquad F(1) + F(2) + F(3) + F(4) + F(5) = F(7) - 1 \qquad 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 13 - 1$$

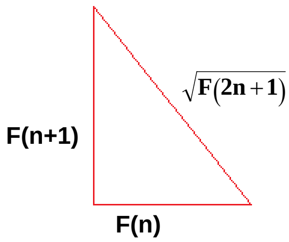
- Se invece di sommare tutti i numeri di Fibonacci ne sommiamo uno si ed uno no, il risultato è sempre uguale al numero successivo all'ultimo addizionato

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots\cdots + a_{2n-1} = a_{2n}$$

- $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$

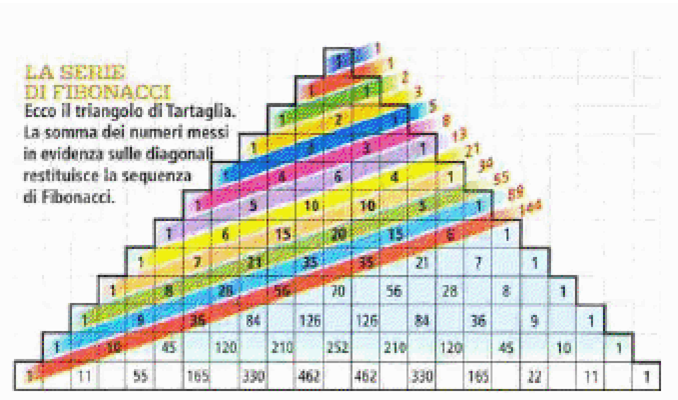
- Il quadrato di ogni numero di Fibonacci differisce di una unità dal prodotto dei due numeri di Fibonacci che lo comprendono. Tale differenza è alternativamente positiva o negativa.

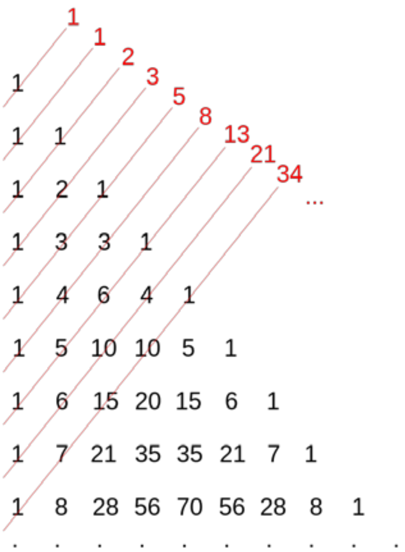
$$a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n \quad F(5) = 5 \quad F(4) = 3 \quad F(6) = 8 \quad 5^2 - 3 \cdot 8 = 1$$




- $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a_n^2 + a_{n+1}^2} = \sqrt{a_{2n+1}}$

- I termini della successione di Fibonacci sono le somme dei termini giacenti sulle "diagonali" del triangolo di Tartaglia.



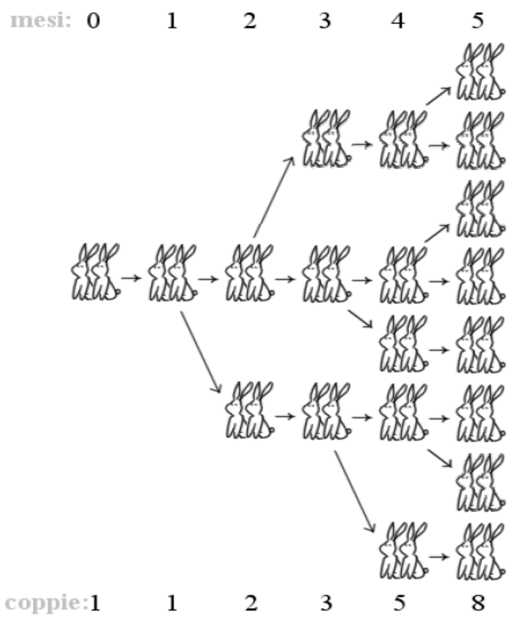

## Origine della successione di Fibonacci

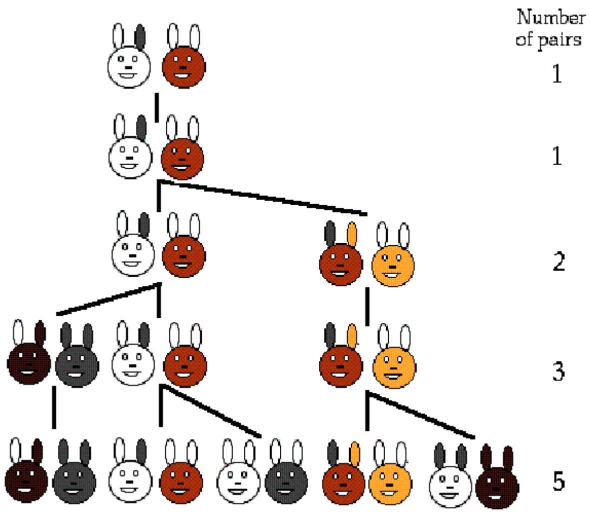
Nel **1223** a Pisa, l'imperatore Federico II di Svevia assistette ad un singolare torneo tra abacisti ed algoritmisti. In quella gara si dimostrò che col metodo posizionale arabo-indiano si poteva calcolare più rapidamente di qualsiasi abaco.

**Problema**: Quante coppie di conigli verranno prodotte in un anno, a partire da un'unica coppia, se ogni mese ciascuna coppia dà alla luce una nuova coppia che comincia a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita?

**Fibonacci**, vinse la gara rispondendo così rapidamente da fare sospettare che il torneo fosse truccato.

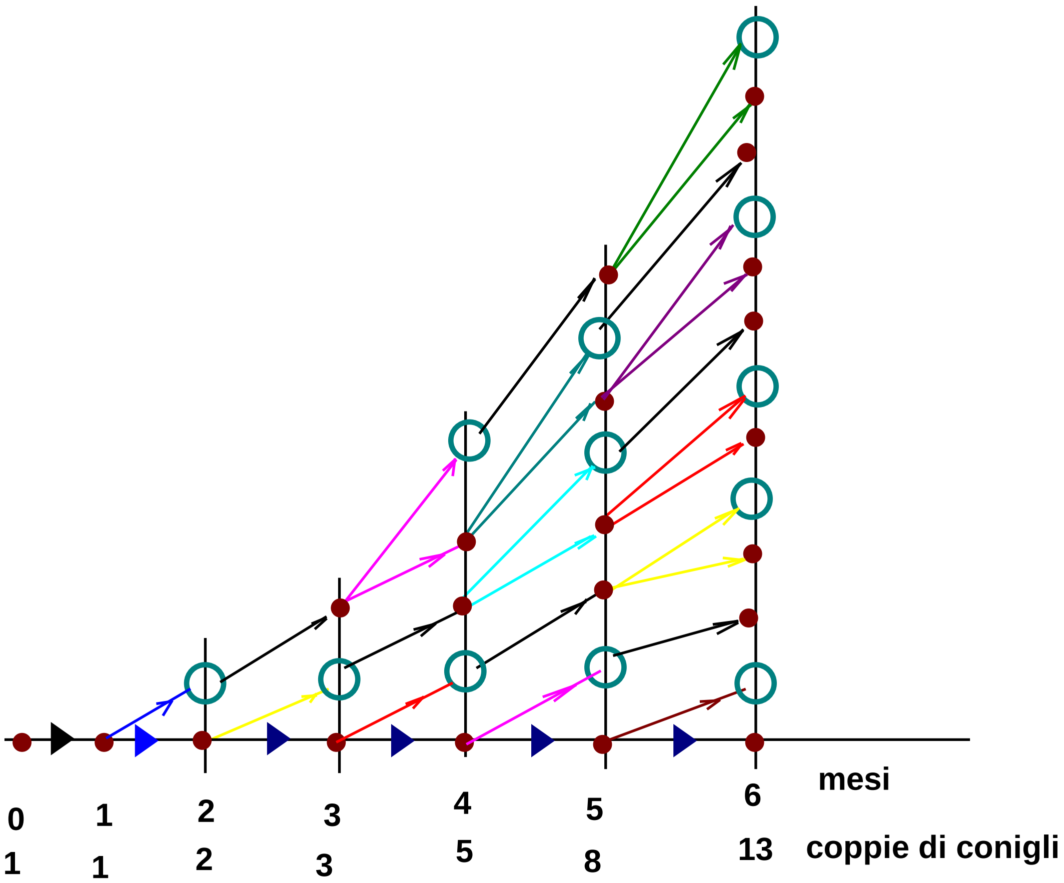
## Soluzione




| Mesi | Coppie nate | Coppie adulte * | Totale coppie | Evoluzione nascite nei primi sei mesi |
|---|---|---|---|---|
| Inizio | 0 | 1 | 1 |  |
| 1° | 1 | 1 | 2 |  |
| 2° | 1 | 2 | 3 |  |
| 3° | 2 | 3 | 5 |  |
| 4° | 3 | 5 | 8 |  |
| 5° | 5 | 8 | 13 |  |
| 6° | 8 | 13 | 21 |  |
| 7° | 13 | 21 | 34 | |
| 8° | 21 | 34 | 55 | |
| 9° | 34 | 55 | 89 | * Nella colonna "Coppie adulte" sono comprese sia le coppie adulte non ancora feconde (identificate nelle figure con un pallino nero), sia quelle adulte e feconde. |
| 10° | 55 | 89 | 144 | |
| 11° | 89 | 144 | 233 | |
| 12° | 144 | 233 | 377 | |
| Totale coppie nate | 376 | | | |

Ogni coppia di conigli genera in un mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese di vita. Il primo mese c'è soltanto una coppia di conigli, il secondo mese ce ne sono **2** di cui una fertile, il terzo mese ce ne sono **3** di cui **2** fertili, il quarto mese cene sono **5** di cui **3** fertili, il quinto mese ce ne sono **8** di cui **5** fertili e così di seguito.




Una coppia fertile di conigli alla fine di ogni mese diventa una coppia fertile ed una non fertile

Una coppia non fertile alla fine di ogni mese diventa una coppia fertile

○ coppia di conigli non fertile ● coppia di conigli fertile

Questo famoso problema porta alla costruzione di una successione di numeri naturali, nota come successione di Fibonacci, i cui primi termini sono $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$ nella quale ogni elemento, dal terzo in poi, si ottiene sommando i due termini immediatamente precedenti.

La successione di Fibonacci ha portato ad approfondire moltissimi ambiti della matematica e delle scienze naturali. Tuttavia pur avendo scoperto questa importante successione, Fibonacci non ne colse molti aspetti. Solo quattro secoli più tardi, Keplero osservò che il rapporto tra due termini consecutivi tendeva alla sezione aurea. All'aumentare dell'indice **n** della successione di

Fibonacci che indichiamo col simbolo $\{a_n\}$, il rapporto $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ tende alla sezione aurea $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

cioè: $$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Nel 1202 Fibonacci scrisse la sua opera più importante, il **Liber Abaci**, che divenne un classico della letteratura matematica e permise la diffusione in Europa della matematica e della numerazione indo-araba. In questo libro descrive le **nove figure indiane** (cioè le cifre) insieme allo **zero**, chiamato **zephyrum**, dall'arabo **sifr** (nulla) e da quest'ultima parola deriva anche la nostra **cifra**.

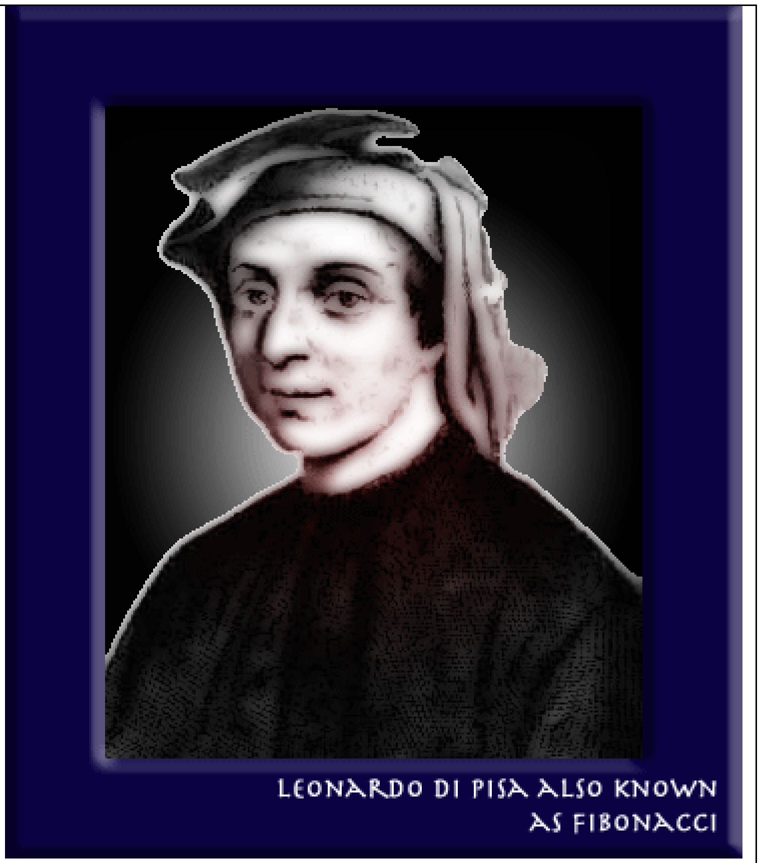
## Biografia di Leonardo Fibonacci

Poche ed infondate notizie si hanno sulla vita di Leonardo da Pisa. Pare che sia nato a Pisa verso il 1170. Le frasi **filius Bonaci** e de **filiis Bonaci** che si leggono nei manoscritti delle sue opere indussero molti storici della matematica ad affermare che Fibonacci sta per **filius Bonaci**.

Il padre di Leonardo ricopriva il ruolo di scriba (segretario) della repubblica di Pisa ed in tale qualità, verso il 1192, fu inviato in missione alla dogana di Bugia (città situata sulla costa africana vicino ad Algeri). Leonardo fu invitato dal padre a raggiungerlo per apprendere i procedimenti aritmetici ed algebrici utilizzati dagli Arabi ed egli si interessò talmente alle loro conoscenze matematiche che decise di approfondire i suoi studi soggiornando in Egitto, Siria e Grecia. Intorno al 1200, Fibonacci tornò a Pisa dove per i successivi 25 anni si dedicò alle sue personali opere di matematica. Dei suoi libri, abbiamo ancora copie del **Liber Abaci** (1202), **La Practica geometriae** (1220), **Flos** (1225) e **Liber quadratorum**.

Oltre il **Liber Abaci**, Fibonacci ha scritto i seguenti libri:

- **La Practica geometriae** nella quale si serve dell'algebra per risolvere problemi di geometria. In particolare dimostra che le mediane di un triangolo si intersecano nel rapporto di 2 a 1.
- **Liber quadratorum** un'opera brillante su problemi di analisi indeterminata. In questo libro troviamo le risposte date alle domande del matematico Giovanni Panormita
- **Epistola ad magistrum Theodorum**




Leonardo Pisano fu il matematico più originale e più abile del mondo cristiano medioevale, ma gran parte del suo pensiero era di livello troppo elevato perché potesse essere capito dai suoi contemporanei. Nel **Flos** compaiono problemi indeterminati che ricordano **Diofanto** e problemi determinati che ricordano **Euclide**, gli **arabi** ed i **cinesi**. Anche il **Liber quadratorum** è un'opera brillante che tratta problemi di analisi indeterminata.

L'opera più importante è il **Liber Abaci**: è un lavoro, suddiviso in quindici capitoli, contenente quasi tutte le conoscenze aritmetiche ed algebriche ed ha avuto un ruolo fondamentale nello sviluppo della matematica nell'Europa occidentale. In questo libro sono contenuti: il modo di eseguire le 4 operazioni, i metodi di estrazione delle radici quadrate e cubiche, la regola del 3 semplice, gli elementi fondamentali dell'algebra. Questo libro svolse un ruolo fondamentale nella storia della matematica europea. Le spiegazioni sono corredate da esempi ed applicazioni utili a scopo commerciale. Si tratta di una fondamentale sintesi della matematica classica e di quella indiana ed araba, considerata uno dei punti di partenza dei grandi algebristi del Cinquecento. Giova ricordare che nel capitolo I tratta delle 9 cifre dette dal Fibonacci **indiane** alle quali aggiunge lo **zero** elaborando il sistema posizionale che sostituisce quello latino.

In tale sistema di numerazione, il valore delle cifre dipende dal posto che occupano. Per questo motivo egli fu costretto ad introdurre un nuovo simbolo, lo zero **0**, per indicare le posizioni vuote. Questo l'elenco di alcuni problemi che propone e risolve:

- Un tale acquista per 30 denari 30 uccelli fra pernici, colombi e passeri. Trovare quanti acquistò di ciascuna specie, sapendo che ogni pernice costò 3 denari, ogni colombo 2 denari ed ogni passero $\frac{1}{2}$ denaro.

Benché indeterminato, il matematico pisano dimostrò che il problema ammette l'unica soluzione intera positiva $3, 5, 22$.

- Di due viandanti uno percorre 20 miglia al giorno, l'altro fa un miglio il primo giorno di viaggio, due il secondo, tre il terzo e così di seguito. Si vuole sapere dopi quanti giorni i due viandanti avranno percorso il medesimo cammino.

Leonardo pisano dimostra che i due viandanti percorreranno lo stesso cammino dopo 39 giorni.

- In una torre alta 100 palmi hanno dimora due serpenti. Quello che si trova alla base sale ogni giorno $\frac{1}{2}$ palmo e ne discende $\frac{1}{4}$, mentre quello che abita in alto discende di $\frac{1}{5}$ palmo e sale di $\frac{1}{6}$. In quale punto della torre si incontreranno?

Il problema si risolve applicando il metodo della falsa posizione.

Numerosi sono gli scritti di Fibonacci. Ricordiamo la **La Practica geometriae** (1220) ed il **Liber quadratorum** (1225), opere queste, che insieme con il **Liber Abaci**, rappresentarono i più autorevoli trattati di quel tempo. Nel comporre la sua **Practica geometriae** si ispirò al pensiero del mondo greco e tutta l'esposizione è modellata sullo stile degli Elementi di Euclide.

Un altro dei libri di Fibonacci è il **Practica geometriae**, scritto nel 1220 e dedicato a **Dominiscus Hispanus**. Esso contiene un'ampia raccolta di problemi geometrici, distribuiti in otto capitoli, unitamente a teoremi basati su **Gli Elementi** di Euclide e sulle divisioni sempre di Euclide. Il **Liber quadratorum**, scritto nel 1225, è un lavoro complesso ed ampio. Il nome del libro significa il libro dei quadrati ed è un libro sulla teoria dei numeri che, tra le altre cose, esamina i metodi per trovare il triplo pitagorico.

La reputazione di Leonardo Fibonacci come matematico divenne così grande che l'imperatore Federico II gli chiese un'udienza mentre era a Pisa nel 1225. Dopo il 1228 non si sa nulla della vita di Leonardo tranne il decreto della Repubblica di Pisa che gli conferì il titolo di "**Discretus et sapiens magister Leonardo Bigollo**" a riconoscimento dei grandi progressi che apportò alla matematica. Fibonacci morì qualche tempo dopo il 1240, presumibilmente a Pisa.

Al matematico è stato dedicato un asteroide denominato Fibonacci 6765.