Cauchy

Il calcolo infinitesimale elaborato da Newtn e Leibniz ha trovato subito continuatori che ne hanno sviluppato ed estesole dottrine durante il secolo XVIII: dal marchese De L ‘ Hopital a Giacomo e Giovanni Bernoulli, a Leonardo Eulero , a Lagrange . Frattanto , dopo un secolo di applicazioni feconde, i principi che stavano alla base del calcolo infinitesimale sollevavano ancora dubbi ed incertezze; anzi la questione critica dei concetti dell'analisi infinitesimale sembrava diventare più acuta. Jean D'Alambert scriveva che l'infinito è soltanto un modo di dire e che infine il calcolo opera soltanto su quantità finite. L'accademia di Berlino , presieduta da Lagrange, aprì nel 1784 **un concorso sul concetto dell'infinito matematico domandando " una teoria chiara e precisa di ciò che si chiama infinito in matematica " ed in particolare di chiarire" come possano dedursi tanti teoremi veri da una supposizione contraddittoria ".**

Si formava un ambiente di reazione contro il calcolo infinitesimale di Leibniz e riaffiorava una tendenza al ritorno ai più laboriosi procedimenti degli antichi .

Una risposta definitiva ai dubbi critici è venuta soltanto da Cauchy nella sua Analyse Algebrique del 1821 **, dove l'infinitesimo è trattato sistematicamente come una quantità variabile che tende al limite zero . In connessione con l'impulso critico dato da Cauchy , da Abel , Bolzano , molti matematici successivamente hanno spinto avanti la critica dei fondamenti dell'analisi , riuscendo ad un**

sistemazione rigorosa di tutte le sue deduzioni : fra i protagonisti di questo processo citiamo Weierstrass , Riemann , Cantor , Heine , Dedekind , Darboux , Jordan , Ulisse Dini , Peano.

La fiducia nella potenza della ragione sorregge l'intera ricerca scientifica ; e se qualche dubbio affiora qua e là circa l'esattezza dei fondamenti del grandioso edicio dell'analisi infinitesimale , esso viene messo a tacere osservando che l'ampiezza e la compattezza delle conseguenze ricavate è largamente sufficiente a giustificare l'accettazione delle premesse . Questo atteggiamento risulta chiaramente espresso dal celebre motto attribuito a D'Alambert : << andate avanti e la fede vi verrà >> ; mettetevi al corrente dei grandi successi del nuovo tipo di calcolo : la loro imponenza dissolverò ogni vostro dubbio.

E' evidente che un tale modo di procedere non poteva sviluppare un'autentica esigenza di rigore . Quando si rifletta sullo scarso rigore dei processi dimostrativi adoperati dai grandi matematici del Settecento , vi è da rimanere stupiti non tanto dei risultati assurdi da essi in tal modo ottenuti , quanto dai numerosi autentici teoremi che , sia pure con qualche inesattezza di formulazione , essi riuscirono di fatto a scoprire . E' chiaro che un tale modo di procedere non avrebbe potuto proseguire a lungo senza dare luogo a disastrosi inconvenienti : è ciò di cui ci si comincerà ad accorgere alla fine del secolo e che verrà in piena luce verso il $1820-1830$ dando luogo ad una delle più radicali svolte nella storia del pensiero matematico .

L'analisi infinitesimale subì una svolta così importante da autorizzare l'affermazione che essa nacque come autentica scienza soltanto nella prima metà dell '‘Ottocento. Abbiamo detto che nel Settecento l'analisi matematica non era riuscita , malgrado i grandi progressi compiuti in sede tecnica , a darsi un assetto logicamente rigoroso ; i suoi successi , anche nel campo applicativo , erano incontestabili , ma sembrava impossibile trovare loro alcuna autentica garanzia razionale . La svolta realizzatasi nei decenni fra il 1820 **ed il** 1850 **è proprio consistita nella scoperta di questa garanzia , cioè nell'esatta definizione dei concetti base dell'analisi infinitesimale e nella sua ricostruzione in forma di edificio perfettamente rigoroso e coerente . I principali artefici di questa svolta furono : il tedesco Karl Friedrich Gauss , il norvergese Abel e soprattutto il grande analista francese Augustin Cauchy (** $1789-1857$ **). Ad essi vanno aggiunti il filosofo matematico Bernard Bolzano ed il tedesco Peter Gustav Dirichlet (** $1805-1859$ **) che diede un contributo decisivo alla diffusione dell'esigenza rigorista nelle università della Germania. I matematici testè ricordati , ed in particolare Cauchy , si resero perfettamente conto che il fondamento ultimo di tutta l'analisi era costituito dal concetto di limite , concetto particolarmente delicato perché richiede la precisazione del significato da attribuire all'asserto che una successione di infiniti valori (infinito potenziale) si approssima infinitamente ad un ben determinato valore , o limite della successione stessa .**

Famoso è, da questo punto di vista, il criterio di convergenza delle serie (somme di infiniti termini) dovuto a Cauchy . In base a questo criterio è possibile stabilire con esattezza quando una serie (che è il caratteristico degli algoritmi infiniti) risulta o no in grado di determinare effettivamente un valore da considerarsi quale sua somma. Poiché sia la derivata che l'integrale sono particolari limiti , è chiaro che la precisazione del concetto di limite permise la definizione esatta tanto dell'una quanto dell'altro e la dimostrazione rigorosa delle loro proprietà . Così fu possibile liberare l ' analisi infinitesimale dall'alone del mistero che la circondava e farne una scienza in completo possesso della ragione umana. E' importante sottolineare che la ricostruzione rigorosa dell'analisi, liberandola dal ricorso ad intuizioni più o meno vaghe provenienti dalla geometria e dalla meccanica , ne fece una scienza autonoma e cioè le permise di determinare con esattezza il proprio campo di indagine . La più grande creazione dei matematici moderni poté cosi assumere , in modo sempre più chiaro , l'aspetto di scienza pura , di scienza che si occupa esclusivamente di entità astratte ben definite e che può essere applicata alla fisica non in quanto direttamente scaturita dall'osservazione di questo o quel fenomeno ma solo in quanto si supponga che i fenomeni soddisfino a certe ben determinate condizioni .Dobbiamo segnalare una grande opera di Cauchy pubblicata nel 1821 **. Incoraggiato da Laplace e da altri matematici , egli scrisse il suo corso di analisi al Politecnico di Parigi . Questo libro fu , per molti anni , il libro classico dell'esattezza matematica . Perfino oggi troviamo in tutti i**

trattati seri del calcolo differenziale e integrale le definizioni di limite e di continuità date da Cauchy e la maggior parte di ciò che scrisse sulla convergenza delle serie infinite in quel corso di analisi . Ecco un estratto della prefazione, la quale indica lo spirito che guidò l’autore: << Ho cercato di dare ai metodi dell’analisi tutta l’esattezza che si esige in geometria in modo da non dovere mai ricorrere alle ragioni stiracchiate del formalismo dell’algebra >>

Considerazioni generali conclusive

La costruzione del calcolo infinitesimale ha luogo durante un lungo processo che si estende dai primi traduttori e commentatori di Archimede fino a Leibniz , Newton e Cauchy . Ogni passo si compie quando i tempi sono maturi per farne sentire l’interesse e per imporne la necessità. La prima scuola che raccoglie l’eredità di Archimede è la scuola italiana con Galileo Galilei , Cavalieri e Torricelli . Per più di 80 **anni , fra il** 1550 **ed il** 1634 **, la scuola italiana è la sola che si occupi di questioni infinitesimali (quadrature in quel primo periodo). Mentre la scuola italiana rimane ancora fiorente per altri** 13 **anni, grazie alle indagini di Cavalieri e Torricelli , sorge intorno al** 1634 **la scuola francese , che potremmo chiamare della geometria analitica perché i due maggiori rappresentanti di essa, Cartesio e Fermat , hanno aggiunto ai metodi adoperati dagli italiani, lo strumento potente della geometria analitica . Attorno a questi fioriscono Roberval e Pascal.**

Spenti dopo la metà di quel secolo gli ultimi echi della polemica tra i seguaci di Newton e di Leibniz , stabiliti in modo rigoroso i principi del calcolo infinitesimale per opera di Cauchy e della sua scuola nella prima metà del secolo scorso , la nuova scienza fu universalmente accolta nella forma in cui la presentano i recenti trattati e fornì la via maestra per discutere i problemi che ogni giorno pongono le matematiche pure ed applicate .