Le serie numeriche ed il sofisma di Achille piè veloce e la tartaruga

- Si dice che una grandezza variabile costituisce un infinito potenziale quando, pur assumendo valori finiti, essa può crescere al di là di ogni limite; se per esempio immaginiamo di suddividere un dato segmento con successivi dimezzamenti, il risultato ottenuto sarà un infinito potenziale perché il numero delle parti a cui perveniamo, pur essendo in ogni caso finito, può crescere ad arbitrio. Si parla di infinito attuale quando ci si riferisce ad un ben determinato insieme, effettivamente costituito di un numero illimitato di elementi. Se per esempio immaginiamo di avere scomposto un segmento in tutti i suoi punti, ci troveremo di fronte ad un infinito attuale perché non esiste nessun numero finito che riesca a misurare la totalità di questi punti.
- Sofisma matematico: **dimostrazione apparentemente rigorosa, che conduce ad un risultato palesemente assurdo.**
- **Sofisma filosofico: ragionamento che, partendo da premesse vere o verosimili e rispettando le regole del ragionamento, perviene ad una conclusione assurda.**

Sofismi storicamente importanti sono i sofismi di Zenone contro il movimento.

01) La scoperta dei numeri irrazionali portò all'abbandono dell'immagine pitagorica dei punti fisici disposti in fila. Essa fu sostituita dal concetto più sottile del continuo. Ogni retta è infinitamente divisibile, cioè il numero dei punti in essa contenuto è infinito. Il problema dell'infinito apriva alla scienza un mondo nuovo. Sul concetto di <<infinito>> iniziava una battaglia dialettica che sarebbe durata millenni.

02) Pitagora aveva ipotizzato che lo spazio ed il tempo potessero essere concepiti rispettivamente come somma di un numero (intero) finito di punti e di istanti. La scoperta delle grandezze incommensurabili condusse ad ammettere l'infinita suddivisibilità dello spazio e del tempo in termini di elementi indivisibili.

03) Zenone, con i suoi 4 sofismi, voleva evidenziare che non si poteva accettare la concezione pitagorica della suddivisione dello spazio e del tempo in un numero finito di elementi indivisibili, né la concezione post pitagorica (come ad esempio quella di Euclide) secondo la quale lo spazio ed il tempo possono essere concepiti come un insieme di infiniti elementi primordiali (indivisibili). In sintesi Zenone riteneva che non era lecito ritenere le grandezze spazio e tempo discrete e nemmeno continue.

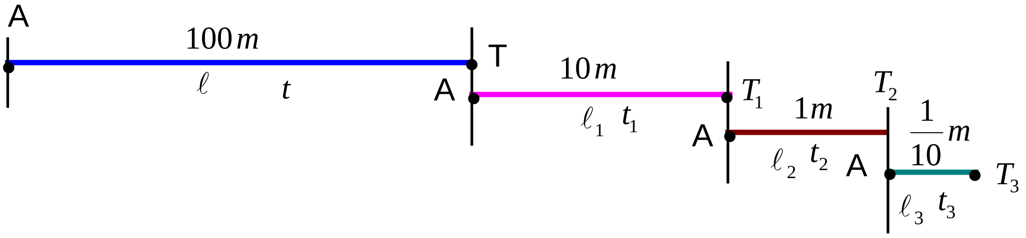
Zenone, con i sofismi della <<dicotomia>> e di <<Achille piè veloce>> voleva dimostrare che se, ammettiamo l'infinita suddivisibilità del tempo e dello spazio, il movimento è impossibile, mentre i sofismi della <<freccia>> e dello <<stadio>> volevano dimostrare che il movimento è ugualmente impossibile se ammettiamo il contrario, cioè se ammettiamo la suddivisibilità dello spazio e del tempo mediante un numero finito di elementi indivisibili.

04) Noi oggi analizzeremo, il seguente sofisma di Zenone, sia alla luce delle attuali conoscenze della matematica, che secondo il punto di vista del filoso eleatico.

<<Achille piè veloce non può raggiungere la lenta tartaruga>>

Con questo curioso sofisma Zenone di Elea (vissuto nel 500 A.C.) sembrava volere dimostrare l'impossibilità del moto, ma in realtà voleva semplicemente dire che con l'<<infinito>> non possiamo operare con le consuete regole valide per le quantità finite.

Doveva ancora nascere il primo matematico che avrebbe ammesso e dimostrato che la somma di infiniti termini, a determinate condizioni, può dare come risultato una quantità finita.



<< Achille e la tartaruga sono distanziati di un tratto $\ell = 100\,m$. Partono contemporaneamente, si muovono con velocità costante e la velocità di Achille è 10 volte quella della tartaruga. Dopo quanto tempo Achille raggiungerà la tartaruga? e se la raggiungerà quale spazio avrà percorso?>>

Secondo il ragionamento di Zenone Achille non poteva raggiungere la tartaruga in quanto sosteneva che la somma di infiniti termini non poteva dare una quantità finita. Secondo le nostre attuali conoscenze Achille raggiungerà la tartaruga in quanto, a determinate condizioni, la somma di infiniti termini può dare una quantità finita.

Osservazione preliminare: $v_A = 10 \cdot v_T \quad \Rightarrow \quad s_A = 10 \cdot s_T$.

Ragionamento di Zenone: E' logico ammettere che Achille, prima di raggiungere la tartaruga, debba percorrere i primi $100\,m$. Quando Achille percorre il tratto $\ell = 100\,m$ che lo separa dalla tartaruga, questa sarà avanzata del tratto $\ell_1 = \frac{1}{10}\ell = 10\,m$, quando Achille percorre il tratto ℓ_1, la tartaruga percorre il tratto $\ell_2 = \frac{1}{10}\ell_1 = 1m$. Così seguitando vediamo che Achille è costretto a passare per una serie infinita di punti $T_1, T_2, T_3, \cdots$ posti rispettivamente a $100m$, $(100+10)m$, $(100+10+1)m$ da A senza raggiungere mai la tartaruga.

La conclusione di Zenone di Elea era la seguente: << il corridore più lento, la tartaruga, si troverà sempre un poco più avanti del corridore più veloce, Achille>>.

Achille percorre il seguente tratto:

$$\boxed{s = \ell + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \cdots + \ell_n + \cdots = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots}$$

Zenone sosteneva che la somma di infiniti termini, anche piccoli, non può mai essere una quantità finita e quindi Achille non raggiungerà mai la tartaruga.

Alla luce delle nostre attuali conoscenze noi diciamo che Achille raggiungerà la tartaruga dopo avere percorso il seguente tratto:

$$\boxed{s = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots = 111 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n}$$

Siamo in presenza di una serie geometrica avente ragione $q = \frac{1}{10} < 1$ e primo termine $a_1 = \frac{1}{10}$

Mi calcolo: $$s_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{10^n} = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot a_1 = \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} \cdot \frac{1}{10}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{9}$$

Achille raggiungerà la tartaruga dopo avere percorso il tratto:

$$\boxed{s = 111 + \frac{1}{9} = \frac{1000}{9}m}$$

I tratti via via percorsi da Achille, per quanto sempre più piccoli, sono sempre ben determinati e finiti. Vediamo così che una somma di infinite quantità finite non è necessariamente infinita, non supera necessariamente, da un certo indice in poi, ogni numero per quanto grande esso sia. Se le quantità che si succedono sono sempre più piccole può accadere che il limite delle loro successive somme sia finito.

Dopo quanto tempo Achille raggiungerà la tartaruga ?

Il secondo sofisma di Zenone: Achille piè veloce non raggiunge la lenta tartaruga

Supponiamo che Achille si muova con una velocità costante $v = 10\dfrac{m}{s}$.

$v = \dfrac{s}{t} \Rightarrow t = \dfrac{s}{v}$. t^* = tempo impiegato da Achille per raggiungere la tartaruga

$$\boxed{t^* = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots = 11 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 11 + \frac{1}{9} = \frac{100}{9}s}$$

$$t^* = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots\right) = 10\sum_{n=0}^{n=+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 10 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 10 \cdot \frac{10}{9} = \frac{100}{9}$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \dfrac{1}{10} < 1$ e primo termine $a_1 = \dfrac{1}{10}$

Essa converge al valore $S = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{10}} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{9}$

- Il sofisma di <<Achille piè veloce e la tartaruga>> è un sofisma dell'infinito potenziale perché in esso non si fa mai ricorso ad un infinito in atto (infinito attuale): sono in gioco sempre e soltanto delle successioni, delle aggiunte in numero sempre crescente, illimitato.

Il sofisma viene pienamente chiarito nell'ambito della teoria dei limiti, della convergenza o meno di una successione ad un limite, dall'essere questo limite finito o infinito (caso delle serie divergenti).

La teoria dei limiti sviluppata col massimo rigore dal matematico tedesco Karl Weierstrass (**1815 - 1897**) e dalla sua scuola, elimina dal calcolo infinitesimale ogni riferimento agli ambigui <<infinitesimi in atto>> [1]. In un certo qual senso è la rivincita di Aristotele che ammetteva l'esistenza solo degli infinitesimi potenziali e degli infiniti potenziali **ma non ammetteva l'esistenza dell'**infinito attuale **e dell'**infinitesimo attuale**.**

Saranno due allievi di Karl Weierstrass, il liquidatore degli infinitesimi e degli infiniti in atto nella tecnica della matematica, che riapriranno la spirale dialettica dell'infinito.

Reintrodurranno l'infinito attuale, ma con il rigore della scuola alla quale si erano formati, senza più ambiguità, oscurità e misticismo.

- Zenone non voleva dimostrare l'impossibilità del moto, ma ridurre all'assurdo la tesi dei pitagorici, che componevano il continuo con atomi (punti) di dimensione finita.

Nell'ipotesi pitagorica la somma di un numero crescente di segmenti, anche se decrescenti, dovrebbe tendere comunque all'infinito, perché ciascuno conterrebbe un numero intero di atomi

[1] Leibniz, nella sua teoria del calcolo infinitesimale, aveva introdotto le quantità sempre più piccole, evanescenti, ma non nulle; aveva introdotto gli **infinitesimi in atto**, cioè gli infinitesimi attuali. Questo aveva reso logicamente vulnerabile la teoria di Leibniz .

dotati di dimensione (sarebbe come fare la somma di infiniti numeri interi, che tende certamente all'infinito).

- <<**Il primo paradosso dell'infinito attuale: una parte può essere uguale al tutto**>>

Consideriamo gli insiemi numerici $\mathbf{A}=\{\mathbf{n}\}$ (insieme dei numeri naturali) e $\mathbf{B}=\{\mathbf{n}^2\}$ (insieme dei quadrati dei numeri naturali. Risulta: $\mathbf{B}\subset\mathbf{A}$ in quanto ci sono elementi dell'insieme $\mathbf{A}$ che non appartengono all'insieme $\mathbf{B}$, cioè l'insieme $\mathbf{B}$ è una parte dell'insieme $\mathbf{A}$. Tuttavia i due insieme hanno lo stesso numero di elementi in quanto si possono porre in corrispondenza biunivoca.

- **Per Galileo Galilei il <<continuo>> era composto da infinite particelle <<indivisibili>>, prive di grandezza, ma non nulle.**
- **Il metodo degli indivisibili è di portata assai più limitata del metodo del passaggio al limite, nel quale non si considerano <<infinitesimi in atto>> (gli INDIVISIBILI), ma <<infinitesimi in potenza>> (i differenziali).**
- **Per Guldino, oppositore di Torricelli e di Cavalieri, il continuo è divisibile all'infinito, ma non consta di infinite parti in atto, le quali non possono mai essere esaurite. Per Guldino il continuo è costituito da infinite parti in potenza (infinito potenziale di matrice Aristotelica)**

I sofismi di Zenone

I argomento: la dicotomia

Non esiste il movimento perché ciò che si muove deve arrivare alla metà del suo cammino prima di arrivare alla fine. E naturalmente deve arrivare alla metà della metà prima di arrivare alla metà e così ad infinitum.

II argomento: Achille e la tartaruga

Il secondo argomento consiste nel fatto che il più lento non sarà mai sorpassato nella sua corsa dal più veloce, perché l'inseguitore deve sempre prima arrivare al punto dal quale l'inseguito si è appena mosso, cosicché il più lento deve sempre trovarsi in poco più avanti dell'altro.

III argomento: la freccia. La freccia che si muove è ferma.

Una freccia lanciata è in ogni momento nello stato di riposo o nello stato di non-riposo, cioè in movimento; se l'istante è indivisibile, la freccia non si può muovere, altrimenti l'istante potrebbe immediatamente dividersi. Ora il tempo è fatto di istanti; siccome la freccia non può muoversi in nessun istante, non può muoversi mai. Essa resta sempre in riposo.

IV argomento: lo stadio

Zenone paragona il movimento di alcuni punti rispetto a certi punti fermi col movimento che essi stessi manifestano rispetto ad altri punti che si muovono in direzione contraria, ne deduce che un certo tempo è il doppio di se stesso.