Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

DEFINIZIONE Dicesi **equazione differenziale ordinaria del primo ordine** una equazione nella quale figura come incognita una funzione $y(x)$ della sola variabile x e che stabilisca un legame fra la variabile x , la funzione $y(x)$ e la derivata $y'(x)$ di questa funzione .

La forma generale dell'equazione differenziale del primo ordine è la seguente :

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \textbf{[1]}$$

dove **F** è una funzione delle variabili x, $y(x)$, $y'(x)$ pensate indipendenti tra loro e definite in un insieme aperto $A \subseteq R^3$. Nell'equazione [1] possono non comparire la x, la y o entrambe, ma la $y'(x)$ deve essere sempre presente.

Se l'equazione [1] è risolta rispetto alla variabile $y'(x)$, assume il seguente aspetto:

$$y' = f(x, y) \qquad \textbf{[2]}$$

e diciamo che l'equazione differenziale del primo ordine è scritta in **forma normale** o in **forma canonica**. Ogni funzione $y = y(x)$ che sostituita, assieme alla sua derivata prima, nella data equazione differenziale trasforma l'equazione in una identità $F[x, y(x), y'(x)] = 0$ rappresenta una **soluzione** o un **integrale** dell'equazione differenziale [1] ed il suo grafico si chiama **curva integrale**.

Risolvere o **integrare** l'equazione differenziale **[1]** significa trovare tutte le sue soluzioni. L'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ possiede infinite soluzioni $y(x)$ che, di solito, sono espresse dalla formula $y = y(x, C)$ contenente una costante arbitraria **C**. Così una famiglia di soluzioni $y = y(x, C)$ è chiamata **soluzione generale** o **integrale generale** dell'equazione differenziale [1] .

Attribuendo alla costante **C** valori particolari otteniamo le **soluzioni particolari** o **integrali particolari** dell'equazione differenziale [1] .

Teorema di Cauchy

Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili x , y definita in un certo insieme aperto $D \subseteq R^2$ del piano xy ed ivi continua assieme alla derivata parziale rispetto ad y (f_y) . Sotto queste ipotesi , se (x_o, y_o) è un punto qualsiasi dell'insieme **D** , l'equazione differenziale $\boxed{y' = f(x,y)}$ ammette **una ed una sola soluzione** $y = y(x)$ definita in un opportuno intorno $I(x_o) =]a,b[=]x_o - h, x_o + h[$ del punto x_o soddisfacente la condizione:

$$\boxed{y(x_o) = y_0} \qquad [3]$$

I numeri x_o ed y_o sono detti **valori iniziali** per la soluzione $y = y(x)$ e la condizione [3] è detta **condizione iniziale** per questa soluzione .

Il problema di determinare la soluzione $y = y(x)$ soddisfacente la condizione iniziale [3] dicesi **problema di Cauchy** .

OSSERVAZIONE

Abbiamo visto che le soluzioni dell'equazione differenziale $\boxed{y' = f(x,y)}$ si possono esprimere mediante una famiglia di funzioni $y(x,c)$ dipendenti da un parametro reale **C** . Abbiamo detto anche che la funzione $y(x,c)$ è l'**integrale generale** dell'equazione differenziale [2] .

Fissato il punto $(x_o, y_o) \in D \subseteq R^2$, se esistono un intorno $I(x_o) =]a,b[=]x_o - h, x_o + h[$ del punto x_o ed una funzione $y :]a,b[\to R$ derivabile, tali che:

- $\forall\ x \in]a,b[\ \Rightarrow\ (x, y(x)) \in D$
- $y'(x) = f(x, y(x)) \ \forall\ x \in]a,b[$
- $y(x_o) = y_o$ (**condizione iniziale**)

diremo che la funzione $y(x)$ è una **soluzione** (**locale**) del **problema di Cauchy** :

$$y' = f(x,y) \quad y(x_o) = y_o$$

Nella pratica , per **trovare una soluzione locale del problema di Cauchy** si procede come segue :

1) si calcola l ' **integrale generale** $y(x,c)$ dell'equazione differenziale [2]

2) si determina **C** in modo che si abbia $y(x_o, C) = y_o$. Supponiamo di trovare per C il valore C_o

3) la **soluzione locale del problema di Cauchy** è: $y(x) = y(x, C_o)$

L'intorno $I(x_o) =]a,b[=]x_o - h, x_o + h[$ non è , in generale , un dato del problema , ma una incognita che viene trovata a posteriore , cioè dopo avere risolto l'equazione differenziale .

Quando, invece, è possibile fissare a priori (cioè prima della risoluzione dell'equazione differenziale) l'intervallo $I(x_o) =]a,b[=]x_o - h, x_o + h[$, si dice che il **problema di Cauchy** è risolubile **globalmente** in $I(x_o) =]a,b[=]x_o - h, x_o + h[$.

Interpretazione geometrica del teorema di Cauchy

La soluzione $y = y(x)$ soddisfacente la condizione [3] , la cui condizione è garantita dal teorema di Cauchy , rappresenta geometricamente una **curva integrale** passante per il punto $P_o(x_o, y_o)$.

TEOREMA

<< **Per ogni punto $P_o(x_o, y_o)$ di D passa una ed una sola curva integrale dell'equazione [2]** >>

Dal teorema enunciato segue che l'equazione differenziale [2] ammette **infinite** curve integrali, tali che per ogni dato punto di **D**, ne passi una sola.

Si osservi che il teorema di Cauchy garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione $y(x, C_o)$ soltanto in un conveniente intorno $I(x_o)$ del punto iniziale x_o.

Si dimostra che la **curva integrale** passante , ad esempio , per il punto $P_o(x_o, y_o)$ si prolunga fino ad incontrare la frontiera dell'insieme **D**, il quale è , pertanto attraversato da curve integrali che non si incontrano , in quanto per ogni punto di **D** ne passa una soltanto .

DEFINIZIONE: Si chiama **integrale generale** o **soluzione generale** dell'equazione differenziale $y' = f(x,y)$ una funzione $y = y(x, C)$ [4] della variabile **x** e di una costante arbitraria **C**, soddisfacente le seguenti condizioni :

1) verifica l'equazione differenziale , qualunque sia il valore numerico attribuito alla costante C

2) se $P_o(x_o, y_o)$ è un qualunque punto dell'insieme **D** , è possibile (in un solo modo) determinare un valore C_o per cui risulti : $y(x_o, C_o) = y_o$

A volte , può capitare che l'integrale generale dell'equazione [2] sia calcolato sotto **forma implicita** mediante una relazione del tipo: $y(x, y, C) = 0$

DEFINIZIONE: Si chiama **integrale particolare** o **soluzione particolare** dell'equazione differenziale [2] , ogni funzione $y(x) = y(x, C_o)$ [5] dedotta dalla soluzione generale $y(x) = y(x, C)$, sostituendo in quest'ultima funzione il generico valore della costante **C** col valore particolare ottenuto C_o in corrispondenza ad un **prefissato** punto iniziale $P_o(x_o, y_o)$ di D.

Integrali singolari o di frontiera per l'equazione differenziale $y' = f(x,y)$

Nelle ipotesi del teorema di Cauchy , comunque si fissi un punto $P_o(x_o,y_o)$ dell'insieme aperto **D** , e quindi interno a **D** , esiste uno ed un solo integrale dell'equazione differenziale [2] soddisfacente la condizione iniziale [3] . Supponiamo di scegliere il punto $P_o(x_o,y_o)$ sulla frontiera di **D** e di cercare ancora un integrale dell'equazione [2] soddisfacente alla [3] . In questo caso il teorema di Cauchy non è più applicabile in quanto esso è valido solo per punti interni del dominio della funzione $f(x,y)$. Tuttavia , supposta f continua in **D** e sulla frontiera di **D** , può darsi che esistano ugualmente una o più curve integrali soddisfacenti alla condizione [3] .

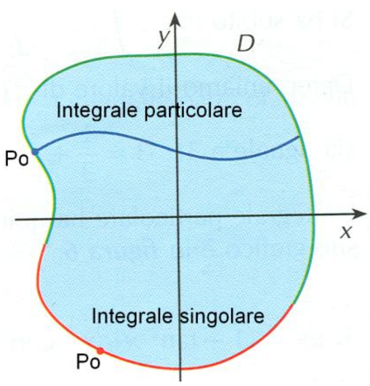
Si possono presentare due casi:

Primo caso La curva integrale passante per il punto $P_o(x_o,y_o)$ ha punti interni a **D** , La funzione $y(x) = y(x,C_o)$ rappresenta un **integrale particolare** dell'equazione differenziale [2] , in quanto esso si ottiene dall'integrale generale $y(x,c)$ per un valore particolare di C

Secondo caso : La curva integrale giace interamente sulla frontiera dell'insieme D . In questo caso l'integrale trovato rappresenta un **integrale singolare** dell'equazione differenziale [2] in quanto esso non potrà mai essere ricavato dall'integrale generale mediante la sostituzione della costante **C** con un suo valore particolare (e nemmeno per $C \to \infty$) .

DEFINIZIONE : Si chiama **integrale singolare** o **integrale di frontiera** dell'equazione differenziale [2] ogni eventuale integrale la cui corrispondente curva integrale risulta tracciata interamente sulla frontiera dell'insieme **D** .

Un **integrale singolare** è un **integrale particolare** che non può essere dedotto dall'**integrale generale** attribuendo alla costante **C** un valore particolare.



Concludendo possiamo affermare che l ' **integrale singolare** di una equazione differenziale del primo ordine $y' = f(x,y)$ è una funzione $y(x)$ il cui grafico coincide con la frontiera del dominio della funzione $f(x,y)$ o con una sua parte .

Equazioni differenziali a variabili separate

Una equazione differenziale del primo ordine si dice a **variabili separate** , in un certo insieme D , quando può essere scritta nella seguente forma: $A(x)\cdot dx+B(y)\cdot dy=0$ **[6]**

cioè quando il coefficiente del differenziale $d\,x$ è una funzione della sola **x** ed il coefficiente del differenziale $d\,y$ è una funzione della sola **y**.

La [6] può essere scritta anche nella seguente maniera: $B(y)\cdot y'(x)+A(x)=0$ **[7]**

L'**integrale generale** dell'equazione differenziale a variabili separate si ottiene integrando ambo i membri della [6] . Otteniamo: $\int A(x)\cdot dx+\int B(y)\cdot dy=C$ **[8]**

$3y^2dy=2xdx \qquad \int 3y^2\,dy = \int 2x\,dx \qquad y^3 = x^2 + C \qquad y = \sqrt[3]{x^2 + C}$

<<**Risolvere il seguente problema di Cauchy**: $\frac{dy}{y} = 3x^2dx \qquad y(0) = 2$ >>

$\int \frac{dy}{y} = \int 3x^2dx \qquad \ln|y| = x^3 + \ln|C| \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = x^3 \qquad \left|\frac{y}{C}\right| = e^{x^3} \qquad y=\pm C\cdot e^{x^3}=h\cdot e^{x^3}$

(se $C \in R$ allora anche $h = \pm C$ appartiene ad R) . $y(0) = 2 \Rightarrow 2 = h$

Abbiamo così risolto il problema di Cauchy proposto ottenendo il seguente **integrale particolare** :

$y = 2\cdot e^{x^3}$ che poteva essere ricavato anche utilizzando i seguenti integrali definiti:

$\int_2^y \frac{dy}{y} = \int_0^x 3x^2dx \qquad \ln y - \ln 2 = x^3$ [1] $\qquad \ln\frac{y}{2} = x^3 \qquad y = 2\cdot e^{x^3}$

Equazioni differenziali a variabili separabili

Spesso avremo a che fare con equazioni differenziali del primo ordine in cui le variabili non sono inizialmente separate ma lo possono essere mediante semplici operazioni algebriche .

Una equazione del primo ordine si dice a **variabili separabili** quando può essere scritta nella seguente forma canonica : $A(x)\cdot M(y)\cdot dx+B(x)\cdot N(y)\cdot dy=0$ **[9]**

cioè quando i coefficienti dei differenziali $d\,x$ e $d\,y$ sono entrambi i prodotti di una funzione della sola x per una funzione della sola y , non escludendo che il coefficiente del differenziale $d\,x$ possa essere funzione della sola x e quello del differenziale $d\,y$ possa essere funzione della sola y.

[1] Nell'equazione trovata non compare il valore assoluto nell'argomento del logaritmo in quanto la y è maggiore di 2

Una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili può presentarsi anche nella seguente forma: $A(x)\cdot M(y)+B(x)\cdot N(y)\cdot y'(x)=0$ **[10]**

o in una delle due seguenti forme : $y'(x) = A(x)\cdot B(y)$ oppure $y'(x) = \dfrac{A(x)}{B(y)}$ **[11]**

L'equazione [9] diventa una equazione differenziale a variabili separate se dividiamo ambo i membri per il prodotto $M(y)\cdot B(x)$, ricordando che la divisione è lecita in un insieme **D** dove né $M(y)$ né $B(x)$ si annullano. Dopo la divisione otteniamo: $\dfrac{A(x)}{B(x)}\cdot dx+\dfrac{N(y)}{M(y)}\cdot dy=0$ **[12]**

Poi si procede come nel caso precedente delle equazioni a variabili separate .

Se abbiamo $B(\alpha) = 0$ oppure $M(\beta) = 0$ allora le equazioni $x = \alpha$, $y = \beta$ possono essere sia **integrali particolari** che **integrali singolari** . Si dovrà decidere caso per caso .

Saranno **integrali particolari** se tali equazioni potranno essere dedotte dall'integrale generale assegnando alla costante **C** valori particolari (al limite anche il valore infinito) .

$$x(y+1)dx-(x^2+1)ydy=0$$

Separando le variabili possiamo scrivere l'equazione proposta nella forma:

$$\frac{x}{x^2 + 1}dx - \frac{y}{y + 1}dy = 0$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 1}dx = \int \frac{y}{y + 1}dy \qquad \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) = \int \left(1 - \frac{1}{y + 1}\right)dy$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) = y - \ln|y + 1| + \ln|C| \qquad \ln\sqrt{x^2 + 1} = y - \ln\left|\frac{y + 1}{C}\right|$$

$$y = \ln\left|\frac{(y + 1)\cdot\sqrt{x^2 + 1}}{C}\right| \qquad C\cdot e^y = (y + 1)\cdot\sqrt{x^2 + 1}$$ (**integrale generale**) [2]

$y = -1$ è un **integrale particolare** per l'equazione proposta in quanto esso può essere dedotto dall'integrale generale quando alla costante **C** attribuiamo il valore zero.

$$C = 0 \quad\Rightarrow\quad y + 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad y = -1$$

$$y'(x)=y^2 \qquad \frac{dy}{dx} = y^2 \qquad \frac{1}{y^2}dy = dx \qquad \int \frac{1}{y^2}dy = \int dx + C \qquad -\frac{1}{y} = x + C \qquad y=-\frac{1}{x+C}$$

[2] In questo caso l'**integrale generale** non può essere espresso in forma esplicita

<< **Risolvere la seguente equazione differenziale a variabili separabili** : $y\,dx - x\,dy = 0$ >>

$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx \quad \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \quad \ln|y| = \ln|Cx| \quad |y| = |Cx|$

$$y = \pm Cx$$

Ma **C** è una costante reale relativa e quindi è lecito porre : $\pm C = h$ $y=hx$ è l ' **integrale generale** dell'equazione differenziale proposta .

Questa equazione differenziale non ammette **integrale singolare** in quanto il dominio dell'equazione è R^2 , cioè l'intero piano xy , la cui frontiera è la **retta impropria** , cioè l'insieme dei punto impropri del piano xy .

<< **Risolvere il seguente problema di Cauchy** $y\,dx - x\,dy = 0$ $y(1) = 3$ >>

$y(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = h\cdot 1 \quad \Rightarrow \quad h = 3$ La curva integrale passante per il punto $P_o(1,3)$ ha equazione : $y = 3x$. Si può procedere anche nella seguente maniera :

$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx \quad \ln y - \ln 3 = \ln x - \ln 1 \quad \ln y = \ln 3x \quad y = 3x$ [3]

Integrale generale , integrale particolare , integrale singolare

Le equazioni differenziali a variabili separabili possono essere sempre ricondotte alla seguente forma canonica o normale: $y'(x)=A(x)\cdot B(y)$ **[11]** ed ammettono come **integrale generale** la seguente soluzione : **[13]** $\int \frac{1}{B(y)}dy=\int A(x)dx+K$

Dopo avere calcolato l ' **integrale generale** bisogna risolvere l'equazione $B(y) = 0$ e vedere se essa ammette soluzioni. Se α è una di queste, cioè se $B(\alpha) = 0$ allora l'equazione $y = \alpha$ è una soluzione dell'equazione proposta in quanto risulta $y'(x) = 0$ ed anche $0 = A(\alpha)\cdot 0$, $0 = 0$

Bisogna poi stabilire solo se $y = \alpha$ rappresenta un **integrale particolare** o un **integrale singolare** .

$y'(x)=\frac{y-1}{x} \quad \ln|y - 1| = \ln|x| + \ln|K| \quad |y - 1| = |Kx| \quad y - 1 = \pm Kx$ ponendo $C = \pm K$ otteniamo l'**integrale generale**: $y=1+Cx$ $\quad B(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1$ **integrale particolare** in può essere ricavato dall'integrale generale per $C = 0$

[3] Essendo x > 1 ed y > 3 l'argomento di ciascun logaritmo è sicuramente positivo e quindi non occorre il valore assoluto

$y'(x)=y^2$ come abbiamo visto in precedenza il suo integrale generale è $y=-\dfrac{1}{x+C}$ [*]

oppure $y=-\dfrac{h}{kx+h}$ [**] se poniamo $C = \dfrac{h}{k}$

$B(y) = 0 \Rightarrow y = 0$ che si ottiene dall'integrale generale [*] per $C = \infty$ o dall'integrale generale [**] per $k = 0$. Si tratta pertanto di un **integrale particolare** .

$y'(x)=\sqrt{1-y^2}$ $\quad \int \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = \int dx + C \quad$ $y=\sin(x+C)$

Le soluzioni dell'equazione $B(y) = 0$ sono $y = \pm 1$ e non rientrano , nemmeno come caso limite , nella famiglia delle sinusoidi sopra scritta . Questa volta siamo in presenza di due **integrali singolari**

Il dominio dell'equazione differenziale proposta si ottiene risolvendo la seguente inequazione : $1 - y^2 \geq 0$ per $-1 \leq y \leq +1$ Il dominio richiesto è la parte di piano interna alla striscia individuata dalle rette $y = \pm 1$, rette che rappresentano la frontiera del dominio .

CONCLUSIONE

Nei primi due esempi le soluzioni dell'equazione $B(y)=0$ danno luogo ad **integrali particolari** , nel terzo esempio le soluzioni dell'equazione $B(y)=0$ rappresentano **integrali singolari** ed esprimono la frontiera dell'insieme di esistenza (**dominio**) dell'equazione differenziale proposta .

Equazione lineare del primo ordine omogenea

E' una equazione differenziale riconducibile alla seguente forma canonica:

$$y'(x)+a(x)\cdot y(x)=0 \qquad [14]$$

Si tratta di una **equazione omogenea a variabili separabili** che sappiamo integrare .

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)\cdot y\, , \frac{1}{y}dy = -a(x)\cdot dx \;,\; \int \frac{1}{y}dy = -\int a(x)\cdot dx + k=\ln h \;,\; \ln y - \ln h = -\int a(x)\cdot dx$$

$$\ln\frac{y}{h} = -\int a(x)\cdot dx \;,\; \frac{y}{h} = e^{-\int a(x)\cdot dx} \quad y = h\cdot e^{-\int a(x)\cdot dx} \quad y^*(x)=h\cdot e^{-\int a(x)\cdot dx} \qquad [15]$$

$y^*(x)$ è l ' **integrale generale** dell'equazione differenziale **[14]** .

$$y'(x)+(2x^2+1)y=0 \qquad y^*(x) = h\cdot e^{-\int(2x^2+1)\cdot dx} = h\cdot e^{-\frac{2}{3}x^3-x}$$

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int (2x^2+1)dx \;\Rightarrow\; \ln y-\ln h=-\frac{2}{3}x^3-x \qquad y = h\cdot e^{-\frac{2}{3}x^3-x}$$

$y = 0$ si ottiene per $h = 0$ e quindi rappresenta un **integrale particolare** .

Equazione lineare del primo ordine completa

Una equazione differenziale si dice **lineare del primo ordine completa** quando è riconducibile alla seguente forma canonica: $y'(x)+a(x)\cdot y(x)=f(x)$ **[16]**

dove $a(x)$ ed $f(x)$ sono funzioni continue in un opportuno intervallo prefissato . La funzione $y(x)$ è l'**incognita** dell'equazione differenziale. L'**integrale generale** $y(x)$ dell'equazione differenziale [16] è dato dalla somma dell'**integrale generale** $y^*(x)$ dell'equazione omogenea associata e di un **integrale particolare** $y_p(x)$ dell'equazione differenziale completa .

Siccome il calcolo dell'integrale particolare $y_p(x)$ non sempre è agevole è preferibile utilizzare , per integrare l'equazione differenziale [16] il **metodo della variazione della costante arbitraria** (o **metodo di Lagrange**) o il **metodo diretto** detto anche **metodo della somiglianza** o **metodo di Cauchy** o **metodo della forma del termine noto** .

Consideriamo l'equazione omogenea associata: $y'(x)+a(x)\cdot y(x)=0$ **[14]**

il cui integrale generale è: $y^*(x) = h\cdot e^{-\int a(x)\cdot dx}$ **[15]**

Vediamo adesso, se per caso, l'integrale generale dell'equazione differenziale [16] ha come integrale generale una funzione formalmente identica alla funzione [15] che è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata.

Il tentativo ha esito positivo se sostituiamo la costante arbitraria **h** con la funzione $\gamma(x)$ da determinare, vediamo cioè se la funzione $y(x)=\gamma(x)\cdot e^{-\int a(x)\cdot dx} = \gamma(x)\cdot A(x)$ **[17]**

(ho posto per comodità $A(x) = e^{-\int a(x)\cdot dx}$) può essere considerata l'**integrale generale** dell'equazione differenziale [16] .

La funzione [17] è l'**integrale generale** dell'equazione differenziale [16] se essa, assieme alla sua derivata prima , verifica l'equazione [16] . Ricordando che: $A'(x) = -a(x)\cdot A(x)$ possiamo scrivere: $y'(x)=\gamma'(x)\cdot A(x)+\gamma(x)\cdot A'(x)=\gamma'(x)\cdot A(x)+a(x)\cdot A(x)\cdot \gamma(x)$

Sostituendo nella [16] otteniamo: $\gamma'(x)\cdot A(x)-a(x)\cdot A(x)\cdot \gamma(x)+a(x)\cdot A(x)\cdot \gamma(x)=f(x)$

Semplificando otteniamo: $\gamma'(x)\cdot A(x) = f(x)$, [$\gamma'(x) = \dfrac{d\,\gamma(x)}{d\,x}$] $\dfrac{d\,\gamma(x)}{d\,x} = \dfrac{f(x)}{A(x)}$

$d\,\gamma(x) = \dfrac{f(x)}{A(x)}\cdot dx$ Integrando ambo i membri otteniamo : $\int d\,\gamma(x) = \int \dfrac{f(x)}{A(x)}\cdot dx$

$\gamma(x) = \int \dfrac{f(x)}{A(x)}\cdot dx$ Sostituendo nella [17] otteniamo:

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\cdot\left[\int e^{\int a(x)dx}\cdot f(x)\cdot dx + C\right] \qquad \textbf{[18]}$$

La funzione $y(x)$ della formula [18] è l'**integrale generale** dell'equazione differenziale [16].

Quindi per calcolare l'**integrale generale** dell'equazione differenziale [16] basta applicare la formula [18].

Tuttavia, nel caso di risoluzione di una equazione differenziale lineare del primo ordine completa, è consigliabile non applicare direttamente la formula trovata (anche quando uno la riuscisse a ricordare) ma effettuare tutti i calcoli fino alla determinazione dell'**integrale generale** richiesto. [4]

[4] Le equazioni lineari del primo ordine non ammettono integrali singolari e l'integrale generale riassume in sé tutti gli integrali dell'equazione

Osservazione: Trovato l'integrale generale $y^*(x) = h \cdot e^{-\int a(x) \cdot dx} = h \cdot A(x)$ dell'equazione omogenea associata vedo se posso trovare un integrale particolare dell'equazione completa avente la seguente struttura: $y(x) = \frac{\gamma(x)}{x}$. Per calcolare l'integrale generale dell'equazione lineare del primo ordine completa possiamo procedere in due modi:

(01) Se la funzione $\gamma(x)$ è priva della costante additiva, allora $y(x) = \frac{\gamma(x)}{x} = y_p(x)$ è un integrale particolare dell'equazione differenziale completa. Per calcolare l'**integrale generale** $y(x)$ dell'equazione differenziale completa $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$ bisogna applicare la seguente formula: $y(x) = y^*(x) + y_p(x)$.

(2) Se la funzione $\gamma(x, C)$ contiene la costante additiva, allora l'**integrale generale** $y(x)$ dell'equazione differenziale completa basta applicare la seguente formula: $y(x) = \gamma(x, C) \cdot A(x)$

Problema di Cauchy per le equazioni lineari del primo ordine

Sia x_o un punto di un intervallo dove $a(x)$ e $f(x)$ sono continue . Per ogni numero reale x_o è possibile scegliere in maniera univoca la costante **C** in modo da soddisfare la condizione iniziale $y(x_o) = y_o$. Ciò equivale a risolvere il seguente sistema , detto **problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x) \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

Sintesi: Per risolvere l'equazione lineare completa del primo ordine $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$ si procede come segue:

01) Si calcola l'integrale generale $y^*(x) = h \cdot e^{-\int a(x) \cdot dx}$ dell'equazione omogenea associata $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = 0$ che è un'equazione differenziale a variabili separabili

02) Si sostituisce nell'integrale generale $y^*(x) = h \cdot e^{-\int a(x) \cdot dx}$ la costante h con la funzione incognita $\gamma(x)$ e si determina $\gamma(x)$ in modo che la nuova funzione $y(x) = \gamma(x) \cdot e^{-\int a(x) \cdot dx}$ sia l'integrale generale dell' equazione lineare completa del primo ordine $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$

03) Si calcola la derivata prima $y'(x)$ della funzione $y(x) = \gamma(x) \cdot e^{-\int a(x) \cdot dx}$ e sostituiamo nell'equazione $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$ i valori di $y(x)$ e di $y'(x)$, imponendo che l'uguaglianza trovata sia una identità.

04) Questo ci consente di determinare in maniera univoca il valore della funzione $\gamma(x)$.

Osservazione: Per la risoluzione dell'equazione lineare completa del primo ordine $y'(x)+a(x)\cdot y(x)=f(x)$ è più conveniente applicare il **metodo della variazione della costante arbitraria**

$y'(x)+\frac{1}{x}y=x^3$ $\quad a(x)=\frac{1}{x}$ $\quad f(x)=x^3$ Scrivo l'equazione omogenea associata:

$$y'(x)+\frac{1}{x}y=0 \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x} \qquad \ln y=-\ln x+\ln C \qquad \ln xy=\ln C \qquad xy=C \qquad y^*(x)=\frac{C}{x}$$

$y(x)=\frac{\gamma(x)}{x}$ $\quad y'=\frac{x\cdot\gamma'-\gamma}{x^2}=\frac{\gamma'}{x}-\frac{\gamma}{x^2}$ Sostituendo nell'equazione proposta otteniamo:

$$\frac{\gamma'}{x}-\frac{\gamma}{x^2}+\frac{\gamma}{x^2}=x^3 \qquad \frac{\gamma'}{x}=x^3 \qquad \gamma'=x^4 \qquad d\gamma=x^4\cdot dx \qquad \int d\gamma=\int x^4\cdot dx$$

$$\gamma(x)=\int x^4\cdot dx=\frac{1}{5}x^5+C \qquad y(x)=\frac{\gamma(x,C)}{x} \quad \Rightarrow \qquad y(x)=\frac{1}{5}x^4+\frac{C}{x}$$

Se nella risoluzione dell'integrale $\gamma(x)=\int x^4\cdot dx=\frac{1}{5}x^5+C$ tralascio la costante C, ottengo un integrale particolare $y_p(x)=\frac{1}{5}x^5$ dell'equazione differenziale proposta $y'(x)+\frac{1}{x}y=x^3$.

L'**integrale generale** $y(x)$ di tale equazione è dato dalla somma dell'**integrale generale** $y^*(x)$ dell'equazione omogenea associata e di un **integrale particolare** $y_p(x)$ dell'equazione differenziale completa. $y(x)=y^*(x)+y_p(x)$. Nel nostro abbiamo:

$$y(x)=\frac{C}{x}+\frac{1}{5}x^5$$

che è lo stesso risultato ottenuto in precedenza.

Osservazione: Se la funzione $\gamma(x)$ è priva della costante additiva, allora $y(x)=\frac{\gamma(x)}{x}=y_p(x)$ è un integrale particolare dell'equazione differenziale completa. Per calcolare l'**integrale generale** $y(x)$ dell'equazione differenziale completa $y'(x)+a(x)\cdot y(x)=f(x)$ bisogna applicare la seguente formula: $y(x)=y^*(x)+y_p(x)$. Se la funzione $\gamma(x,C)$ contiene la costante additiva, allora l'**integrale generale** $y(x)$ dell'equazione differenziale completa basta applicare la seguente formula: $y(x)=\gamma(x,C)\cdot A(x)$

Equazione lineare del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti

E' una equazione riconducibile alla seguente forma:

$$a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0 \qquad y^*(x) = \begin{cases} A \cdot e^{\lambda_1 x} + B \cdot e^{\lambda_2 x} & se\ \lambda_1 \wedge \lambda_2 \text{ radici reali e distinte} \\ A \cdot e^{\lambda x} + Bx \cdot e^{\lambda x} = (A + Bx) \cdot e^{\lambda x} & se\ \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \\ (A \cdot \cos qx + B \cdot \sin qx) \cdot e^{\lambda x} & se\ \lambda = p \pm qi \end{cases} \qquad [19]$$

con **a, b, c** costanti numeriche reali. Per trovare l' **integrale generale** dell'equazione $[19]$ basta trovare due integrali particolari linearmente indipendenti. La natura dell'equazione proposta ci suggerisce la ricerca tra le funzioni del tipo $y(x) = e^{\lambda x}$ con λ costante reale.

Infatti, funzioni di questo tipo hanno derivate prime e seconde che assomigliano alla funzione di partenza e che, quindi, moltiplicate per opportuni numeri **a, b, c** possono dare una funzione identicamente nulla. Pertanto se $y(x) = e^{\lambda x}$ è una soluzione dell'equazione [19], derivando due volte abbiamo: $y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ $\qquad y''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$

Sostituendo nell'equazione differenziale $[19]$ otteniamo:

$$a \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + b \cdot \alpha \cdot e^{\lambda x} + c \cdot e^{\lambda x} = 0 \qquad \text{cioè:} \qquad e^{\lambda x} \cdot \left(a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c \right) = 0$$

$$e^{\lambda x} \neq 0\ \forall\ x \in R \qquad \Rightarrow \qquad a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0 \qquad [20]$$

L'equazione in λ così ottenuta dicesi **equazione caratteristica** dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea.

Le radici λ_1, λ_2 dell'equazione $[20]$ possono essere **reali e distinte**, **reali e coincidenti**, **complesse e coniugate** a seconda che il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ sia rispettivamente positivo, nullo, negativo. Si possono presentare tre casi:

PRIMO CASO: Le radici λ_1, λ_2 dell'equazione [20] sono **reali e distinte**.

L'equazione $[19]$ ha come **integrali particolari** le funzioni: $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ $\quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$

che sono fra loro **linearmente indipendenti**. L'**integrale generale** dell'equazione differenziale $[19]$ è: $y^*(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$ $\qquad [21]$

Determinare la funzione $y(x)$ che soddisfa l'equazione differenziale e le condizioni iniziali costituisce il cosiddetto **problema di Cauchy**.

$y''-y'-2y=0$ $\quad \lambda^2-\lambda-2=0 \quad \lambda_1=-1 \quad \alpha_2 = 2 \quad y^*(x)=c_1\cdot e^{-x}+c_2\cdot e^{2x}$

Se le **condizioni iniziali** sono $y(0) = 2$, $y'(0) = -5$ allora la corrispondente soluzione particolare (**I.P.**) si ricava imponendo le seguenti condizioni: $\begin{cases} y(x) = c_1\cdot e^{-x} + c_2\cdot e^{2x} \\ y'(x) = -c_1\cdot e^{-x} + 2c_2\cdot e^{2x} \end{cases}$

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -c_1 + 2c_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

L'**integrale particolare** associato alle condizioni iniziali $y(0) = 2$, $y'(0) = -5$ è: $y_p(x)=3\cdot e^{-x}-e^{2x}$

SECONDO CASO: Le radici λ_1, λ_2 dell'equazione [20] sono **reali e coincidenti**.

$$\left(\lambda_1=\lambda_2=\lambda=-\frac{b}{2a}\right) \qquad y_1(x) = e^{\lambda x} \quad , \quad y_2(x) = x\cdot e^{\lambda x}$$

L'**integrale generale** della **[19]** è: $y^*(x) = c_1\cdot e^{\lambda x} + c_2\cdot x\cdot e^{\lambda x} = (c_1 + c_2\cdot x)\cdot e^{\lambda x}$ [22]

$y''-6y'+9y=0 \quad \lambda^2-6\lambda+9=0 \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda=3 \quad y^*(x)=(c_1+c_2\cdot x)\cdot e^{3x}$

TERZO CASO: Le radici $\lambda_1 = p-q\cdot i$ e $\lambda_2 = p+q\cdot i$ sono **complesse e coniugate**.

e quindi l' **integrale generale** dell'equazione omogenea [1] è:

$$y^*(x)=C_1\cdot e^{px}\cos qx+C_2\cdot e^{px}\sin qx=(C_1\cdot\cos qx+C_2\cdot\sin qx)\cdot e^{px} \qquad \textbf{[23]}$$

In quanto **due integrali particolari fra loro linearmente indipendenti** ci vengono forniti dalle due seguenti funzioni: $y_1 = e^{px}\cdot\cos qx$ $\qquad y_2 = e^{px}\cdot\sin qx$

$y''-4y'+13y=0 \quad \lambda^2-4\lambda+13=0 \quad \lambda_1=2-3i \quad \lambda_2=2+3i$

$$y^*(x)=e^{2x}\cdot(C_1\cdot\cos 3x+C_2\cdot\sin 3x)$$

Equazione lineare del secondo ordine completa a coefficienti costanti

E' una equazione riconducibile alla seguente forma: $a\cdot y''(x)+b\cdot y'(x)+c\cdot y(x)=f(x)$ [24]

con **a, b, c** costanti numeriche reali. Per ipotesi sono note le tre costanti **a, b ,c** e la funzione $f(x)$.

<<L'**integrale generale** $y(x)$ **dell'equazione completa si ottiene aggiungendo all' integrale generale** $y^*(x)$ **dell'equazione omogenea associata un integrale particolare** $y_p(x)$ **dell'equazione completa**>>.

L'**integrale particolare** $y_p(x)$ lo possiamo calcolare:

01) applicando il **metodo di Lagrange** o della **variazione delle costanti arbitrarie**

02) oppure tenendo presente la particolare struttura della funzione $f(x)$ (**metodo di Cauchy** o **della forma del termine noto o dei coefficienti indeterminati**).

Metodo di Lagrange

Per applicare questo metodo dobbiamo conoscere l'**integrale generale** della corrispondente equazione omogenea. Il **metodo di Lagrange** è applicabile sia se **a,b,c** sono **costanti** sia se sono delle **funzioni** della x.

Nella pratica però questo metodo è conveniente solo quando l'equazione omogenea associata è a **coefficienti costanti**, in quanto in questo caso sappiamo calcolare l'**integrale generale**.

Trovati gli **integrali particolari** $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ dell'equazione omogenea associata possiamo scrivere il suo **integrale generale** nella seguente maniera: $y^*(x)=c_1 \cdot y_1(x)+c_2 \cdot y_2(x)$ [5]

Poi cercheremo di trovare un **integrale particolare** dell'equazione [24] avente la seguente struttura:

$$y_p(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x) \qquad \textbf{[25]}$$

dove $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$ sono due funzioni delle **x** da determinare imponendo che la funzione $y_p(x)$ sia soluzione dell'equazione differenziale [24] ed $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ sono due integrali particolari linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata $a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$.

Risolvendo il sistema : $\begin{cases} y_1(x) \cdot \gamma_1'(x) + y_2(x) \cdot \gamma_2'(x) = 0 \\ y_1'(x) \cdot \gamma_1'(x) + y_2'(x) \cdot \gamma_2'(x) = f(x) \end{cases}$ ci troviamo prima le funzioni $\gamma_1'(x)$ e $\gamma_2'(x)$ e , successivamente , attraverso altre due integrazioni , determiniamo le funzioni $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$.

L'**integrale generale** dell'equazione differenziale **[24]** risulta uguale a: $y(x) = y_p(x)+y^*(x)$

$$y'' + y = tgx \qquad y'' + y = 0 \qquad \alpha^2 + 1 = 0 \qquad \alpha = \pm i \qquad y^*(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot sin x$$

$$y_1(x) = \cos x \qquad y_2(x) = sin x \qquad y_p(x)=\gamma_1(x)\cdot \cos x+\gamma_2(x)\cdot \sin x$$

---

[5] $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ debbono essere linearmente indipendenti , cioè tali che: $c_1, c_2 \neq 0$ e $c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) \neq 0$

Il sistema da risolvere è: $\begin{cases} (\cos x)\cdot\gamma_1'(x) + (\sin x)\cdot\gamma_2'(x) = 0 \\ (-\sin x)\cdot\gamma_1'(x) + (\cos x)\cdot\gamma_2'(x) = tg\,x \end{cases}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ tg\,x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$\gamma_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \qquad W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & tg\,x \end{vmatrix} = \sin x \quad \gamma_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} = \sin x$$

$$\int \gamma_1'(x)dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx \qquad \gamma_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)dx = \sin x - \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + k_1$$

$\int \gamma_2'(x)dx = \int \sin x \cdot dx \quad \gamma_2(x) = \int \sin x \cdot dx = -\cos x + k_2$ dove k_1 e k_2 sono due costanti arbitrarie .

$$y_p(x) = \left[\sin x - \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos x$$

$$y(x) = y_p(x) + y^*(x) = \left[\sin x - \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos x + c_1\cdot\cos x + c_2\cdot\sin x$$

$$y(x) = -(\cos x)\cdot\ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + c_1\cdot\cos x + c_2\cdot\sin x$$

Dimostrazione: Noi dobbiamo determinare due funzioni $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$ che debbono verificare l'equazione [24] . Questo ci dà una relazione tra le due funzioni incognite $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$. Ma , in generale, per determinare due quantità incognite noi dobbiamo avere due relazioni. La seconda relazione la possiamo introdurre arbitrariamente. Derivando l'uguaglianza [25] otteniamo:

$$y' = y_1'\cdot\gamma_1 + y_2'\cdot\gamma_2 + y_1\cdot\gamma_1' + y_2\cdot\gamma_2'$$

Può essere molto conveniente di imporre come seconda relazione tra $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$ la condizione che l'espressione della $y'(x)$ sia formalmente identica all'espressione dell'integrale particolare $y_p(x)$, cioè alla [25] . Questo obiettivo ci impone di porre: $y_1\cdot\gamma_1' + y_2\cdot\gamma_2' = 0$ **[A]**

Allora: $y'(x) = y_1'\cdot\gamma_1 + y_2'\cdot\gamma_2$ **[B]** Adesso ci calcoliamo la derivata seconda della funzione $y(x)$: $y''(x) = \gamma_1'\cdot y_1' + \gamma_1\cdot y_1'' + \gamma_2'\cdot y_2' + \gamma_2\cdot y_2''$

Sostituendo $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ nella [24] otteniamo:

$$a[\gamma_1'\cdot y_1' + \gamma_1\cdot y_1'' + \gamma_2'\cdot y_2' + \gamma_2\cdot y_2''] + b[y_1'\cdot\gamma_1 + y_2'\cdot\gamma_2] + c[\gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x)] = f(x)$$

$$\gamma_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + \gamma_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(\gamma_1'\cdot y_1' + \gamma_2'\cdot y_2') = f(x)$$

Le espressioni presenti all'interno delle parentesi rotonde sono nulle in quanto le funzioni $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione omogenea $a\cdot y''(x) + b\cdot y'(x) + c\cdot y(x) = 0$.

Pertanto , perché la funzione $y_p(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x)$ soddisfi l'equazione [24] deve essere verificata la condizione: $\boxed{y_1'(x)\cdot\gamma_1'(x) + y_2'(x)\cdot\gamma_2'(x) = f(x)}$ **[C]**

Per determinare le funzioni $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$ dobbiamo tenere presente le condizioni [A] e [C] e quindi bisogna risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y_1(x)\cdot\gamma_1'(x) + y_2(x)\cdot\gamma_2'(x) = 0 \\ y_1'(x)\cdot\gamma_1'(x) + y_2'(x)\cdot\gamma_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad \textbf{[26]}$$

Se il determinante (detto **Wronskiano**) del sistema di equazioni [26] è diverso da zero, allora possiamo determinare in maniera univoca le funzioni $\gamma_1'(x)$ e $\gamma_2'(x)$ che, con due successive integrazioni, ci consentono di individuare le funzioni $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \ (\textbf{Wronskiano}) \quad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}$$

$$\gamma_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} \qquad \gamma_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx \qquad \gamma_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} \qquad \gamma_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx$$

Se vengono date le condizioni iniziali abbiamo:

$$\gamma_1(x) = \int_{x_o}^{x} \frac{W_1(x)}{W(x)}dx \quad \gamma_2(x) = \int_{y_o}^{y} \frac{W_2(x)}{W(x)}dx \qquad \boxed{y_p(x) = y_1(x)\int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx}$$

L'**integrale generale** dell'equazione differenziale **[24]** risulta uguale a: $\boxed{y(x) = y_p(x) + y^*(x)}$

Osservazione: Se, quando integriamo le funzioni $\gamma_1'(x)$ e $\gamma_2'(x)$, noi introduciamo le corrispondenti costanti arbitrarie, allora otteniamo direttamente l'integrale generale dell'equazione differenziale [24], che può essere scritto nella seguente maniera:

$$y_p(x) = y_1(x)\left[\int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx + h\right] + y_2(x)\left[\int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx + k\right]$$

Come è facile intuire, il metodo appena esposto per la determinazione di un integrale particolare $y_p(x)$ ha il grave inconveniente di ridursi alle integrazioni: $\int \gamma_1'(x)dx$, $\int \gamma_2'(x)dx$

che, spesso, presentano notevoli difficoltà. Per tale ragione esporremo, in seguito, un metodo mediante il quale tali integrazioni si possono evitare. Tale metodo può essere applicato quando il termine noto $f(x)$ dell'equazione differenziale assume forme particolari.

Osservazione: Se in $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$ incorporiamo le costanti k_1 e k_2, allora $y_p(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x)$ è l'**integrale generale** $y(x)$ dell'equazione differenziale proposta. Infatti:

$$y(x) = \left[sin\,x - \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + k_1 \right]\cdot\cos x + sin\,x\cdot(-\cos x + k_2) + c_1\cdot\cos x + c_2\cdot sin\,x$$

$$y(x) = -(\cos x)\cdot\ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + k_1\cdot\cos x + k_2\cdot sin\,x$$

è una funzione identica a quella trovata precedentemente se poniamo $c_1 = k_1$ e $c_2 = k_2$

Metodo di Cauchy o della forma del termine noto o dei coefficienti indeterminati

Serve per calcolare un **integrale particolare** dell'equazione differenziale [24]

- $f(x) = b_o x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots\cdots + b_k = P_k(x)$ $\qquad y_p(x) = \begin{cases} Q_k(x) \quad se\,\lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_2 \neq 0 \quad (c \neq 0) \\ x\cdot Q_k(x)\,se\,\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 \neq 0 \quad (c = 0) \\ x^2\cdot Q_k(x)\,se\,\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (b = c = 0) \end{cases}$

$P_k(x)$ = polinomio di grado k $\quad a\cdot\lambda^2 + b\cdot\lambda + c = 0 \quad Q_k(x) = A_o x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots\cdots + A_k$

con $A_o, A_1, \cdots, A_{k-1}, A_k$ da determinare applicando il principio di identità dei polinomi.

<<Se il termine noto $f(x)$ dell'equazione differenziale lineare completa del secondo ordine è un polinomio, allora un suo integrale particolare ci viene dato da un polinomio $Q_k(x)$ avente lo stesso grado **k** (se $c \neq 0$) o da un polinomio di grado $k + 1$ (se $c = 0$) o da un polinomio avente grado $k + 2$ (se $b = c = 0$) >>

$$y_p(x) = x^r\cdot Q_k(x) = x^r\left(A_o x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots\cdots + A_k\right) \qquad \text{con } r = 0 \vee r = 1 \vee r = 2$$

dove $Q_k(x)$ rappresenta un polinomio di grado k, cioè un polinomio avente lo stesso grado di $f(x)$, **r** rappresenta l'**ordine di molteplicità** della radice **zero** dell'equazione caratteristica $a\cdot\lambda^2 + b\cdot\lambda + c = 0$. $\quad c \neq 0 \Rightarrow r = 0 \quad c = 0 \Rightarrow r = 1 \quad b = c = 0 \Rightarrow r = 2$

Sostituendo nell'equazione [24] le espressioni di $y_p(x)$, $y_p'(x)$, $y_p''(x)$ ed applicando il principio di identità dei polinomi ci ricaviamo i valori delle costanti A_k e quindi dell'integrale particolare $y_p(x)$

$y'' - 2y' + y = 1 + x \quad y'' - 2y' + y = 0 \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad f(x) = x + 1 \quad k = 1$

$y^*(x) = (c_1 + c_2 x)e^x$, $y_p(x) = x^r\cdot Q(x) = A_o x + A$ $[r = 0 , k = 1]$, $y_p'(x) = A_o$ $y_p''(x) = 0$

$-2A_o + A_o x + A = 1 + x$, $A_o x + A - 2A_o = 1 + x$, $A_o = 1$ $A = 3$ $y_p(x) = x + 3$

$$y(x) = x + 3 + (c_1 + c_2 x)e^x$$

Se le **condizioni iniziali** sono: $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$ otteniamo:

$$y'(x) = 1 + (c_1 + c_2 x)e^x + c_2 e^x \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + c_2 + 1 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = -3 \end{cases}$$

$$y(x) = x + 3 - (1 + 3x)e^x$$

- $f(x) = h \cdot e^{\beta x}$ con $h, \beta \in R$ noti $\quad y_p(x) = \begin{cases} A \cdot e^{\beta x} & se \ \beta \neq \lambda_1 \wedge \beta \neq \lambda_2 \\ Ax \cdot e^{\beta x} & se \ \beta = \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ Ax^2 \cdot e^{\beta x} & se \ \beta = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$

Un **integrale particolare** dell'equazione differenziale [24] assume la forma:

$y_p(x) = A \cdot x^k \cdot e^{\beta x}$ con **k** assegnato ed **A** da determinare. In particolare risulta:

a) $k = 0$ se β non è radice dell'equazione caratteristica associata $\beta \neq \lambda_1$ $\beta \neq \lambda_2$

b) $k = 1$ se β è radice semplice dell'equazione caratteristica associata $\beta = \lambda_1 \neq \lambda_2$

c) $k = 2$ se β è radice doppia dell'equazione caratteristica associata $\beta = \lambda_1 = \lambda_2$

$a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$ = equazione caratteristica

$y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$ $\quad \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 3 \quad y^*(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$

$P(x) = 3 \quad \beta = 2 \quad y_p(x) = A \cdot e^{2x} \quad y_p'(x) = 2A \cdot e^{2x} \quad y_p''(x) = 4A \cdot e^{2x}$

$4A \cdot e^{2x} - 8A \cdot e^{2x} + 3A \cdot e^{2x} = 3e^{2x} \quad -A \cdot e^{2x} = 3e^{2x} \quad A = -3$

$$y(x) = y^*(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} - 3e^{2x}$$

- $f(x) = P_k(x) \cdot e^{\beta x}$ $\quad y_p(x) = \begin{cases} Q_k(x) \cdot e^{\beta x} & se \ \beta \neq \lambda_1 \wedge \beta \neq \lambda_2 \\ x \cdot Q_k(x) \cdot e^{\beta x} & se \ \beta = \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ x^2 \cdot Q_k(x) \cdot e^{\beta x} & se \ \beta = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$

con $P_k(x)$ polinomio di grado k e $Q_k(x)$ polinomio di grado k i cui coefficienti vanno calcolati applicando il principio di identità dei polinomi. $Q_k(x) = A_o x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots\cdots + A_k$

$1° caso$ β non è radice dell'equazione caratteristica associata $y_p(x) = (A_o x^k + \cdots + A_k)e^{\beta x}$

Mi calcolo la derivata prima e la derivata seconda della funzione $y_p(x)$, sostituisco le espressioni trovate nell'equazione differenziale [24] , applico il principio di identità dei polinomi per calcolare i valori delle costanti $A_o \cdots A_k$. L'**integrale particolare** è così calcolato.

2° *caso* β è radice avente molteplicità **r** (cioè 1 oppure 2) dell'equazione caratteristica associata

$$y_p(x) = x^r\left(A_o x^k + \cdots + A_k\right)e^{\beta x}$$

$y'' - 2y' + y = x \cdot e^x$ $\quad \beta = 1$

L'**equazione caratteristica** dell'equazione differenziale omogenea associata è:

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ $\quad (\lambda - 1)^2 = 0$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1 = \beta$ L'equazione caratteristica dell'omogenea associata ammette la radice doppia $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 = \beta$. Il suo integrale generale è: $y^*(x) = C_1 e^x + C_2\, x \cdot e^x$

Poiché risulta $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 = \beta$ un integrale particolare dell'equazione differenziale proposta avrà la seguente struttura: $y_p(x) = x^2(Bx + C) \cdot e^x$ $\quad y'_p(x) = 2x(Bx + C)e^x + x^2(Bx + C)e^x + Bx^2 e^x$

$$y'_p(x) = \left[Bx^3 + (3B + C)x^2 + 2Cx\right]e^x$$

$$y''_p(x) = \left[Bx^3 + (3B + C)x^2 + 2Cx\right] \cdot e^x + \left[3Bx^2 + 2(3B + C)x + 2C\right] \cdot e^x$$

$$y''_p(x) = \left[Bx^3 + (6B + C)x^2 + (6B + 4C)x + 2C\right] \cdot e^x$$

Sostituendo nell'equazione differenziale proposta otteniamo:

$$\left[Bx^3 + (6B + C)x^2 + (6B + 4C)x + 2C\right] \cdot e^x - 2\left[Bx^3 + (3B + C)x^2 + 2Cx\right]e^x + x^2(Bx + C) \cdot e^x = x \cdot e^x$$

$$\left[Bx^3 + (6B + C)x^2 + (6B + 4C)x + 2C\right] - 2\left[Bx^3 + (3B + C)x^2 + 2Cx\right] + x^2(Bx + C) = x$$

$6Bx + 2C = x$ Applicando il principio di identità dei polinomi otteniamo:

$$B = \frac{1}{6} \ \wedge \ C = 0 \qquad y_p(x) = \frac{1}{6}x^3 \cdot e^x$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione differenziale proposta è:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2\, x \cdot e^x + \frac{1}{6}x^3 \cdot e^x$$

- $f(x) = p \cdot \cos kx + q \cdot \sin kx$ $\qquad y_p(x) = \begin{cases} A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx & se\ \lambda_{1,2} \neq \pm ik \\ x \cdot (A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx) & se\ \lambda_{1,2} = \pm ik \end{cases}$

con p, q, k valori dati

$y_p(x) = A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx$ se $\lambda_{1,2} \neq \pm ik$ $\quad y_p(x) = x(A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx)$ $\quad \lambda_{1,2} = \pm ik$

Procedendo come prima ci calcoliamo i valori di **A** e di **B** e quindi possiamo disporre di un integrale particolare dell'equazione differenziale [24] .

$y'' + 4y' + 13y = 5\sin 2x$ $\quad \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$, $\alpha = -2 \pm 3i$

$$y^*(x) = (c_1 \cdot \cos 3x + c_2 \cdot sin\, x) \cdot e^{-2x}$$

Poiché risulta $\pm 2i \neq \pm 3i$ possiamo individuare un **integrale particolare** avente la forma:

$$y_p(x) = A \cdot \cos 2x + B \cdot \sin 2x$$

$y_p'(x) = -2A \cdot sin 2x + 2B \cdot \cos 2x \quad y_p''(x) = -4A \cdot \cos 2x - 4B \cdot sin 2x$

Sostituendo nell'equazione data otteniamo:

$$-4A \cdot \cos 2x - 4B \cdot sin 2x - 8A \cdot sin 2x + 8B \cdot \cos 2x + 13A \cdot \cos 2x + 13B \cdot sin 2x = 5 sin 2x$$

$$\begin{cases} -8A + 9B = 5 \\ 9A + 8B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{8}{29} \\ B = \dfrac{9}{29} \end{cases} \qquad y_p(x) = -\frac{8}{29} \cdot \cos 2x + \frac{9}{29} \cdot sin 2x$$

$$y(x) = -\frac{8}{29} \cdot \cos 2x + \frac{9}{29} \cdot \sin 2x + (c_1 \cdot \cos 3x + c_2 \cdot \sin x) \cdot e^{-2x}$$

- $f(x) = P(x) \cdot \cos kx$ oppure $f(x) = Q(x) \cdot \sin kx$ oppure $f(x) = P(x) \cdot \cos kx + Q(x) \cdot \sin kx$

$$y_p(x) = \begin{cases} M(x) \cdot \cos kx + N(x) \cdot \sin kx \quad se \ \lambda_{1,2} \neq \pm i k \\ x \cdot [M(x) \cdot \cos kx + N(x) \cdot \sin kx] \quad se \ \lambda_{1,2} = \pm i k \end{cases}$$

$\lambda_{1,2} = \pm i k \Rightarrow \lambda^2 + k^2 = 0$ equazione caratteristica

con $P(x)$ polinomio di grado r, $Q(x)$ polinomio di grado s. $M(x)$ ed $N(x)$ sono polinomi di grado uguale al maggiore dei gradi dei polinomi $P(x)$ ed $Q(x)$.

$y'' + y = 4x \cdot \sin x$ $\quad k = 1 \quad R_s(x) = 4x$ polinomio di primo grado

$\lambda_2 + 1 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \pm i \quad y^*(x) = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x$

$y_p(x) = M(x) \cdot \cos kx + N(x) \cdot \sin kx$ con $M(x) = Ax + B$, $N(x) = Cx + D$ polinomi di primo grado. Essendo: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \pm ki = \pm i$ un integrale particolare dell'equazione differenziale proposta avrà la seguente struttura: $y_p(x) = x \cdot [M(x) \cdot \cos kx + N(x) \cdot \sin kx]$ cioè:

$$y_p(x) = x \cdot [(Ax + B) \cdot \cos x + (Cx + D) \cdot \sin x]$$

$$y_p'(x) = [(Ax + B) \cdot \cos x + (Cx + D) \cdot \sin x] + x \cdot [A \cdot \cos x - (Ax + B) \cdot \sin x + C \cdot \sin x + (Ax + B) \cdot \cos x]$$
$$y_p''(x) = [-Ax^2 + (4C - B)x + (2A + 2D)] \cdot \cos x + [-Cx^2 - (4A + D)x + (2C - 2B)] \cdot \sin x$$

Sostituendo e semplificando otteniamo:

$$[2Cx + (A + D)] \cdot \cos x + [-2Ax + (C - B)] \cdot \sin x = 2x \cdot \sin x$$

Questa uguaglianza è una identità se risultano uguali i coefficienti di $\cos x$ e di $\sin x$

Questo si verifica se: $\begin{cases} 2C = 0 \\ A + D = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2A = 2 \\ C - B = 0 \end{cases}$ $A = -1,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 1$

$y_p(x) = x(\sin x - x \cdot \cos x)$ $y(x) = y^*(x) + y_p(x) = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x + x(\sin x - x \cdot \cos x)$

$y'' + y = 4x\sin x$ In questa equazione differenziale abbiamo:

$\beta = 0$, $k = 1$, i numeri $\pm i$ sono radici dell'equazione caratteristica associata $\alpha^2 + 1 = 0$

$y_p(x) = x\left[(Ax + B)\cdot \cos x + (Cx + D)\cdot \sin x\right]$

$y''(x) = \left[-Ax^2 + (4C - B)x + (2A + 2D)\right]\cdot \cos x + \left[-Cx^2 - (4A + D)x + (2C - 2B)\right]\cdot \sin x$

Sostituendo nell'equazione data otteniamo :

$\left[2Cx + (A + D)\right]\cos x + \left[-2Ax + (C - B)\right]\sin x = 2x \cdot \sin x$

$2C = 0$, $A + D = 0$, $-2A = 2$, $C - B = 0$ $A = -1$, $B = C = 0$, $D = 1$

$y_p(x) = x(\sin x - x\cos x)$ $y^*(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x$

$$y(x) = x(\sin x - x\cos x) + c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x$$

- $f(x) = e^{\beta x}\left[p \cdot \cos kx + q \cdot \sin kx\right]$ $f(x) = e^{\beta x} \cdot p \cdot \cos kx$ $f(x) = e^{\beta x} \cdot q \cdot \sin kx$

$y_p(x) = \begin{cases} e^{\beta x}\left[A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx\right] \ se\ \lambda_{1,2} \neq \beta \pm ki \\ x \cdot e^{\beta x}\left[A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx\right] \ se\ \lambda_{1,2} = \beta \pm ki \end{cases}$ Essendo A e B due costanti da determinarsi.

- $f(x) = e^{\beta x}\left[P(x) \cdot \cos kx + Q(x) \cdot \sin kx\right]$ $f(x) = e^{\beta x} \cdot P(x) \cdot \cos kx$ $f(x) = e^{\beta x} \cdot Q(x) \cdot \sin kx$

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{\beta x}\left[M(x) \cdot \cos kx + N(x) \cdot \sin kx\right] \ se\ \lambda_{1,2} \neq \beta - ki \\ x \cdot e^{\beta x}\left[M(x) \cdot \cos kx + N(x) \cdot \sin kx\right] \ se\ \lambda_{1,2} = \beta - ki \end{cases}$$

$M(x)$ ed $N(x)$ sono polinomi di grado uguale al maggiore dei gradi dei polinomi $P(x)$ ed $Q(x)$.

$y_p(x) = e^{\beta x}\left[M(x) \cdot \cos kx + N(x) \cdot \sin kx\right]$ se i numeri $\beta \pm k \cdot i$ non sono radici dell'equazione caratteristica associata

$y_p(x) = xe^{\beta x}\left[M(x) \cdot \cos kx + N(x) \cdot \sin kx\right]$ se i numeri $\beta \pm k \cdot i$ sono radici dell'equazione caratteristica associata

- se $f(x)$ è la somma di più termini $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$ dei tipi sopra considerati, allora l'**integrale particolare** ci viene dato dalla somma degli **integrali particolari** corrispondenti a ciascun termine di $f(x)$.

$y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x} + xe^{x}$ [*] $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x} \Rightarrow y_p(x) = -3e^{2x}$ [6]

$y'' - 4y' + 3y = xe^{x}$ [G] $\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, $\beta = 1$

β è radice avente molteplicità **1** $(r = 1)$ dell'equazione caratteristica.

$y^*(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$, $\underline{y}_p(x) = x(Ax + b)e^{x}$, $\underline{y}'_p(x) = (2Ax + B)e^{x} + (Ax^2 + Bx)e^{x}$

$$\underline{y}''_p(x) = 2Ae^{x} + 2(2Ax + B)e^{x} + (Ax^2 + Bx)e^{x}$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione [G] otteniamo:

$$2Ae^{x} + 2(2Ax + B)e^{x} + (Ax^2 + Bx)e^{x} - 4\left[(2Ax + B)e^{x} + (Ax^2 + Bx)e^{x}\right] + 3x(Ax + b)e^{x} = xe^{x}$$

$(-4Ax + 2A - 2B)e^{x} = xe^{x}$ $\begin{cases} 2A - 2B = 0 \\ -4A = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$ $\underline{y}_p(x) = -\dfrac{1}{4}(x^2 + x)e^{x}$

Un **integrale particolare** della [*] è: $y_p(x) = -3e^{2x} - \dfrac{1}{4}(x^2 + x)e^{x}$

L'**integrale generale** della [*] è: $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} - 3e^{2x} - \dfrac{1}{4}(x^2 + x)e^{x}$

- Generalizzando il problema possiamo affermare che la ricerca di un integrale particolare di una equazione lineare non omogenea (a coefficienti costanti o variabili) può, in molti casi, essere facilitata dalla seguente osservazione. Se il secondo membro $f(x)$ dell'equazione differenziale lineare è costituito dalla somma di più funzioni, vale a dire $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, si considerano le 3 seguenti equazioni: $\begin{cases} a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = f_1(x) \\ a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = f_2(x) \\ a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = f_3(x) \end{cases}$

Se $y_{p1}(x)$ è un integrale particolare della prima equazione, $y_{p2}(x)$ della seconda, $y_{p3}(x)$ della terza, allora $y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + y_{p3}(x)$ è un integrale particolare dell'equazione differenziale lineare proposta.

Volendo, possiamo applicare questo procedimento nei seguenti casi:

- $f(x) = p \cdot \cos kx + q \cdot \sin nx + P_k(x) \cdot e^{\beta x}$
- $f(x) = P(x) + h \cdot e^{\beta x}$

[6] Vedere esempio precedente

- $f(x) = p \cdot \cos kx + q \cdot \sin nx$

Sintesi per le equazioni differenziali del secondo ordine:

$$a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = f(x)$$

$a\lambda^2 + b\lambda + c = a(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ = equazione caratteristica associata

$f(x)$ **polinomio in x**

1) $ay'' + by' + c = mx^2 + px + q \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$

2) $ay'' + by' = mx^2 + px + q \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$

3) $ay'' = mx^2 + px + q \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$

$f(x) = h \cdot e^{\beta x}$ $\qquad$ $ay'' + by' + c = h \cdot e^{\beta x}$

1) $\beta \neq \lambda_1 \ , \ \beta \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = A \cdot e^{\beta x}$

2) $\beta = \lambda_1$ oppure $\beta = \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = Ax \cdot e^{\beta x}$

3) $\beta = \lambda_1 = \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = Ax^2 \cdot e^{\beta x}$

$f(x) = (mx^2 + px + q) \cdot e^{\beta x}$ $\qquad$ $ay'' + by' + c = (mx^2 + px + q) \cdot e^{\beta x}$

1) $\beta \neq \lambda_1 \ , \ \beta \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{\beta x}$

2) $\beta = \lambda_1$ oppure $\beta = \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = x(Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{\beta x} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)$

3) $\beta = \lambda_1 = \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{\beta x} = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)$

$f(x) = p \cdot \cos kx + q \cdot \sin kx$ $\qquad$ $ay'' + by' + c = p \cdot \cos kx + q \cdot \sin kx$

1) $\pm ki \neq \lambda_1$ oppure $\pm ki \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx$

2) $\pm ki = \lambda_1$ oppure $\pm ki = \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = x(A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx)$

$f(x) = e^{\beta x}[p \cdot \cos kx + q \cdot \sin kx]$ $\qquad$ $ay'' + by' + c = e^{\beta x}[p \cdot \cos kx + q \cdot \sin kx]$

1) $\beta \pm ki \neq \lambda_1$ oppure $\beta \pm ki \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = e^{\beta x}[\underline{P}(x) \cdot \cos kx + \underline{R}(x) \cdot \sin kx]$

2) $\beta \pm ki = \lambda_1$ oppure $\beta \pm ki = \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = xe^{\beta x}[\underline{P}(x) \cdot \cos kx + \underline{R}(x) \cdot \sin kx]$

dove $\underline{P}(x)$ ed $\underline{R}(x)$ sono polinomi di grado uguale al maggiore dei gradi dei polinomi $P(x)$ ed $R(x)$

Tabella riepilogativa

$f(x)$	$y_p(x)$	annotazioni
$mx^2 + px + q$	$Ax^2 + Bx + C$	$ay'' + by' + c = f(x)$
$mx^2 + px + q$	$x(Ax^2+Bx+C)=Ax^3+Bx^2+Cx$	$ay'' + by' = f(x) \quad c=0$
$mx^2 + px + q$	$x^2(Ax^2+Bx+C)=Ax^4+Bx^3+Cx^2$	$ay'' = f(x) \quad b=c=0$
$h\cdot e^{\beta x}$	$A\cdot e^{\beta x}$	$ay'' + by' + c = f(x)$ $\beta \neq \lambda_1 , \beta \neq \lambda_2$
$h\cdot e^{\beta x}$	$Ax\cdot e^{\beta x}$	$ay'' + by' + c = f(x)$ $\beta = \lambda_1$ o $\beta = \lambda_2$
$h\cdot e^{\beta x}$	$Ax^2\cdot e^{\beta x}$	$ay'' + by' + c = f(x)$ $\beta = \lambda_1 = \lambda_2$
$(mx^2 + px + q)e^{\beta x}$	$(Ax^2 + Bx + C)\cdot e^{\beta x}$	$\beta \neq \lambda_1 , \beta \neq \lambda_2$
$(mx^2 + px + q)e^{\beta x}$	$x(Ax^2 + Bx + C)\cdot e^{\beta x}$	$\beta = \lambda_1$ o $\beta = \lambda_2$
$(mx^2 + px + q)e^{\beta x}$	$x^2(Ax^2 + Bx + C)\cdot e^{\beta x}$	$\beta = \lambda_1 = \lambda_2$
$p\cdot\cos kx + q\cdot\sin kx$	$A\cdot\cos kx + B\cdot\sin kx$	$\lambda_1 \neq \pm ki, \quad \lambda_2 \neq \pm ki$
$p\cdot\cos kx + q\cdot\sin kx$	$x(A\cdot\cos kx + B\cdot\sin kx)$	$\lambda_{1,2} = \pm ki$
$e^{\beta x}\cdot[P(x)\cdot\cos kx+Q(x)\cdot\sin kx]$	$e^{\beta x}\cdot[M(x)\cdot\cos kx+N(x)\cdot\sin kx]$	$\lambda_{1,2} \neq \beta \pm ki$
$e^{\beta x}\cdot[P(x)\cdot\cos kx+Q(x)\cdot\sin kx]$	$xe^{\beta x}[M(x)\cdot\cos kx+N(x)\cdot\sin kx]$	$\lambda_{1,2} = \beta \pm ki$

$M(x)$ ed $N(x)$ sono polinomi di grado uguale al maggiore dei gradi dei polinomi $P(x)$ ed $Q(x)$.

$a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$ $\quad a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$ $\quad \lambda_1, \lambda_2$ radici dell'equazione caratteristica

$$y^*(x) = \begin{cases} A \cdot e^{\lambda_1 x} + B \cdot e^{\lambda_2 x} & se\ \lambda_1 \wedge \lambda_2 \text{ radici reali e distinte} \\ A \cdot e^{\lambda x} + Bx \cdot e^{\lambda x} = (A + B) \cdot e^{\lambda x} & se\ \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \\ (A \cdot \cos qx + B \cdot \sin qx) \cdot e^{\lambda x} & se\ \lambda = p \pm q\, i \end{cases}$$

$a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = f(x)$ $\quad a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$ $\quad \lambda_1, \lambda_2$

- $f(x) = b_o x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots\cdots + b_k = P_k(x)$ $\qquad y_p(x) = \begin{cases} Q_k(x) & se\, \lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_2 \neq 0\ (c \neq 0) \\ x \cdot Q_k(x) & se\, \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 \neq 0\ \ (c = 0) \\ x^2 \cdot Q_k(x) & se\, \lambda_1 = \lambda_2 = 0\ \ (b = c = 0) \end{cases}$

$P_k(x)$ = polinomio di grado k $\quad Q_k(x) = A_o x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots\cdots + A_k$ polinomio di grado k i cui coefficienti vanno calcolati applicando il principio di identità dei polinomi.

- $f(x) = h \cdot e^{\beta x}$ con $h, \beta \in R$ noti $\qquad y_p(x) = \begin{cases} A \cdot e^{\beta x} & se\ \ \beta \neq \lambda_1 \quad \beta \neq \lambda_2 \\ Ax \cdot e^{\beta x} & se\ \ \beta = \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ Ax^2 \cdot e^{\beta x} & se\ \ \beta = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$

Con A costante da determinare.

- $f(x) = P_k(x) \cdot e^{\beta x}$ $\qquad y_p(x) = \begin{cases} Q_k(x) \cdot e^{\beta x} & se\ \ \beta \neq \lambda_1 \wedge \beta \neq \lambda_2 \\ x \cdot Q_k(x) \cdot e^{\beta x} & se\ \ \beta = \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ x^2 \cdot Q_k(x) \cdot e^{\beta x} & se\ \ \beta = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$

con $P_k(x)$ polinomio di grado k e $Q_k(x)$ polinomio di grado k i cui coefficienti vanno calcolati applicando il principio di identità dei polinomi. $Q_k(x)=A_o x^k+A_1 x^{k-1}+\cdots\cdots+A_k$

- $f(x)=p\cdot\cos kx+q\cdot\sin kx$ $\qquad$ $y_p(x)=\begin{cases} A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx & se\,\lambda_{1,2}\neq\pm i\,k \\ x\cdot(A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx) & se\;\lambda_{1,2}=\pm i\,k \end{cases}$

con p,q,k valori dati e con A e B due costanti da determinare.

- $f(x)=P(x)\cdot\cos kx$ oppure $f(x)=Q(x)\cdot\sin kx$ oppure $f(x)=P_r(x)\cdot\cos kx+Q(x)\cdot\sin kx$

$$y_p(x)=\begin{cases} M(x)\cdot\cos kx+N(x)\cdot\sin kx & se\;\lambda_{1,2}\neq\pm i\,k \\ x\cdot\left[M(x)\cdot\cos kx+N(x)\cdot\sin kx\right] & se\;\lambda_{1,2}=\pm i\,k \end{cases}$$

con $P(x)$ polinomio di grado r, $Q(x)$ polinomio di grado s. $M(x)$ ed $N(x)$ sono polinomi di grado uguale al maggiore dei gradi dei polinomi $P(x)$ ed $Q(x)$ ed i cui coefficienti sono da determinare.

- $f(x)=e^{\beta x}\left[p\cdot\cos kx+q\cdot\sin kx\right]$ $\qquad$ $f(x)=e^{\beta x}\cdot p\cdot\cos kx$ $\qquad$ $f(x)=e^{\beta x}\cdot q\cdot\sin kx$

$y_p(x)=\begin{cases} e^{\beta x}\left[A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx\right] & se\;\lambda_{1,2}\neq\beta\pm ki \\ x\cdot e^{\beta x}\left[A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx\right] & se\;\lambda_{1,2}=\beta\pm ki \end{cases}$ con A e B due costanti da determinare.

- $f(x)=e^{\beta x}\left[P(x)\cdot\cos kx+Q(x)\cdot\sin kx\right]$ $\qquad$ $f(x)=e^{\beta x}\cdot P(x)\cdot\cos kx$ $\qquad$ $f(x)=e^{\beta x}\cdot Q(x)\cdot\sin kx$

$$y_p(x)=\begin{cases} e^{\beta x}\left[M(x)\cdot\cos kx+N(x)\cdot\sin kx\right] & se\;\lambda_{1,2}\neq\beta\pm ki \\ x\cdot e^{\beta x}\left[M(x)\cdot\cos kx+N(x)\cdot\sin kx\right] & se\;\lambda_{1,2}=\beta\pm ki \end{cases}$$

$M(x)$ ed $N(x)$ sono polinomi di grado uguale al maggiore dei gradi dei polinomi $P(x)$ ed $Q(x)$ ed i cui coefficienti sono da determinare.

N.B. Una equazione di secondo grado può avere: **(01)** due radici reali e distinte oppure **(2)** due radici reali e coincidenti oppure **(3)** due radici complesse e coniugate.

$$a \cdot y''' + b \cdot y''(x) + c \cdot y'(x) + d \cdot y(x) = 0 \qquad a \cdot \lambda^3 + b \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + d = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ radici dell'equazione caratteristica

$$y^*(x) = \begin{cases} A \cdot e^{\lambda_1 x} + B \cdot e^{\lambda_2 x} + C \cdot e^{\lambda_3 x} & se\ \lambda_1 \wedge \lambda_2 \wedge \lambda_3 \quad \text{radici reali e distinte} \\ A \cdot e^{\lambda_1 x} + B \cdot e^{\lambda_2 x} + Cx \cdot e^{\lambda_2 x} = A \cdot e^{\lambda_1 x} + (B + Cx) \cdot e^{\lambda_2 x} & se\ \lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 \in R \\ A \cdot e^{\lambda_1 x} + B \cdot x \cdot e^{\lambda_1 x} + C \cdot x^2 \cdot e^{\lambda_1 x} = (A + B \cdot x + C \cdot x^2) \cdot e^{\lambda_1 x} & se\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \in R \\ A \cdot e^{\lambda_1 x} + (B \cdot \cos qx + C \cdot \sin qx) \cdot e^{px} & se\ \lambda_1 \in R \wedge \lambda_{2,3} = p \pm qi \end{cases}$$

Una equazione algebrica di terzo grado può avere una radice reale e due complesse e coniugate, oppure tre radici reali. Le radici reali possono essere tra loro distinte o coincidenti.

- $f(x) = b_o x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots\cdots + b_k = P_k(x)$ $\qquad y_p(x) = \begin{cases} Q_k(x) & se\ \ d \neq 0 \\ x \cdot Q_k(x) & se\ \ d = 0 \wedge c \neq 0\ (\lambda_1 = 0) \\ x^2 \cdot Q_k(x) & se\ c = d = 0 \wedge b \neq 0\ (\lambda_1 = \lambda_2 = 0) \\ x^3 \cdot Q_k(x) & se\ b = c = d = 0 \wedge a \neq 0 (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0) \end{cases}$

$P_k(x)$ = polinomio di grado k $\quad Q_k(x) = A_o x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots\cdots + A_k$ polinomio di grado k i cui coefficienti vanno calcolati applicando il principio di identità dei polinomi.

- $f(x) = h \cdot e^{\beta x}$ con $h, \beta \in R$ noti $\qquad y_p(x) = \begin{cases} A \cdot e^{\beta x} & se\ \ \beta \neq \lambda_1 \wedge \beta \neq \lambda_2 \wedge \beta \neq \lambda_3 \\ Ax \cdot e^{\beta x} & se\ \ \beta = \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \\ Ax^2 \cdot e^{\beta x} & se\ \ \beta = \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \\ Ax^3 \cdot e^{\beta x} & se\ \ \beta = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}$

Con A costante da determinare.

- $f(x) = P_k(x)\cdot e^{\beta x}$ $\qquad$ $y_p(x) = \begin{cases} Q_k(x)\cdot e^{\beta x} & se \ \ \beta\neq\lambda_1 \wedge \beta\neq\lambda_2 \wedge \beta\neq\lambda_3 \\ x\cdot Q_k(x)\cdot e^{\beta x} & se \ \ \beta = \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \\ x^2\cdot Q_k(x)\cdot e^{\beta x} & se \ \ \beta = \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \\ x^3\cdot Q_k(x)\cdot e^{\beta x} & se \ \ \beta = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}$

con $P_k(x)$ polinomio di grado k e $Q_k(x)$ polinomio di grado k i cui coefficienti vanno calcolati applicando il principio di identità dei polinomi. $\quad Q_k(x)=A_o x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots\cdots + A_k$

- $f(x) = p\cdot\cos kx + q\cdot\sin kx$ $\qquad$ $y_p(x) = \begin{cases} A\cdot\cos kx + B\cdot\sin kx & se\,\lambda_{1,2}\neq\pm i\,k \\ x\cdot(A\cdot\cos kx + B\cdot\sin kx) & se\ \lambda_{1,2} = \pm i\,k \end{cases}$

con p,q,k valori dati e con A e B due costanti da determinare.

- $f(x)=P(x)\cdot\cos kx$ oppure $f(x)=Q(x)\cdot\sin kx$ oppure $f(x)=P_r(x)\cdot\cos kx+Q(x)\cdot\sin kx$

$$y_p(x) = \begin{cases} M(x)\cdot\cos kx + N(x)\cdot\sin kx & se \ \ \lambda_{1,2}\neq\pm i\,k \\ x\cdot\left[M(x)\cdot\cos kx + N(x)\cdot\sin kx\right] & se \ \ \lambda_{1,2} = \pm i\,k \end{cases}$$

con $P(x)$ polinomio di grado r, $Q(x)$ polinomio di grado s. $M(x)$ ed $N(x)$ sono polinomi di grado uguale al maggiore dei gradi dei polinomi $P(x)$ ed $Q(x)$ ed i cui coefficienti sono da determinare.

- $f(x) = e^{\beta x}\left[p\cdot\cos kx + q\cdot\sin kx\right]$ $\qquad$ $f(x) = e^{\beta x}\cdot p\cdot\cos kx$ $\qquad$ $f(x) = e^{\beta x}\cdot q\cdot\sin kx$

$y_p(x) = \begin{cases} e^{\beta x}\left[A\cdot\cos kx + B\cdot\sin kx\right] & se\ \lambda_{1,2}\neq\beta\pm ki \\ x\cdot e^{\beta x}\left[A\cdot\cos kx + B\cdot\sin kx\right] & se\ \lambda_{1,2} = \beta\pm ki \end{cases}$ Essendo A e B due costanti da determinarsi.

- $f(x) = e^{\beta x}\left[P(x)\cdot\cos kx + Q(x)\cdot\sin kx\right]$ $\qquad$ $f(x) = e^{\beta x}\cdot P(x)\cdot\cos kx$ $\qquad$ $f(x) = e^{\beta x}\cdot Q(x)\cdot\sin kx$

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{\beta x}\left[M(x)\cdot\cos kx + N(x)\cdot\sin kx\right] & se\ \lambda_{1,2}\neq\beta - ki \\ x\cdot e^{\beta x}\left[M(x)\cdot\cos kx + N(x)\cdot\sin kx\right] & se\ \lambda_{1,2} = \beta - ki \end{cases}$$

$M(x)$ ed $N(x)$ sono polinomi di grado uguale al maggiore dei gradi dei polinomi $P(x)$ ed $Q(x)$ ed i cui coefficienti sono da determinare.

$$a\cdot y^{(4)}+b\cdot y^{(3)}+c\cdot y''+d\cdot y'+e\cdot y=0 \qquad a\cdot\lambda^4+b\cdot\lambda^3+c\cdot\lambda^2+d\cdot\lambda+e=0$$

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ radici dell'equazione caratteristica

$$y^*(x)=\begin{cases} A\cdot e^{\lambda_1 x}+B\cdot e^{\lambda_2 x}+C\cdot e^{\lambda_3 x}+D\cdot e^{\lambda_4 x} & se\ \lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq\lambda_4\in R \\ (A+B\cdot x)\cdot e^{\lambda_1 x}+C\cdot e^{\lambda_3 x}+D\cdot e^{\lambda_4 x} & se\ \lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3\neq\lambda_4\in R \\ (A+B\cdot x)\cdot e^{\lambda_1 x}+(C+D\cdot x)\cdot e^{\lambda_3 x} & se\ \lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3=\lambda_4\in R \\ A\cdot e^{\lambda_1 x}+\left(B+Cx+Dx^2\right)\cdot e^{\lambda_2 x} & se\ \lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4\in R \\ \left(A+B+Cx+Dx^2\right)\cdot e^{\lambda_1 x} & se\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4\in R \\ A\cdot e^{\lambda_1 x}+B\cdot e^{\lambda_2 x}+(C\cdot\cos qx+D\cdot\sin qx)e^{px} & se\ \lambda_1\neq\lambda_2\in R\wedge\lambda_{3,4}=p\pm iq \\ (A+B\cdot x)\cdot e^{\lambda_1 x}+(C\cdot\cos qx+D\cdot\sin qx)e^{px} & se\ \lambda_1=\lambda_2\in R\wedge\lambda_{3,4}=p\pm iq \\ (A\cdot\cos nx+B\cdot\sin nx)\cdot e^{mx}+(C\cdot\cos qx+D\cdot\sin qx)\cdot e^{px} & se\ \lambda_{1,2}=m\pm in\wedge\lambda_{3,4}=p\pm qi \end{cases}$$

Una equazione algebrica di quarto grado può avere **(01)** 4 radici reali **(02)** 2 radici reali e due radici complesse e coniugate **(03)** quattro radici complesse a due a due coniugate.

Non può avere un numero dispari di radici reali o un numero dispari di radici complesse. Infatti, una equazione algebrica, se ammette una radice complessa ammette anche la sua coniugata.

- $f(x)=b_o x^k+b_1 x^{k-1}+\cdots\cdots+b_k=P_k(x)$ $\qquad a\cdot\lambda^4+b\cdot\lambda^3+c\cdot\lambda^2+d\cdot\lambda+e=0$

$$y_p(x)=\begin{cases} Q_k(x) & se\ \ e\neq 0 \\ x\cdot Q_k(x) & se\ \ e=0\wedge d\neq 0\ (\lambda_1=0) \\ x^2\cdot Q_k(x) & se\ d=e=0\wedge c\neq 0\ (\lambda_1=\lambda_2=0) \\ x^3\cdot Q_k(x) & se\ c=d=e=0\wedge b\neq 0(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0) \\ x^4\cdot Q_k(x) & se\ b=c=d=e=0\wedge a\neq 0(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0) \end{cases}$$

$P_k(x)$ = polinomio di grado k $\quad Q_k(x)=A_o x^k+A_1 x^{k-1}+\cdots\cdots+A_k$ polinomio di grado k i cui coefficienti vanno calcolati applicando il principio di identità dei polinomi.

- $f(x) = h \cdot e^{\beta x}$ con $h, \beta \in R$ noti $\quad y_p(x) = \begin{cases} A \cdot e^{\beta x} & se \quad \beta \neq \lambda_1 \wedge \beta \neq \lambda_2 \wedge \beta \neq \lambda_3 \\ Ax \cdot e^{\beta x} & se \quad \beta = \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \\ Ax^2 \cdot e^{\beta x} & se \quad \beta = \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \\ Ax^3 \cdot e^{\beta x} & se \quad \beta = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_4 \\ Ax^4 \cdot e^{\beta x} & se \quad \beta = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \end{cases}$

con A costante da determinare.

- $f(x) = P_k(x) \cdot e^{\beta x}$ $\quad y_p(x) = \begin{cases} Q_k(x) \cdot e^{\beta x} & se \quad \beta \neq \lambda_1 \wedge \beta \neq \lambda_2 \wedge \beta \neq \lambda_3 \wedge \beta \neq \lambda_4 \\ x \cdot Q_k(x) \cdot e^{\beta x} & se \quad \beta = \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \\ x^2 \cdot Q_k(x) \cdot e^{\beta x} & se \quad \beta = \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \\ x^3 \cdot Q_k(x) \cdot e^{\beta x} & se \quad \beta = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_4 \\ x^4 \cdot Q_k(x) \cdot e^{\beta x} & se \quad \beta = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \end{cases}$

con $P_k(x)$ polinomio di grado k e $Q_k(x)$ polinomio di grado k i cui coefficienti vanno calcolati applicando il principio di identità dei polinomi. $\quad Q_k(x) = A_o x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots\cdots + A_k$

- $f(x) = p \cdot \cos kx + q \cdot \sin kx$ $\quad y_p(x) = \begin{cases} A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx & se \, \lambda_{1,2} \neq \pm ik \vee \lambda_{3,4} \neq \pm ik \\ x \cdot (A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx) & se \, \lambda_{1,2} = \pm ik \vee \lambda_{3,4} = \pm ik \end{cases}$

con p, q, k valori dati e con A e B due costanti da determinare.

- $f(x) = P(x) \cdot \cos kx$ oppure $f(x) = Q(x) \cdot \sin kx$ oppure $f(x) = P_r(x) \cdot \cos kx + Q(x) \cdot \sin kx$

$$y_p(x) = \begin{cases} M(x) \cdot \cos kx + N(x) \cdot \sin kx & se \quad \lambda_{1,2} \neq \pm ik \vee \lambda_{3,4} \neq \pm ik \\ x \cdot [M(x) \cdot \cos kx + N(x) \cdot \sin kx] & se \quad \lambda_{1,2} = \pm ik \vee \lambda_{3,4} = \pm ik \end{cases}$$

con $P(x)$ polinomio di grado r, $Q(x)$ polinomio di grado s. $M(x)$ ed $N(x)$ sono polinomi di grado uguale al maggiore dei gradi dei polinomi $P(x)$ ed $Q(x)$ ed i cui coefficienti sono da determinare.

- $f(x) = e^{\beta x}[p \cdot \cos kx + q \cdot \sin kx]$ $\quad f(x) = e^{\beta x} \cdot p \cdot \cos kx$ $\quad f(x) = e^{\beta x} \cdot q \cdot \sin kx$

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{\beta x}[A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx] & se \quad \lambda_{1,2} \neq \beta \pm ki \vee \lambda_{3,4} \neq \beta \pm ki \\ x \cdot e^{\beta x}[A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx] & se \quad \lambda_{1,2} = \beta \pm ki \vee \lambda_{3,4} = \beta \pm ki \end{cases}$$

Essendo A e B due costanti da determinarsi.

- $f(x)=e^{\beta x}\left[P(x)\cdot\cos kx+Q(x)\cdot\sin kx\right]$ $f(x)=e^{\beta x}\cdot P(x)\cdot\cos kx$ $f(x)=e^{\beta x}\cdot Q(x)\cdot\sin kx$

$$y_p(x)=\begin{cases} e^{\beta x}\left[M(x)\cdot\cos kx+N(x)\cdot\sin kx\right] & se\ \lambda_{1,2}\neq\beta\pm ki\ \vee\ \lambda_{3,4}\neq\beta\pm ki \\ x\cdot e^{\beta x}\left[M(x)\cdot\cos kx+N(x)\cdot\sin kx\right] & se\ \lambda_{1,2}=\beta\pm ki\ \vee\ \lambda_{3,4}=\beta\pm ki \end{cases}$$

$M(x)$ ed $N(x)$ sono polinomi di grado uguale al maggiore dei gradi dei polinomi $P(x)$ ed $Q(x)$ ed i cui coefficienti sono da determinare.

Equazioni differenziali ordinarie

Definizione: Si chiama **equazione differenziale** (ordinaria) **di ordine n** una equazione del tipo:

$$F\left(x,y,y',y'',\cdots\cdots,y^{(n)}\right)=0 \qquad [1]$$

dove **F** è una funzione assegnata che lega la variabile indipendente **x** con la funzione incognita $y(x)$ e le sue derivate successive $y'(x),y''(x),\cdots,y^{(n)}(x)$ fino all'ordine n. **Ordine** di una equazione differenziale è il massimo ordine di derivazione che appare nell'equazione stessa. Una equazione differenziale di ordine **n** si dice **ridotta a forma normale** quando è risolta rispetto alla derivata di ordine massimo, cioè quando la [1] è equivalente ad una equazione del tipo:

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',\cdots\cdots,y^{(n-1)}\right) \qquad [2]$$

dove f è una funzione assegnata delle $(n+1)$ variabili $x,y,y',y'',\cdots\cdots,y^{(n-1)}$.

Particolarmente importanti sono le **equazioni differenziali lineari di ordine n**, cioè le equazioni differenziali del tipo: $y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+a_2(x)\cdot y^{(n-2)}+\cdots\cdots+a_{n-1}(x)\cdot y'+a_n(x)\cdot y=f(x)$ [3]

Il nome **lineare** è dovuto al fatto che in essa la **y** e le sue derivate successive hanno esponente uno (cioè sono termini di primo grado) e non sono moltiplicate tra loro. Se risulta $f(x)=0$ l'equazione differenziale si dice **omogenea**, in caso contrario si dice **completa**. Una equazione differenziale lineare di ordine **n** omogenea ha la seguente forma:

$$y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+a_2(x)\cdot y^{(n-2)}+\cdots\cdots+a_{n-1}(x)\cdot y'+a_n(x)\cdot y=0 \qquad [4]$$

Una funzione $\Phi(x)$, definita e continua nell'intervallo $I\subseteq R$, derivabile n volte in tale intervallo, e tale che risulti $\forall\ x\in I$: $F\left[x,\Phi(x),\Phi'(x),\cdots\cdots,\Phi^{(n)}(x)\right]=0$ [5]

si dice **integrale** o **soluzione** dell'equazione differenziale [1]. Pertanto **integrare l'equazione differenziale** [1] significa determinare una funzione $\Phi(x)$ che , $\forall\ x\in I$, verifica l'equazione stessa. Ogni soluzione $\Phi(x)$ di una equazione differenziale di ordine n contiene n costanti arbitrarie. Queste costanti sono completamente ed univocamente determinate quando , accanto all'equazione [1], assegniamo n condizioni. Le condizioni da imporre possono essere di natura diversa , e danno luogo a problemi diversi, i più notevoli dei quali sono:

a) problema dei valori iniziali (o di **Cauchy**) se è assegnato lo stato iniziale del sistema, cioè se, in corrispondenza di un determinato valore x_o della variabile indipendente x, conosciamo i valori della $\Phi(x_o)$ e delle sue prime $(n-1)$ derivate.

b) problemi ai limiti, nei quali le condizioni prescritte riguardano almeno due valori distinti della variabile indipendente.

Problemi ai valori iniziali

Assegnare lo **stato iniziale** della più generale funzione che verifica l'equazione [2] significa che sono da considerarsi noti i valori: $y(x_o)=y_o\ ,\ y'(x_o)=y'_o\ ,\cdots\cdots,\ y^{(n-1)}(x_o)=y_o^{(n-1)}$ [6]

che la funzione incognita $y(x) = \Phi(x)$ e le sue prime $(n-1)$ derivate assumono in corrispondenza del valore iniziale x_o della variabile indipendente x. Un **problema ai valori iniziali** consiste nella ricerca di una soluzione della [2] che verifichi le condizioni [6].

Integrale generale

Si dice **integrale generale** dell'equazione [2] una funzione che dipende dalla variabile indipendente x e da n parametri $c_1,c_2,\cdots,c_n$ (**costanti di integrazione**) $y=\Phi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ [7]

tale che:

1) la $y = \Phi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ e le sue derivate successive fino all'ordine n verifichino la [2] $\forall\ x \in I$ ed indipendentemente dai valori attribuiti alle n costanti $c_1,c_2,\cdots,c_n$

2) le n costanti $c_1,c_2,\cdots,c_n$ siano **linearmente indipendenti**

Questo significa quando in corrispondenza di ogni prefissato stato iniziale del sistema individuato dai valori $\left(y_o,y'_o,y''_o,\cdots,y_o^{(n-1)}\right)$ il sistema di n equazioni:

$$\begin{cases} \Phi(x_o,c_1,c_2,\cdots,c_n) = y_o \\ \Phi'(x_o,c_1,c_2,\cdots,c_n) = y'_o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi^{(n-1)}(x_o,c_1,c_2,\cdots,c_n) = y_o^{(n-1)} \end{cases} \qquad [8]$$

nelle n incognite $c_1, c_2, \cdots, c_n$ è risolubile, cioè ammette una sola soluzione.

Integrali particolari

Integrale particolare dell'equazione differenziale [2] è un qualsiasi integrale che si può ottenere dall'integrale generale [7] per una particolare scelta delle costanti d'integrazione $c_1, c_2, \cdots, c_n$.

Integrale singolare

Integrale singolare di un'equazione differenziale è un integrale dell'equazione differenziale proposta che non è deducibile assegnando valori particolari alle costanti arbitrarie dell'integrale generale [7]. Quindi l'**Integrale singolare** è una funzione $y(x)$ che non dipende da alcuna costante e non può essere ricavato dall'integrale generale per particolari valori numerici delle costanti $c_1, c_2, \cdots, c_n$, ma che è soluzione dell'equazione differenziale considerata. [7]

Da ciò si deduce che l'**Integrale singolare** di una equazione differenziale non esaurisce la totalità delle curve integrali. [8]

Equazioni differenziali lineari di ordine n

Se dell'equazione differenziale lineare omogenea

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + a_2(x) \cdot y^{(n-2)} + \cdots\cdots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0$$

conosciamo n **integrali particolari** $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ fra loro **linearmente indipendenti** (cioè a **Wronskiano** diverso da zero), allora l'**integrale generale** della [4] è la funzione:

$$y^*(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \cdots + c_n \cdot y_n(x) \qquad [9]$$

$c_1, c_2, \cdots, c_n$ costanti arbitrarie fra loro linearmente indipendenti. Si osservi che ogni integrale dell'equazione lineare è esprimibile come combinazione lineare di n **integrali particolari**. Cioè le **equazioni lineari non ammettono integrali singolari** .

---

[7] Tale è il caso , ad esempio , dell'eventuale inviluppo o eventuale luogo geometrico dei punti multipli delle **curve integrali** [7] al variare dei parametri $c_1, c_2, \cdots, c_n$ (quando , naturalmente , tale inviluppo o luogo non sia una curva limite della famiglia di curve integrali .

[8] I diagrammi delle soluzioni di una equazione differenziale si dicono **curve integrali**

- **Wronskiano** $W(x)$ di n funzioni $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ è il determinante formato dalle n funzioni e dalle loro derivate fine all'ordine $n-1$. Se $W(x) \neq 0$ le n funzioni sono **linearmente indipendenti**, se $W(x) = 0$ le n funzioni sono **linearmente dipendenti**.

Pertanto per calcolare l'**integrale generale** di una equazione differenziale lineare omogenea occorre sapere calcolare n integrali particolari dell'equazione stessa.
Non si conoscono però metodi per la ricerca di detti integrali se non in casi particolari come nelle **equazioni lineari a coefficienti costanti** che studieremo in seguito .

ESEMPIO: $y'' - \frac{3}{x} \cdot y' - \frac{5}{x^2} \cdot y = 0$ $y_1(x) = \frac{1}{x}$, $y_2(x) = x^2$ come si verifica facilmente

$y(x) = \frac{c_1}{x} + c_2 \cdot x^5$ è l'**integrale generale** dell'equazione differenziale data

L'**integrale generale** di un'equazione differenziale lineare completa di ordine n

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + a_2(x) \cdot y^{(n-2)} + \cdots\cdots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x) \qquad \textbf{[3]}$$

si ottiene aggiungendo ad un integrale particolare $y_p(x)$ dell'equazione [3] , l' **integrale generale** $y^*(x)$ della corrispondente equazione omogenea: $y(x) = y_p(x) + y^*(x)$ [10]

Metodo di Lagrange per la risoluzione delle equazioni differenziali lineari complete (o metodo della variazione delle costanti arbitrarie)

Questo metodo ci consente di calcolare un **integrale particolare** $y_p(x)$ quando conosciamo l'**integrale generale** $y^*(x)$ dell'equazione omogenea associata [4]. Consideriamo per semplicità l'equazione del terzo ordine: $y''' + a_1(x) \cdot y'' + a_2(x) \cdot y' + a_3(x) \cdot y = f(x)$ [11] avente come equazione omogenea associata: $y''' + a_1(x) \cdot y'' + a_2(x) \cdot y' + a_3(x) \cdot y = 0$ [12]

della quale $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ sono tre **integrali particolari** fra loro linearmente indipendenti, cioè a Wronskiano diverso da zero. $y^*(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + c_3 \cdot y_3(x)$

Dell'equazione [11] ricerchiamo un integrale particolare $y_p(x)$ avente una espressione formale analoga a quella dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata, nella quale però alle costanti c_1, c_2, c_3 si sostituiscono tre funzioni $\gamma_1(x), \gamma_2(x), \gamma_3(x)$ derivabili e da determinare.

$$y_p(x) = \gamma_1(x) \cdot y_1(x) + \gamma_2(x) \cdot y_2(x) + \gamma_3(x) \cdot y_3(x) \qquad [13]$$

con $\gamma_1(x),\gamma_2(x),\gamma_3(x)$ (prima indicate con c_1,c_2,c_3) funzioni incognite da determinare in modo che esse verifichino la [11]. [9]

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} \qquad [14]$$

Si dimostra che le funzioni $\gamma_1(x),\gamma_2(x),\gamma_3(x)$ si ottengono risolvendo con la regola di Cramer il seguente sistema nelle incognite $\gamma_1'(x),\gamma_2'(x),\gamma_3'(x)$ e poi integrando le suddette funzioni:

$$\begin{cases} y_1(x)\cdot\gamma_1'(x) + y_2(x)\cdot\gamma_2'(x) + y_3(x)\cdot\gamma_3'(x) = 0 \\ y_1'(x)\cdot\gamma_1'(x) + y_2'(x)\cdot\gamma_2'(x) + y_3'(x)\cdot\gamma_3'(x) = 0 \\ y_1''(x)\cdot\gamma_1'(x) + y_2''(x)\cdot\gamma_2'(x) + y_3''(x)\cdot\gamma_3'(x) = f(x) \end{cases} \qquad [15]$$

Si ottiene:

$$\gamma_1'(x) = \frac{\alpha(x)}{W(x)} = \sigma(x) \Rightarrow \gamma_1(x) = \int \sigma(x)dx = A(x)$$

$$\gamma_2'(x) = \frac{\beta(x)}{W(x)} = \delta(x) \Rightarrow \gamma_2(x) = \int \delta(x)dx = B(x)$$

$$\gamma_3'(x) = \frac{\Phi(x)}{W(x)} = \mu(x) \Rightarrow \gamma_3(x) = \int \mu(x)dx = C(x)$$ [10]

Un integrale particolare dell'equazione differenziale [11] è:

$$y_p(x)=y_1(x)\cdot\int \sigma(x)dx+y_2(x)\cdot\int \delta(x)dx+y_3(x)\cdot\int \mu(x)dx =$$

$$=y_1(x)\cdot A(x)+y_2(x)\cdot B(x)+y_3(x)\cdot C(x)$$

L'**integrale generale** dell'equazione [11] è: $y(x) = y_p(x) + y^*(x)$

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti variabili

Considero l'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti variabili

$$a_o(x)\cdot y''(x) + a_1(x)\cdot y'(x) + a_2(x)\cdot y(x) = f(x) \qquad [A]$$

e l'equazione omogenea ad essa associata: $a_o(x)\cdot y''(x) + a_1(x)\cdot y'(x) + a_2(x)\cdot y(x) = 0 \quad [B]$

[9] Le funzioni $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ o le conosciamo preventivamente o dobbiamo conoscere qualche metodo che ci consenta di calcolarle

[10] $\alpha(x) = W_1(x)$, $\beta(x) = W_2(x)$, $\Phi(x) = W_3(x)$

Siano $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ due **integrali particolari** dell'equazione omogenea associata e supponiamo che siano linearmente indipendenti (cioè a Wronskiano diverso da zero), cioè tali che non sia possibile trovare alcuna costante k per cui risulti: $y_1(x)=k\cdot y_2(x)$

Si dice che le funzioni $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ costituiscono un **sistema fondamentale di soluzioni** dell'equazione omogenea associata. Si può dimostrare che l'**integrale generale** dell'equazione omogenea associata è: $y^*(x)=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)$.

Passiamo ora a definire la struttura dell' **integrale generale** $y(x)$ dell'equazione lineare completa. Se $y_p(x)$ è un qualsiasi integrale particolare dell'equazione lineare completa, si dimostra che l'integrale generale dell'equazione completa è del tipo:

$$y(x)=y_p(x)+y^*(x)=y_p(x)+C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)$$

cioè è dato dalla somma di un suo integrale particolare e dell'integrale generale $y^*(x)$ dell'equazione omogenea associata.

Definita così la struttura delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine, il problema della sua integrazione esplicita è ancora ben lungi dall'essere risolto, perché si debbono determinare sia il sistema fondamentale di soluzioni $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ dell'omogenea associata, sia l'integrale particolare $y_p(x)$ dell'equazione lineare completa. Un metodo generale che permetta di calcolare $y_p(x)$ ed $y^*(x)$ esiste soltanto per le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

Vediamo se è possibile determinare un integrale particolare $y_p(x)$ dell'equazione differenziale completa quando conosciamo due integrali particolari dell'equazione omogenea associata, e vediamo se tale integrale $y_p(x)$ possa avere la stessa struttura di $y^*(x)=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)$ dove le costanti C_1 e C_2 sono sostituite da due funzioni $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$.

Dell'equazione $[A]$ ricerchiamo un integrale particolare $y_p(x)$ avente una espressione formale analoga a quella dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata, nella quale però alle costanti C_1, C_2 si sostituiscono due funzioni $\gamma_1(x), \gamma_2(x)$ derivabili e da determinare.

$$y_p(x)=\gamma_1(x)\cdot y_1(x)+\gamma_2(x)\cdot y_2(x) \qquad [13]$$

con $\gamma_1(x), \gamma_2(x)$ (prima indicate con C_1, C_2) funzioni incognite da determinare in modo che esse verifichino la $[A]$. $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ $\quad [C]$

Si dimostra che le funzioni $\gamma_1(x), \gamma_2(x)$ si ottengono risolvendo con la regola di Cramer il seguente sistema nelle incognite $\gamma_1'(x), \gamma_2'(x)$ e poi integrando le suddette funzioni:

$$\begin{cases} y_1(x)\cdot\gamma_1'(x)+y_2(x)\cdot\gamma_2'(x)=0 \\ y_1'(x)\cdot\gamma_1'(x)+y_2'(x)\cdot\gamma_2'(x)=f(x) \end{cases} \qquad [15]$$

Si ottiene: $\quad \gamma_1'(x) = \dfrac{\alpha(x)}{W(x)} = \sigma(x) \Rightarrow \gamma_1(x) = \int \sigma(x)dx = A(x)$

$$\gamma_2'(x) = \frac{\beta(x)}{W(x)} = \delta(x) \Rightarrow \gamma_2(x) = \int \delta(x)dx = B(x)$$

Un integrale particolare dell'equazione differenziale [11] è:

$$y_p(x)=y_1(x)\cdot\int \sigma(x)dx+y_2(x)\cdot\int \delta(x)dx=y_1(x)\cdot A(x)+y_2(x)\cdot B(x)$$

L'**integrale generale** dell'equazione [11] è: $\quad y(x) = y_p(x) + y^*(x)$

Esempio: $y''+\dfrac{1}{x}\cdot y'-\dfrac{1}{x^2}\cdot y=\dfrac{\ln x}{x^2}$ $\quad$ [*] $\quad$ L'equazione omogenea associata è:

$y''+\dfrac{1}{x}\cdot y'-\dfrac{1}{x^2}\cdot y=0$ $\quad$ [**] $\quad a_1(x) = \dfrac{1}{x} \quad a_2(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$y_1(x) = x \;,\; y_2(x) = \dfrac{1}{x}$ sono due **integrali particolari** dell'equazione differenziale [**] come si verifica facilmente.

L'**integrale generale** dell'equazione differenziale **omogenea [**]** è: $\quad y^*(x) = C_1\cdot x + C_2\cdot\dfrac{1}{x}$

Vediamo se possiamo ricavare un integrale particolare della [*] avente la stessa struttura dell'integrale generale $y^*(x) = C_1\cdot x + C_2\cdot\dfrac{1}{x}$ della [**], vediamo, cioè, se esiste una funzione del tipo $y(x) = \gamma_1(x)\cdot x + \gamma_2(x)\cdot\dfrac{1}{x}$ che sia **integrale particolare** della [*].

La risposta è positiva se applichiamo il metodo di Lagrange , come abbiamo visto in precedenza.

$$y_1'(x) = 1 \qquad y_2'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \begin{cases} x\cdot\gamma_1' + \dfrac{1}{x}\cdot\gamma_2'(x) = 0 \\ \gamma_1' - \dfrac{1}{x^2}\cdot\gamma_2'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x} \qquad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{x} \\ \frac{\ln x}{x^2} & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{\ln x}{x^3} \qquad W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{\ln x}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{\ln x}{x}$$

$$\gamma_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} = \frac{\ln x}{2x^2}\ ,\ \gamma_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} = -\frac{1}{2}\ln x$$

$$\gamma_1(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x} + k_1 \qquad \gamma_2(x) = -\frac{1}{2}\int \ln x\cdot dx = -\frac{1}{2}x\cdot\ln x + \frac{1}{2}x + k_2$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2} = -\ln x = \textbf{integrale particolare della } [*]$$

L'**integrale generale** della [*] è: $$y(x) = -\ln x + C_1\cdot x + \frac{C_2}{x}$$

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti variabili: un caso particolare

Noi sappiamo che non esistono regole generali per integrare equazioni differenziali del tipo $[A]$, a meno che non si tratti di un'equazione di Eulero o di particolari equazioni come quelle trattate nei paragrafi precedenti. Le equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti variabili si possono risolvere quando conosciamo un integrale particolare dell'equazione omogenea associata. (In precedenza abbiamo visto che di integrali particolari ne occorrono due)

In questo paragrafo vogliamo ricercare metodi generali per l'integrazione di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti variabili del tipo:

$$a_o(x)\cdot y''(x) + a_1(x)\cdot y'(x) + a_2(x)\cdot y(x) = f(x) \qquad [A]$$

quando conosciamo un integrale particolare $y_p(x) = p(x)$ dell'equazione omogenea associata

$$a_o(x)\cdot y''(x) + a_1(x)\cdot y'(x) + a_2(x)\cdot y(x) = 0$$

Poniamo: $y(x) = y_p(x)\cdot u(x) = p(x)\cdot u(x)$ con $u(x)$ **funzione da determinare**

$$y'(x) = p'(x)\cdot u(x) + p(x)\cdot u'(x)$$

$$y''(x) = p''(x)\cdot u(x) + p'(x)\cdot u'(x) + p'(x)\cdot u'(x) + p(x)\cdot u''(x)$$

Sostituendo nella [14] , sviluppando e semplificando otteniamo:

$$a_o(x)\cdot p(x)\cdot u''(x) + \left[a_1(x)\cdot p(x) + 2a_o(x)\cdot p'(x)\right]\cdot u'(x) = 0 \qquad \textbf{[15]}$$

dopo avere osservato che $a_o(x)\cdot p''(x) + a_1(x)\cdot p'(x) + a_2(x)\cdot p(x) = 0$ in quanto la funzione $p(x)$ è un **integrale particolare** dell'equazione differenziale [14].

Per integrare l'equazione differenziale [15] si pone $u'(x)=t(x)$ $[\, u''(x) = t'(x) \,]$ e si ottiene:

$$a_o(x)\cdot p(x)\cdot t'(x)+\left[a_1(x)\cdot p(x)+2a_o(x)\cdot p'(x)\right]\cdot t(x)=0 \qquad \textbf{[16]}$$

Si tratta di una equazione lineare omogenea del primo ordine (da risolvere come equazione a variabili separabili) il cui **integrale generale** può essere facilmente calcolato.

Supponiamo che esso sia: $t(x) = u'(x) = C_1\cdot\alpha(x)$ $\quad u(x)=C_1\int \alpha(x)dx + C_2$ **[17]**

Dando alle costanti C_1 e C_2 valori arbitrari, ad esempio $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$, ed utilizzando la relazione $y(x)=p(x)\cdot u(x)=p(x)\cdot\int \alpha(x)dx=\beta(x)$ troviamo un secondo **integrale particolare** ($\beta(x)$) dell'equazione [14].
L'**integrale generale** della [14] sarà: $y^*(x) = C_1\cdot p(x) + C_2\cdot\beta(x)$

Per verificare che i due **integrali particolari** $p(x)$ e $\beta(x)$ sono fra loro **linearmente indipendenti** basta calcolare il loro wronskiano e constatare che è $\neq 0$.

Trovato l'**integrale generale** dell'equazione differenziale [14] possiamo trovare un **integrale particolare** dell'equazione differenziale [13] e quindi il suo **integrale generale**.

$y'' - 2tg\,x\cdot y' + 3y = 0$ Un suo **integrale particolare** è $u(x) = sin\,x$

Pongo: $y(x)=\sin x\cdot u(x)$ ottengo : $y'(x) = \cos x\cdot u(x) + sin\,x\cdot u'(x)$

$y''(x) = -sin\,x\cdot u(x) + \cos x\cdot u'(x) + \cos x\cdot u'(x) + sin\,x\cdot u''(x)$ [11]

$$-sin\,x\cdot u(x) + \cos x\cdot u'(x) + \cos x\cdot u'(x) + sin\,x\cdot u''(x) - 2sin\,x\cdot u(x) - 2\frac{sin^2 x}{\cos x}u'(x) + 3sin\,x\cdot u(x) = 0$$

$sin\,x\cdot u''(x) + \left(2\cos x - 2\dfrac{sin^2 x}{\cos x}\right)u'(x) = 0$ Pongo $u'(x)=t(x)$ $[\; u''(x) = t'(x) \;]$

$$sin\,x\cdot t'(x) + \left(\frac{2\cos^2 x - 2sin^2 x}{\cos x}\right)t(x) = 0 \qquad \frac{dt}{t} = 2\frac{\cos^2 x - sin^2 x}{sin\,x\cos x}dx$$

$$\int\frac{dt}{t} = 2\int\left(\frac{sin\,x}{\cos x} - \frac{\cos x}{sin\,x}\right)dx \;,\; \ln t = 2(-\ln\cos x - \ln sin\,x) = 2\ln\frac{1}{sin\,x\cos x} = \ln\frac{1}{sin^2 x\cos^2 x}$$

$$t(x) = \frac{1}{sin^2 x\cdot\cos^2 x} \;,\; u'(x) = \frac{1}{sin^2 x\cdot\cos^2 x} \;,\quad u(x)=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = tg\,x - ctg\,x$$

Pertanto un altro **integrale particolare** è:

---

[11] $u(x) = sin\,x \Rightarrow u'(x) = \cos x \;,\; u''(x) = -sin\,x \;,\; -sin\,x - 2tg\,x\cdot\cos x + 3sin\,x = 0 \;,\; 0 = 0$

$$\beta(x) = \sin x(tg\,x - \cot g\,x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \cos x = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} - \cos x = \frac{1}{\cos x} - 2\cos x$$

L'**integrale generale** dell'equazione differenziale data è : $y^*(x) = C_1 \sin x + C_2 (\sec x - 2\cos x)$

$$u(x) = tg\,x - \cot g\,x \quad , \quad \beta(x) = \sec x - 2\cos x$$

Per verificare che gli **integrali particolari** $u(x)$ e $\beta(x)$ sono **linearmente indipendenti** basta constatare che il determinante del wronskiano di $u(x)$ e $\beta(x)$ è $\neq 0$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} u(x) & \beta(x) \\ u'(x) & \beta'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \sec x - 2\cos x \\ \cos x & \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + 2\sin x \end{vmatrix} = 1 + tg^2 x \neq 0$$

Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti cotanti: caso generale

$$a_o \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \cdots\cdots + a_{n-1} \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 \qquad [54]$$

con $a_o, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ costanti.

Per risolvere l'equazione differenziale $[54]$ si considera l'equazione caratteristica associata:

$$a_o \cdot \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + a_2 \cdot \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0 \qquad [56]$$

che ammette n radici, che possono essere reali o complesse, distinte o coincidenti. Esaminiamo i vari casi:

(01) L'equazione $[56]$ possiede n **radici reali e distinte** $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$

A queste radici corrispondono n **integrali particolari indipendenti** aventi la seguente espressione algebrica: $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$, $y_3(x) = e^{\lambda_3 x}, \ldots\ldots,$ $y_n(x) = e^{\lambda_n x}$

L'integrale generale della $[54]$ è: $y^*(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + C_3 \cdot e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_{n-1} \cdot e^{\lambda_{n-1} x} + C_n \cdot e^{\lambda_n x}$

(02) Le radici dell'equazione $[56]$ sono tutte reali, ma non sono tutte distinte in quanto qualcuna di esse è multipla

Per fissare le idee supponiamo che sia: $n = 7$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ (la radice α ha molteplicità 2), $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \beta$ (la radice β ha molteplicità 3), λ_6 e λ_7 hanno molteplicità 1, cioè sono radici semplici.

In questo caso l'**integrale generale** dell'equazione differenziale lineare omogenea $[54]$ è:

$$y*(x)=C_1\cdot e^{\alpha x}+C_2\cdot x\cdot e^{\alpha x}+C_3\cdot e^{\beta x}+C_4\cdot x\cdot e^{\beta x}+C_5\cdot x^2\cdot e^{\beta x}+C_6\cdot e^{\lambda_6 x}+C_7\cdot e^{\lambda_7 x}$$ cioè:

$$y*(x)=(C_1+C_2\cdot x)\cdot e^{\alpha x}+(C_3+C_4\cdot x)\cdot e^{\beta x}+C_5\cdot x^2\cdot e^{\beta x}+C_6\cdot e^{\lambda_6 x}+C_7\cdot e^{\lambda_7 x}$$

(03) L'equazione $[56]$ possiede qualche coppia di radici complesse e coniugate, ad esempio:

$$\lambda_1=p-iq \qquad \lambda_1=p+iq$$

Due integrali particolari dell'equazione differenziale $[54]$ sono:

$$y_1(x)=e^{(p-iq)x} \qquad y_2(x)=e^{(p+iq)x}$$

Applicando le formule di Eulero abbiamo:

$$y_1(x)=e^{(p-iq)x}=e^{px}\cdot e^{-iqx}=e^{px}\cdot(\cos qx-i\cdot\sin qx) \quad y_2(x)=e^{(p+iq)x}=e^{px}\cdot e^{iqx}=e^{px}\cdot(\cos qx+i\cdot\sin qx)$$

Poiché combinazioni lineari di integrali particolari generano altri integrali particolari possiamo sceglie queste combinazioni lineari come **integrali particolari**.

$$\frac{y_1(x)+y_2(x)}{2}=e^{px}\cdot\cos qx \qquad \frac{y_1(x)-y_2(x)}{2i}=e^{px}\cdot\sin qx$$

L'integrale generale dell'equazione $[54]$ è:

$$y*(x)=e^{px}\cdot C_1\cdot\cos qx+e^{px}\cdot C_2\cdot\sin qx+C_3\cdot e^{\lambda_3 x}+C_4\cdot e^{\lambda_4 x}+\cdots$$

$$y*(x)=e^{px}\cdot(C_1\cdot\cos qx+C_2\cdot\sin qx)+C_3\cdot e^{\lambda_3 x}+C_4\cdot e^{\lambda_4 x}+\cdots$$

Esempi: $y'''-6\cdot y''+11\cdot y'-6y=0$ Considero la sua equazione caratteristica:

$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$ che possiede 3 radici reali e distinte: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$

L' **integrale generale** dell'equazione differenziale proposta è: $y*(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^x$

$$y^{(5)}-7y^{(4)}+19y'''-25y''+16y'-4y=0$$

Considero la sua equazione caratteristica: $\lambda^5-7\lambda^4+19\lambda^3-25\lambda^2+16\lambda-4=0$ che possiede due radici distinte, la prima con molteplicità 2, la seconda con molteplicità 3:

$$\lambda_1=\lambda_2=2\,,\ \lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=1$$

L'**integrale generale** dell'equazione differenziale proposta è:

$$y*(x)=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+C_3e^x+C_4xe^x+C_4x^2e^x$$

$y^{(4)}-1=0$ $\quad\lambda^4-1=0\quad \lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-i\,,\ \lambda_4=i\quad (p=0\,,\ q=\pm1)$

$$y*(x)=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^x+C_3\cdot\cos x+C_4\cdot\sin x$$ = **integrale generale**

Equazioni differenziali lineari omogenee complete a coefficienti cotanti:

caso generale

$$a_o \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \cdots\cdots + a_{n-1} \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x) \qquad [57]$$

con $a_o, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ costanti.

L'**integrale generale** dell'equazione differenziale $[57]$ è: $y(x) = y_p(x) + y^*(x)$ $[58]$

Dove $y^*(x)$ è l'**integrale generale** (che sappiamo calcolare) dell'equazione differenziale omogenea associata, mentre $y_p(x)$ è un integrale particolare dell'equazione completa $[57]$ che sappiamo calcolare col metodo di Lagrange.

Poiché tale metodo risulta, a volte, laborioso nei calcoli, esponiamo un metodo indiretto per la determinazione dell'integrale particolare, chiamato **metodo dei coefficienti indeterminati**.

Tale metodo viene applicato quando il termine foto $f(x)$ dell'equazione $[57]$ è una funzione avente una particolare forma analitica.

Metodo dei coefficienti indeterminati

Primo caso: $f(x)$ è un polinomio di grado k, cioè: $f(x) = b_o x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k = P(x)$ $[59]$

L'equazione $[57]$ ammette come integrale particolare $y_p(x)$ il polinomio $x^r \cdot Q(x)$, cioè:

$$y_p(x) = x^r \cdot Q(x) = x^r \left(A_o x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots\cdots + A_k \right)$$

dove r è l'ordine di molteplicità della radice $\lambda = 0$ dell'equazione caratteristica

$$a_o \cdot \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + a_2 \cdot \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0 \qquad [56]$$

e $Q(x)$ un polinomio a coefficienti A_i indeterminati avente lo stesso grado k del termine noto:

$$f(x) = b_o x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots\cdots + b_k \qquad [59]$$

Questo significa che il polinomio $Q(x)$ ha la seguente espressione:

$$Q(x) = A_o \cdot x^k + A_1 \cdot x^{k-1} + \cdots + A_{k-1} \cdot x + A_k \qquad [60]$$

Se risulta: $a_n \neq 0$ allora è: $r = 0$ (la radice $\lambda = 0$) non esiste $y_p(x) = Q(x)$

Se risulta: $a_n = 0 \wedge a_{n-1} \neq 0$ allora è: $r = 1$ (la radice $\lambda = 0$ ha molteplicità 1) $y_p(x) = x \cdot Q(x)$

Se risulta: $a_n = a_{n-1} = 0 \wedge a_{n-2} \neq 0$ allora è: $r = 1$ (la radice $\lambda = 0$ ha molteplicità 2). $y_p(x) = x^2 \cdot Q(x)$

e così di seguito.

Sostituisco nell'equazione $[57]$ $y_p(x)=x^r\cdot Q(x)$ e le sue n derivate ed applico il principio di identità dei polinomi, imponendo che il primo membro dell'equazione trovata sia identicamente uguale al secondo membro. Otteniamo un sistema lineare nelle incognite A_i che vengono determinate in maniera univoca.

$y'''-y''+y'=x^2+1$ $\qquad \lambda^3-\lambda^2+\lambda=0 \quad \lambda_1=0 \quad \lambda_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \lambda_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$y^*(x)=C_1+C_2e^{\frac{1}{2}x}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}i+C_2e^{\frac{1}{2}x}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Un integrale particolare dell'equazione differenziale proposta è:

$y_p(x)=x\left(A_ox^2+A_1x+A_2\right)=A_ox^3+A_1x^2+A_2x$ la radice $\lambda=0$ ha molteplicità 1 ($r=1$)

Derivando e sostituendo nell'equazione proposta otteniamo:

$$3A_ox^2+2\left(A_1-3A_o\right)x+\left(6A_o-2A_1+a_2\right)=x^2+1 \qquad \begin{cases}3A_o=1\\ A_1-3A_o=0\\ 6a_o-2A_1+A_2=1\end{cases} \qquad \begin{cases}A_o=\frac{1}{3}\\ A_1=A_2=1\end{cases}$$

$y_p(x)=\frac{1}{2}x^3+x^2+x$ L'integrale generale dell'equazione proposta è:

$$y(x)=y_p(x)+y^*(x)=\frac{1}{2}x^3+x^2+x+C_1+C_2e^{\frac{1}{2}x}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}i+C_2e^{\frac{1}{2}x}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Secondo caso: $f(x)$ è il prodotto di un polinomio $P(x)=A_ox^k+\cdots+A_k$ di grado k per una funzione esponenziale $e^{\beta x}$ con β costante. $f(x)=P(x)\cdot e^{\beta x}$

Se β non è radice dell'equazione caratteristica $a_o\cdot\lambda^n+a_1\cdot\lambda^{n-1}+a_2\cdot\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\cdot\lambda+a_n=0$ $[56]$ allora un integrale particolare della $[57]$ è: $y_p(x)=\left(A_ox^k+A_1x^{k-1}+\cdots+A_{k-1}x+A_k\right)\cdot e^{\beta x}$

Si sostituisce nella $[57]$, si applica il principio di identità dei polinomi e si trovano i valori del coefficienti A_i.

Se β è radice multipla di ordine r dell'equazione caratteristica $a_o\cdot\lambda^n+a_1\cdot\lambda^{n-1}+a_2\cdot\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\cdot\lambda+a_n=0$ $[56]$ allora un integrale particolare della $[57]$ è:

$$y_p(x)=x^r\cdot\left(A_ox^k+A_1x^{k-1}+\cdots+A_{k-1}x+A_k\right)\cdot e^{\beta x}$$

Per la determinazione dei coefficienti A_i si procede come prima.

Caso particolare: $P(x)=1 \Rightarrow f(x)=e^{\beta x} \Rightarrow y_p(x)=e^{\beta x}$

$y''-2y'+y=e^x$ $(P(x)=1)$ $\lambda^2-2\lambda+1=0$ $\lambda_1=\lambda_2=1$ $(r=2)$

$y^*(x)=C_1e^x+C_2xe^x$ = integrale generale dell'equazione omogenea associata

$\lambda=1$ = radice multipla di ordine 2 dell'equazione caratteristica associata all'equazione proposta

$y_p(x)=x^2\cdot A\cdot e^x=A\cdot x^2\cdot e^x$ $(k=0)$ $y'(x)=2Axe^x+ax^2e^x$

$y''(x)=2Ae^x+2Axe^x+2Axe^x+ax^2e^x$ $y''-2y'+y=e^x$ $\Rightarrow$ $2Ae^x=e^x$ $A=\dfrac{1}{2}$

$y_p(x)=\dfrac{1}{2}x^2e^x$ = integrale particolare dell'equazione differenziale proposta

$y(x)=C_1e^x+C_2xe^x+\dfrac{1}{2}x^2e^x$ = integrale generale dell'equazione differenziale proposta

Terzo caso: $f(x)=P(x)\cdot e^{\alpha x}+Q(x)\cdot e^{\beta x}$

Basta cercare un integrale particolare $y_{p1}(x)$ di $f(x)=P(x)\cdot e^{\alpha x}$ ed un integrale particolare $y_{p2}(x)$ di $f(x)=Q(x)\cdot e^{\beta x}$. $y_p(x)=y_{p1}(x)+y_{p2}(x)$ è l'integrale particolare di $f(x)=P(x)\cdot e^{\alpha x}+Q(x)\cdot e^{\beta x}$

Quarto caso: $f(x)=p\cdot\cos kx+q\cdot\sin kx$ con p,q,k costanti reali

In questo casi un integrale particolare ci viene fornito da $y_p(x)=A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx$ se $\pm ik$ non sono radici dell'equazione caratteristica, da $y_p(x)=x^r\cdot(A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx)$ se $\pm ik$ sono radici (aventi molteplicità r) dell'equazione caratteristica. I valori delle costanti A,B vengono determinate procedendo come prima.

Quinto caso:

$f(x)=e^{\beta x}\cdot\cos kx$ oppure $f(x)=e^{\beta x}\cdot\sin kx$ oppure $f(x)=e^{\beta x}\cdot(\cos kx+\sin kx)$

Un integrale particolare ci viene fornito da:

$y_p(x)=e^{\beta x}\cdot(A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx)$ se $\beta\pm ki$ non sono radici dell'equazione caratteristica associata

$y_p(x)=x^r\cdot e^{\beta x}\cdot(A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx)$ se $\beta\pm ki$ sono radici (aventi molteplicità r) dell'equazione caratteristica associata

Sesto caso:

$f(x)=P(x)\cdot\cos kx$ oppure $f(x)=P(x)\cdot\sin kx$ oppure $f(x)=P(x)\cdot(\cos kx+\sin kx)$

Un integrale particolare ci viene fornito da:

$y_p(x)=e^{\beta x}\cdot(A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx)$ se $\beta\pm ki$ non sono radici dell'equazione caratteristica associata

$y_p(x)=x^r\cdot e^{\beta x}\cdot(A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx)$ se $\beta\pm ki$ sono radici (aventi molteplicità r) dell'equazione caratteristica associata

Settimo caso: $f(x)=e^{\beta x}\left[A(x)\cdot\cos kx+B(x)\cdot\sin kx\right]$ con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi e β e k numeri reali. Se $\beta\pm ki$ non sono radici dell'equazione caratteristica allora un integrale particolare ci viene fornito da: $y_p(x)=e^{\beta x}\left[A_1(x)\cdot\cos kx+B_1(x)\cdot\sin kx\right]$ dove $A_1(x)$ e $B_1(x)$ sono polinomi i cui gradi non superano il maggiore fra i gradi dei polinomi $A(x)$ e $B(x)$. Dei polinomi $A_1(x)$ e $B_1(x)$ bisogna calcolare i coefficienti utilizzando il principio di identità dei polinomi.

Se $\beta\pm ki$ sono radici (aventi molteplicità r) dell'equazione caratteristica allora un integrale particolare ci viene fornito da: $y_p(x)=x^r\cdot e^{\beta x}\left[A_1(x)\cdot\cos kx+B_1(x)\cdot\sin kx\right]$ dove $A_1(x)$ e $B_1(x)$ sono polinomi i cui gradi non superano il maggiore fra i gradi dei polinomi $A(x)$ e $B(x)$. Dei polinomi $A_1(x)$ e $B_1(x)$ bisogna calcolare i coefficienti utilizzando il principio di identità dei polinomi.

Ottavo caso: $f(x)=P(x)\cdot e^{\beta x}\cdot\cos kx$ oppure $f(x)=P(x)\cdot e^{\beta x}\cdot\sin kx$ con $P(x)$ polinomio di grado k. Si tratta di un caso particolare del precedente.

Se $\beta\pm ki$ non sono radici dell'equazione caratteristica allora un integrale particolare ci viene fornito da: $y_p(x)=e^{\beta x}\left[A(x)\cdot\cos kx+B(x)\cdot\sin kx\right]$ dove $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi di grado $\leq k$, dei quali bisogna calcolare i coefficienti utilizzando il principio di identità dei polinomi.

Se $\beta\pm ki$ sono radici (aventi molteplicità r) dell'equazione caratteristica allora un integrale particolare ci viene fornito da: $y_p(x)=x^r\cdot e^{\beta x}\left[A(x)\cdot\cos kx+B(x)\cdot\sin kx\right]$ dove $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi di grado $\leq k$, dei quali bisogna calcolare i coefficienti utilizzando il principio di identità dei polinomi.

$$y'''-4\cdot y''+13\cdot y'=x\left(e^{2x}+x\right)$$

Questa equazione differenziale può essere scritta anche nella seguente maniera:

$$y'''-4\cdot y''+13\cdot y'=x\cdot e^{2x}+x^2$$

Consideriamo l'**equazione omogenea associata** $y''' - 4\cdot y'' + 13\cdot y' = 0$ che ha come **equazione caratteristica** $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 13\lambda = \lambda\left(\lambda^2 - 4\lambda + 13\right) = 0$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono: $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2 - 3i \quad \lambda_3 = 2 + 3i \quad p = 2 \quad q = 3$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è il seguente.

$$y*(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + e^{px}\left(C_2 \cdot \cos qx + C_3 \cdot son\, qx\right) \qquad y*(x) = C_1 + e^{2x}\left(C_2 \cdot \cos 3x + C_3 \cdot son\, 3x\right)$$

Per calcolare l'**integrale particolare** dell'equazione differenziale proposta posso considerare le due seguenti equazioni differenziali: $y''' - 4\cdot y'' + 13\cdot y' = x \cdot e^{2x} \qquad y''' - 4\cdot y'' + 13\cdot y' = x^2$

Poiché $\beta = 2$ non è soluzione dell'equazione caratteristica $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$ un suo integrale particolare avrà la seguente forma: $y_{p1}(x) = (Ax + B)\cdot e^{2x}$ con A, B costanti da determinare.

Le derivate che ci servono per la sostituzione nell'equazione differenziale proposta sono:

$$y'_{p1}(x) = A\cdot e^{2x} + 2(Ax + B)\cdot e^{2x} = e^{2x}(A + 2Ax + 2B) = (2Ax + A + 2B)\cdot e^{2x}$$

$$y''_{p1}(x) = 2A\cdot e^{2x} + 2(2Ax + A + 2B)\cdot e^{2x} = e^{2x}(2A + 4Ax + 2A + 4B) = (4Ax + 4A + 4B)\cdot e^{2x}$$

$$y''_{p1}(x) = 4(Ax + A + B)\cdot e^{2x}$$

$$y'''_{p1}(x) = 4A\cdot e^{2x} + 8(Ax + A + B)\cdot e^{2x} = e^{2x}(4A + 8Ax + 8A + 8B) = (8Ax + 12A + 8B)\cdot e^{2x}$$

$$y'''_{p1}(x) = 4(2Ax + 3A + 2B)\cdot e^{2x}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale proposta otteniamo:

$$4(2Ax + 3A + 2B)\cdot \cancel{e^{2x}} - 4\left[4(2Ax + 3A + 2B)\cdot \cancel{e^{2x}}\right] + 13\left[(2Ax + A + 2B)\cdot \cancel{e^{2x}}\right] = x \cdot \cancel{e^{2x}}$$

$$4(2Ax + 3A + 2B) - 4\left[4(2Ax + 3A + 2B)\right] + 13\left[(2Ax + A + 2B)\right] = x \qquad 18Ax + 9A + 18B = x$$

Applicando il principio di identità dei polinomi otteniamo il seguente sistema: $\begin{cases} 18A = 1 \\ 9A + 18B = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} A=\dfrac{1}{18} \\ B=-\dfrac{1}{36} \end{cases} \qquad y_{p1}(x)=\left(\frac{1}{18}x-\frac{1}{36}\right)\cdot e^{2x}=\frac{1}{36}(2x-1)\cdot e^{2x}$$

Poiché $\lambda=0$ è soluzione dell'equazione caratteristica $\lambda^3-4\lambda^2+13\lambda=0$ avente molteplicità $r=1$ un suo **integrale particolare** avrà la seguente forma:

$y_{p2}(x)=x\left(Ax^2+Bx+C\right)=Ax^3+Bx^2+Cx$ con A,B,C costanti da determinare.

Le derivate che ci servono per la sostituzione nell'equazione differenziale proposta sono:

$$y'_{p2}(x)=3Ax^2+2Bx+C \qquad y''_{p2}(x)=6Ax+2B \quad y'''_{p2}(x)=6A$$

Sostituendo nell'equazione differenziale proposta otteniamo:

$$6A-4(6Ax+2B)+13\left(3Ax^2+2Bx+C\right)=x^2$$

Semplificando otteniamo: $\qquad 39Ax^2+(-24A+26B)x+(6A-8B+13C)=x^2$

Applicando il principio di identità dei polinomi otteniamo il seguente sistema: $\begin{cases} 39A=1 \\ -24A+26B=0 \\ 6A-8B+13C=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} A=\dfrac{1}{39} \\ B=\dfrac{4}{169} \\ C=\dfrac{6}{2197} \end{cases} \qquad y_{p2}(x)=x\left(\frac{1}{39}x^2+\frac{4}{169}x+\frac{6}{2197}\right)$$

$$y_p=y_{p1}+y_{p2}=\frac{1}{36}(2x-1)\cdot e^{2x}+x\left(\frac{1}{39}x^2+\frac{4}{169}x+\frac{6}{2197}\right) \qquad y(x)=y^*(x)+y_p(x) \quad \Rightarrow$$

$$y(x)=C_1+e^{2x}\left(C_2\cdot\cos 3x+C_3\cdot son3x\right)+\frac{1}{36}(2x-1)\cdot e^{2x}+x\left(\frac{1}{39}x^2+\frac{4}{169}x+\frac{6}{2197}\right)$$

Equazione di Bernoulli

Dicesi **equazione di Bernoulli** ogni equazione differenziale del primo ordine riconducibile alla seguente forma: $a(x)y' + b(x)y + c(x)y^n = 0$ con n diverso da 1 e 0 .

Tale equazione differenziale è facilmente riconducibile alla seguente forma canonica:

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^n \quad \text{cioè:} \quad y'(x)=a(x)\cdot y(x)+b(x)\cdot y^{\alpha}(x) \qquad [A]$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni continue in uno stesso intervallo $[a,b]$ ed n è un numero reale (che si può ritenere diverso da zero e da uno, per non ricadere nel caso delle equazioni lineari. Questa equazione può essere ricondotta ad un'equazione lineare mediante le seguenti considerazioni.

Moltiplico ambo i membri per y^{-n} ottenendo : $y'\cdot y^{-n} + p(x)\cdot y^{1-n} = q(x)$ $\quad [B]$

Pongo: $z(x) = y^{1-n}$ $\quad \left\{ y = z^{\frac{1}{1-z}} \right\} \quad [C]$

Derivando ambo i membri otteniamo: $z'(x) = (1-n)\cdot y^{-n}\cdot y'$, $y'\cdot y^{-n} = \dfrac{z'(x)}{1-n}$

Sostituendo questa espressione nell'equazione differenziale [B] otteniamo la seguente equazione lineare:

$$\frac{z'(x)}{1-n}+p(x)\cdot z=q(x) \qquad z'(x)+(1-n)\cdot p(x)\cdot z(x)=(1-n)\cdot q(x) \qquad z'(x)+a(x)\cdot z(x)= f(x) \quad [D]$$

Si tratta di una **equazione differenziale lineare completa** nell'incognita $z(x)$ del tipo

$$y'(x)+a(x)\cdot y(x)=f(x)$$

Sostituendo nella [C] l'**integrale generale** $z(x)$ dell'equazione differenziale [D], otteniamo l'*integrale generale* dell'equazione di Bernoulli: $\boxed{y(x) = \sqrt[1-n]{z(x)}}$

Se è $n > 0$ occorre poi considerare a parte la soluzione $y = 0$.

Infatti, $y = 0$ è certamente una soluzione dell'equazione differenziale $[B]$. In particolare, è un **integrale singolare** se $0 < n < 1$.

$\boxed{y' - \frac{1}{x} \cdot y = -x^3 y^4}$ $[F]$ Se moltiplico ambo i membri per y^{-4} ottengo:

$y' \cdot y^{-4} - \frac{1}{x} \cdot y^{-3} = -x^3$ Pongo: $z = y^{-3}$ $\left[y = z^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{z}} \right]$, $z' = -3y^{-4} \cdot y'$

$y' \cdot y^{-4} = -\frac{z'}{3}$, $-\frac{z'}{3} - \frac{1}{x} \cdot z = -x^3$, $z' = -\frac{3}{x} \cdot z + 3x^3$, $\boxed{z' + \frac{3}{x} \cdot z = 3x^3}$ $[E]$

Si tratta di una equazione lineare completa del primo ordine, che sappiamo risolvere.

Considero l'equazione omogenea associata: $z' + \frac{3}{x} \cdot z = 0$ $\frac{dz}{dx} = -\frac{3}{x} \cdot z$ $\frac{dz}{z} = -\frac{3}{x} dx$

$\int \frac{1}{z} dz = -3 \int \frac{1}{x} dx$ $\ln z = -3 \ln x + \ln C$ $\ln z x^3 = \ln C$ $z x^3 = C$

$\boxed{z^*(x) = \frac{C}{x^3}}$ = **integrale generale** dell'equazione omogenea associata

Mi trovo l'integrale generale dell'equazione lineare completa del primo ordine proposta supponendo che la sua struttura analitica sia la stessa dell'equazione omogenea associata, cioè supponendo che: $z(x) = \frac{\gamma(x)}{x^3}$ abbia la stessa struttura di $\boxed{z^*(x) = \frac{C}{x^3}}$

$$z'(x) = \frac{\gamma' \cdot x^3 - 3x^2 \cdot \gamma}{x^6} = \frac{\gamma' \cdot x - 3 \cdot \gamma}{x^4} = \frac{-\gamma'}{x^3} - \frac{3\gamma}{x^4}$$

Sostituendo nella $[E]$ otteniamo: $\frac{\gamma'}{x^3} - \cancel{\frac{3\gamma}{x^4}} + \cancel{\frac{3}{x} \cdot \frac{\gamma}{x^3}} = 3x^3$ $\frac{\gamma'}{x^3} - = 3x^3$ $\gamma' = 3x^6$ $\frac{d\gamma}{dx} = 3x^6$

$d\gamma = 3x^6 dx$ $\int d\gamma = 3 \int x^6 dx$ $\gamma(x) = \frac{3}{7} x^7 + h$ $z(x) = \frac{\gamma(x)}{x^3} = \frac{3}{7} x^7 + h$

$\boxed{z = \frac{3}{7} x^4 + \frac{h}{x^3}}$ = **integrale generale** dell'equazione differenziale $[E]$

$\boxed{y = \left[\frac{3}{7} x^4 + \frac{h}{x^3} \right]^{-1/3}}$ = **integrale generale** dell'equazione differenziale $[F]$

$y'=x\cdot y-x\cdot y^3$ $\quad y'\cdot y^{-3}=x\cdot y^{-2}-x$ $\quad$ Pongo: $z=y^{1-3}=y^{-2}$ $\quad$ Ottengo: $y^2=\frac{1}{z}$ $\quad z'=-2y^{-3}\cdot y'$

$y'\cdot y^{-3}=-\frac{1}{2}\cdot z'$ $\qquad -\frac{1}{2}\cdot z'=x\cdot z-x$ $\quad z'=-2x\cdot z+2x$ $\quad [G]$

Considero l'equazione omogenea associata: $z'=-2x\cdot z$ $\quad [H]$

$\frac{dz}{dx}=-2x\cdot z$ $\quad \frac{dz}{z}=-2xdx$

$\int\frac{1}{z}dz=-2\int xdx$ $\quad \ln z=-x^2+C$ $\quad z=e^{-x^2+C}=e^C\cdot e^{-x^2}=h\cdot e^{-x^2}$

$z*(x)=h\cdot e^{-x^2}$ = **integrale generale** dell'equazione omogenea associata

Mi trovo l' **integrale generale** dell'equazione lineare completa del primo ordine proposta supponendo che la sua struttura analitica sia la stessa dell'equazione omogenea associata, cioè supponendo che: $z(x)=\gamma(x)\cdot e^{-x^2}$ abbia la stessa struttura di $z*(x)=h\cdot e^{-x^2}$

$$z'(x)=\gamma'\cdot e^{-x^2}-2\gamma\cdot e^{-x^2}$$

Sostituendo nella $[H]$ otteniamo: $\gamma'\cdot e^{-x^2}-\cancel{2\gamma\cdot e^{-x^2}}=-\cancel{2\gamma\cdot e^{-x^2}}+2x$ $\quad \gamma'\cdot e^{-x^2}=+2x$

$\gamma'=2x\cdot e^{x^2}$ $\quad \gamma(x)=\int 2x\cdot e^{x^2}dx=e^{x^2}+K$ $\quad z(x)=\gamma(x)\cdot e^{-x^2}$ $\quad \Rightarrow \quad z(x)=\left(e^{x^2}+K\right)\cdot e^{-x^2}=1+K\cdot e^{-x^2}$

$y^2=\frac{1}{z}=\frac{1}{1+K\cdot e^{-x^2}}$ $\qquad y=\pm\frac{1}{\sqrt{1+K\cdot e^{-x^2}}}=\pm\frac{e^x}{\sqrt{e^{x^2}+k}}$

$y'+xy=x^3y^3$ Se moltiplico ambo i membri per y^{-3} ottengo: $\quad y^{-3}\cdot y' + xy^{-2} = x^3$

Pongo: $z = y^{-2}$, ottengo : $z' = -2y^{-3}\cdot y'$ $\qquad z'-2xy=-2x^3$

L'**integrale generale** di questa equazione differenziale lineare vale: $z(x)=x^2+1+k\cdot e^{x^2}$

L'*integrale generale* dell'equazione differenziale data è dunque:

$y^{-2}=x^2+1+k\cdot e^{x^2}$ $\qquad y=\frac{1}{\pm\sqrt{x^2+1+k\cdot e^{x^2}}}$

Equazioni differenziali del tipo $y'(x)=\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

Se le rette $ax+by+c=0$ e $a_1x+b_1y+c_1=0$ non sono parallele si risolve il sistema: $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$

e sia $P_o(x_o,y_o)$ il loro punto comune. Introduciamo due nuove variabili mediante le seguenti

trasformazioni: $\begin{cases} x=x_o+u \\ y=y_o+\text{v} \end{cases}$ $\begin{cases} u=x-x_o \\ \text{v}=y-y_o \end{cases}$ $\begin{cases} dx=du \\ dy=d\text{v} \end{cases}$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d\text{v}}{du}$ $y'(x)=\text{v}'(u)$

$a(x_o+u)+b(y_o+\text{v})+c=0 \quad ax_o+au+by_o+b\text{v}+c=0 \quad ax_o+by_o+c=0 \quad au+b\text{v}=0$

Procedendo in maniera analoga abbiamo: $a_1u+b_1\text{v}=0$

$$ax+by+c \to au+b\text{v} \qquad a_1x+b_1y+c_1 \to a_1u+b_1\text{v}$$

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \Rightarrow y'(x)=\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{au+b\text{v}}{a_1u+b_1\text{v}}\right)=f\left(\frac{a+b\frac{\text{v}}{u}}{a_1+b_1\frac{\text{v}}{u}}\right)=f\left(\frac{a+bz}{a_1+b_1z}\right) \qquad z=\frac{\text{v}}{u}$$

Pongo: $z=\frac{v}{u}=\frac{y-y_o}{z-u_o}$ $\quad v=z\cdot u \quad v'(u)=z'\cdot u+z \qquad v'(u)=f\left(\frac{a+bz}{a_1+b_1z}\right) \quad z'\cdot u+z=f\left(\frac{a+bz}{a_1+b_1z}\right)$

$\frac{dz}{du}\cdot u+z=f\left(\frac{a+bz}{a_1+b_1z}\right)$ Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili.

Esempio: $y'(x)=\frac{3x+y+2}{2x+4y-12}$ $\quad \begin{cases}3x+y+2=0\\2x+4y-12=0\end{cases} \quad \begin{cases}x_o=-2\\y_0=4\end{cases} \quad P_o(-2,4)$

Pongo: $\begin{cases}x=-2+u\\y=4+v\end{cases}$ Ottengo: $3x+y+2\to 3u+v \quad 2x+4y-12\to 2u+4v \quad \begin{cases}u=x-x_o=x+2\\v=y-y_o=y-4\end{cases}$

$$\begin{cases}dx=du\\dy=dv\end{cases} \quad v'(u)=\frac{dv}{du}=\frac{dy}{dx}=y'(x) \qquad y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{3x+y+2}{2x+4y-12} \Rightarrow \frac{dv}{du}=v'(u)=\frac{3u+v}{2u+4v} \Rightarrow$$

$$v'(u)=\frac{3+\frac{v}{u}}{2+4\frac{v}{u}}=\frac{3+z}{2+4z} \quad \text{con} \quad z=\frac{v}{u}=\frac{y-4}{x+2} \quad \Rightarrow \quad v=v(u)=z\cdot u \quad [z=z(u)]$$

$$v'(u)=z'\cdot u+z\cdot 1=z'\cdot u+z \qquad \begin{cases}v'(u)=\frac{3+z}{2+4z}\\v'(u)=z'\cdot u+z\end{cases}$$

$$z'\cdot u+z=\frac{3+z}{2+4z} \quad \Rightarrow \quad z'\cdot u=\frac{3+z}{2+4z}-z=\frac{3+z-2z-4z^2}{2+4z}=\frac{3-z-4z^2}{2+4z}$$

$$\frac{dz}{du}\cdot u=\frac{3-z-4z^2}{2+4z} \qquad \frac{u}{du}=\frac{3-z-4z^2}{2+4z}\cdot\frac{1}{dz} \qquad \frac{1}{u}\cdot du=\frac{2+4z}{3-z-4z^2}\cdot dz$$

Integrando ambo i membri otteniamo: $\int\frac{1}{u}\cdot du=-\int\frac{2+4z}{4z^2+z-3}\cdot dz$

$$\frac{2+4z}{4z^2+z-3}=\frac{2+4z}{(4z-3)(z+1)}=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{20}{7}\cdot\frac{1}{4z-3}$$

$$\int\frac{2+4z}{4z^2+z-3}\cdot dz=\int\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{20}{7}\cdot\frac{1}{4z-3}\right)dz=\frac{2}{7}\cdot\int\frac{1}{z+1}dz+\frac{20}{7}\cdot\int\frac{1}{4z-3}dz$$

$$\int \frac{2\ +\ 4z}{4z^2+z-3}\cdot dz=\frac{2}{7}\cdot\ln|z+1|+\frac{5}{7}\cdot\int\frac{1}{4z-3}d(4z-3)=\frac{2}{7}\cdot\ln|z+1|+\frac{5}{7}\cdot\ln|4z-3|$$

$$\ln|u|+\ln|C|=-\frac{2}{7}\cdot\ln|z+1|-\frac{5}{7}\cdot\ln|4z-3| \qquad \ln|(x+2)C|=-\frac{2}{7}\cdot\ln|z+1|-\frac{5}{7}\cdot\ln|4z-3|$$

$$\ln|(x+2)C|=-\frac{2}{7}\cdot\ln\left|\frac{y-4}{x+2}+1\right|-\frac{5}{7}\cdot\ln\left|\frac{4y-16}{x+2}-3\right|$$

$$\ln|(x+2)C|=-\frac{2}{7}\cdot\ln\left|\frac{x+y-2}{x+2}\right|-\frac{5}{7}\cdot\ln\left|\frac{-3x+4y-18}{x+2}\right|$$

Se le rette $ax+by+c=0$ e $a_1x+b_1y+c_1=0$ sono parallele l'equazione differenziale assume la forma: $y'(x)=\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{ax+by+c_1}\right)$ e l'equazione differenziale ottenuta si risolve mediante la sostituzione: $ax+by=z$ Otteniamo: $z'(x)=a+by'(x)$ $\frac{z'(x)}{b}-\frac{a}{b}=f\left(\frac{z+c}{z+c_1}\right)$

Esempio: $y'(x)=\frac{x+y+3}{x+y-7}$ Pongo: $x+y=z$ Ottengo: $1+y'=z'$ $y'=z'-1$ $y'(x)=\frac{z+3}{z-7}$

$$z'-1=\frac{z+3}{z-7} \quad z'=1+\frac{z+3}{z-7} \quad z'=\frac{2z-4}{z-7} \quad \frac{dz}{dx}=\frac{2z-4}{z-7} \quad dx=\frac{z-7}{2z-4}dz \quad \int dx=\int\frac{z-7}{2z-4}dz$$

$$x+C=\frac{1}{2}\int\frac{2z-14}{2z-4}dz=\frac{1}{2}\int\frac{2z-4-10}{2z-4}dz=\frac{1}{2}\int\frac{2z-4}{2z-4}dz-5\int\frac{1}{2z-4}dz$$

$$x+C=\frac{1}{2}z-\frac{5}{2}\ln|2z-4| \quad 2x+2C=z-5\ln|2z-4| \quad 2x+K=x+y-5\ln|2(x+y)-4|$$

$$2x+K=x+y-5\ln|2x+2y-4| \quad x+K=y-5\ln|2x+2y-4| \quad x+K=y-5\ln|2(x+y-2)|$$

$$x+K=y-5\ln 2-5\ln|x+y-2| \quad x+K+5\ln 2=y-5\ln|x+y-2| \quad x+H=y-5\ln|x+y-2|$$

Sommario

Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti cotanti del secondo ordine

$a \cdot y''(x)+b \cdot y'(x)+c \cdot y(x)=0$ **[19]** $a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$ **[20]** **equazione caratteristica** associata

L'integrale generale $y*(x)$ dell'equazione **[19]** è dato da:

- $y^*(x)=C_1 \cdot e^{\lambda_1 x}+C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$ **[21]** se: $\Delta=b^2-4ac>0$ cioè λ_1, λ_2 radici reali e distinte
- $y^*(x)=C_1 \cdot e^{\lambda_1 x}+C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda_2 x}=(C_1+C_2 \cdot x) \cdot e^{\lambda_1 x}$ **[22]** $\Delta=b^2-4ac=0$ cioè λ_1, λ_2 radici reali e coincidenti
- $y^*(x)=C_1 \cdot e^{px}\cos qx+C_2 \cdot e^{px}\sin qx=e^{px} \cdot (C_1 \cdot \cos qx+C_2 \cdot \sin qx)$ **[23]** $\Delta=b^2-4ac=0$ cioè λ_1, λ_2 radici reali e complesse e coniugate $\lambda_1=p-q \cdot i$ e $\lambda_2=p+q \cdot i$

Equazione lineare del secondo ordine completa a coefficienti costanti

$$a \cdot y''(x)+b \cdot y'(x)+c \cdot y(x)=f(x) \quad \textbf{[24]}$$

<<L'**integrale generale** $y(x)$ **dell'equazione completa** si ottiene aggiungendo all'**integrale generale** $y^*(x)$ **dell'equazione omogenea associata un integrale particolare** $y_p(x)$ **dell'equazione completa** $y(x) = y_p(x)+y^*(x)$ >>.

Metodo di Lagrange o della **variazione delle costanti** per la determinazione dell'**integrale particolare** $y_p(x)$ **dell'equazione completa**.

Trovati gli **integrali particolari** $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ dell'equazione omogenea associata possiamo scrivere il suo **integrale generale** nella seguente maniera: $y^*(x)=c_1 \cdot y_1(x)+c_2 \cdot y_2(x)$

Un **integrale particolare** dell'equazione [24] ha la seguente struttura:

$$y_p(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x) \qquad \textbf{[25]}$$

dove $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$ sono due funzioni delle x che si ottengono risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y_1(x)\cdot\gamma_1'(x) + y_2(x)\cdot\gamma_2'(x) = 0 \\ y_1'(x)\cdot\gamma_1'(x) + y_2'(x)\cdot\gamma_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Ci troviamo prima le funzioni $\gamma_1'(x)$ e $\gamma_2'(x)$ e, successivamente, attraverso altre due integrazioni, determiniamo le funzioni $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$ e, di conseguenza, troviamo l'integrale particolare $y_p(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x)$ **[25]**

Se il determinante (detto **Wronskiano**) del sistema di equazioni [26] è diverso da zero, allora possiamo determinare in maniera univoca le funzioni $\gamma_1'(x)$ e $\gamma_2'(x)$ che, con due successive integrazioni, ci consentono di individuare le funzioni $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \ \ (\textbf{Wronskiano}) \quad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}$$

$$\gamma_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} \qquad \gamma_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx \qquad \gamma_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} \qquad \gamma_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx$$

Se vengono date le condizioni iniziali abbiamo:

$$\gamma_1(x) = \int_{x_o}^{x} \frac{W_1(x)}{W(x)}dx \quad \gamma_2(x) = \int_{y_o}^{y} \frac{W_2(x)}{W(x)}dx \qquad y_p(x) = y_1(x)\int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx$$

L'**integrale generale** dell'equazione differenziale **[24]** risulta uguale a: $y(x) = y_p(x) + y^*(x)$

Osservazione: Se, quando integriamo le funzioni $\gamma_1'(x)$ e $\gamma_2'(x)$, noi introduciamo le corrispondenti costanti arbitrarie, allora otteniamo direttamente l'integrale generale dell'equazione differenziale [24], che può essere scritto nella seguente maniera:

$$y_p(x) = y_1(x)\left[\int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx + h\right] + y_2(x)\left[\int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx + k\right]$$

Come è facile intuire, il metodo appena esposto per la determinazione di un integrale particolare $y_p(x)$ ha il grave inconveniente di ridursi alle integrazioni: $\int \gamma_1'(x)dx$, $\int \gamma_2'(x)dx$

che, spesso, presentano notevoli difficoltà. Per tale ragione esporremo, in seguito, un metodo mediante il quale tali integrazioni si possono evitare. Tale metodo può essere applicato quando il termine noto $f(x)$ dell'equazione differenziale assume forme particolari.

Osservazione: Se in $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$ incorporiamo le costanti k_1 e k_2, allora

$y_p(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x)$ è l'**integrale generale** $y(x)$ dell'equazione differenziale proposta.

Metodo di Cauchy o della forma del termine noto o dei coefficienti indeterminati

Serve per calcolare un **integrale particolare** dell'equazione differenziale [24]

- $f(x) = b_o x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots\cdots + b_k$ = polinomio di grado k

$$y_p(x) = x^r \cdot Q(x) = x^r\left(A_o x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots\cdots + A_k\right)$$

dove $Q(x)$ rappresenta un polinomio di grado k, cioè un polinomio avente lo stesso grado di $f(x)$, **r** rappresenta l'**ordine di molteplicità** della radice **zero** dell'equazione caratteristica $a\cdot\lambda^2 + b\cdot\lambda + c = 0$. $c \neq 0 \Rightarrow r = 0$ $c = 0 \Rightarrow r = 1$ $b = c = 0 \Rightarrow r = 2$

- $f(x) = h\cdot e^{\beta x}$ con $h, \beta \in R$ noti $y_p(x) = \begin{cases} A\cdot e^{\beta x} & se \quad \beta \neq \lambda_1 \quad \beta \neq \lambda_2 \\ Ax\cdot e^{\beta x} & se \quad \beta = \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ Ax^2\cdot e^{\beta x} & se \quad \beta = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$

- $f(x) = P(x)\cdot e^{\beta x}$ con $P(x)$ polinomio di grado k

1° *caso* β non è radice dell'equazione caratteristica associata $y_p(x) = \left(A_o x^k + \cdots + A_k\right)e^{\beta x}$

2° *caso* β è radice avente molteplicità r (cioè 1 oppure 2) dell'equazione caratteristica associata

$$y_p(x) = x^r\left(A_o x^k + \cdots + A_k\right)e^{\beta x}$$

- $f(x) = p\cdot\cos kx + q\cdot\sin kx$

$y_p(x) = A\cdot\cos kx + B\cdot\sin kx$ se $\pm ik$ non è radice dell'equazione caratteristica associata

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$y_p(x) = x(A\cdot\cos kx + B\cdot\sin kx)$ se $\pm ik$ è radice dell'equazione caratteristica associata

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

- $f(x) = e^{\beta x}\left[P(x)\cdot\cos kx + R(x)\cdot\sin kx\right]$

$y_p(x) = e^{\beta x}\left[\underline{P}(x)\cdot\cos kx + \underline{R}(x)\cdot\sin kx\right]$ se i numeri $\beta \pm k\cdot i$ non sono radici dell'equazione caratteristica associata $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$y_p(x) = xe^{\beta x}\left[\underline{P}(x)\cdot\cos kx + \underline{R}(x)\cdot\sin kx\right]$ se i numeri $\beta \pm k\cdot i$ sono radici dell'equazione caratteristica associata $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$\underline{P}(x)$ ed $\underline{R}(x)$ sono polinomi di grado uguale al maggiore dei gradi dei polinomi $P(x)$ ed $R(x)$

I coefficienti dei polinomi $\underline{P}(x)$ ed $\underline{R}(x)$ vanno determinati sostituendo nell'equazione differenziale proposta ed applicando il principio di identità dei polinomi.

- se $f(x)$ è la somma di più termini $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$ dei tipi sopra considerati, allora l'**integrale particolare** ci viene dato dalla somma degli **integrali particolari** corrispondenti a ciascun termine di $f(x)$.

Sommario

Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti cotanti

$$a\cdot y^{(4)}+b\cdot y^{(3)}+c\cdot y''+d\cdot y'+e\cdot y=0 \quad [54] \quad \text{con } a,b,c,d,e \text{ costanti.}$$

equazione caratteristica associata: $a\cdot\lambda^4+b\cdot\lambda^3+c\cdot\lambda^2+d\cdot\lambda+e=0 \quad [56]$

Le sue soluzioni $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ possono essere: **(a) reali e distinte (b) reali e coincidenti (c) complesse e coniugate**.

(a) radici reali e distinte 4 integrali particolari

$$y_1(x)=e^{\lambda_1 x},\ y_2(x)=e^{\lambda_2 x},\ y_3(x)=e^{\lambda_3 x},\ y_4(x)=e^{\lambda_4 x}$$

L'**integrale generale** della $[54]$ è: $y^*(x)=C_1\cdot e^{\lambda_1 x}+C_2\cdot e^{\lambda_2 x}+C_3\cdot e^{\lambda_3 x}+C_4\cdot e^{\lambda_4 x}$

(b) radici reali ma non tutte distinte $\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$ **4 integrali particolari**

$$y_1(x)=e^{\lambda_1 x},\ y_2(x)=e^{\lambda_2 x},\ y_3(x)=x\cdot e^{\lambda_3 x},\ y_4(x)=x^2\cdot e^{\lambda_4 x}$$

L'**integrale generale** della $[54]$ è: $y^*(x)=C_1\cdot e^{\lambda_1 x}+C_2\cdot e^{\lambda_2 x}+C_3\cdot x\cdot e^{\lambda_3 x}+C_4\cdot x^2\cdot e^{\lambda_4 x}$

(c) due radici reali distinte e due radici complesse e coniugate

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \lambda_3 = p - i \cdot q \quad \lambda_4 = p + i \cdot q$$

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x},\ y_2(x) = e^{\lambda_2 x},\ y_3(x) = e^{px} \cdot \cos qx,\ y_4(x) = e^{px} \cdot \sin qx$$

$$y^*(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + C_3 \cdot e^{px} \cdot \cos qx + C_4 \cdot e^{px} \cdot \sin qx = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + e^{px}\left(C_3 \cdot \cos qx + C_4 \cdot \sin qx\right)$$

Equazioni differenziali lineari completa a coefficienti cotanti

$a \cdot y^{(4)} + b \cdot y^{(3)} + c \cdot y'' + d \cdot y' + e \cdot y = f(x)$ $[57]$ con a, b, c, d, e costanti.

Il suo integrale generale è: $y(x) = y^*(x) + y_p(x)$ dove $y^*(x)$ è l'integrale generale $[54]$ e $y_p(x)$ un integrale particolare della $[57]$

Metodo dei coefficienti indeterminati per il calcolo di $y_p(x)$

(1) $f(x) = m \cdot x^4 + n \cdot x^3 + p \cdot x^2 + q \cdot x + t$ = polinomio di grado $k = 4$

$y_p(x) = x^r \cdot \left(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E\right)$ con A, B, C, D, E costanti da determinare ed r è il **grado di molteplicità** della radice λ dell'equazione caratteristica $a \cdot \lambda^4 + b \cdot \lambda^3 + c \cdot \lambda^2 + d \cdot \lambda + e = 0$ $[56]$

- $e \neq 0 \Rightarrow r = 0$ non ci sono radici multiple $y_p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

- $e = 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow r = 1$ $a \cdot \lambda^4 + b \cdot \lambda^3 + c \cdot \lambda^2 + d \cdot \lambda = 0 \Rightarrow \lambda \cdot \left(a \cdot \lambda^3 + b \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + d\right) = 0$

$\lambda = 0$ ha molteplicità 1, si tratta di una radice semplice dell'equazione caratteristica $[56]$

$$y_p(x) = x \cdot \left(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E\right)$$

- $e = d = 0 \wedge c \neq 0 \Rightarrow r = 2$ $a \cdot \lambda^4 + b \cdot \lambda^3 + c \cdot \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 \cdot \left(a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c\right) = 0$

$\lambda = 0$ ha molteplicità 2, si tratta di una radice doppia dell'equazione caratteristica $[56]$

$$y_p(x) = x^2 \cdot \left(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E\right)$$

con A, B, C, D, E costanti da determinare imponendo che $y_p(x)$ è una soluzione dell'equazione differenziale $[57]$

(2) $f(x)=P(x)\cdot e^{\beta x}$ = con $P(x)$, ad esempio, polinomio di grado $k=3$

$$P(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

- se β non è soluzione dell'equazione caratteristica $a\cdot\lambda^4+b\cdot\lambda^3+c\cdot\lambda^2+d\cdot\lambda+e=0$ $[56]$

$y_p(x)=\left(mx^3+nx^2+gx+t\right)\cdot e^{\beta x}$ con m, n, g, t costanti da determinare

- β è **radice multipla di ordine** r dell'equazione caratteristica

$$a\cdot\lambda^4+b\cdot\lambda^3+c\cdot\lambda^2+d\cdot\lambda+e=0 \quad [56]$$

se, ad esempio, risulta $r=2$, abbiamo:

$y_p(x)=x^2\left(mx^3+nx^2+gx+t\right)\cdot e^{\beta x}$ con m, n, g, t costanti da determinare

(3) $f(x)=p\cdot\cos kx+q\cdot\sin kx$

- ik non è radice dell'equazione caratteristica $a\cdot\lambda^4+b\cdot\lambda^3+c\cdot\lambda^2+d\cdot\lambda+e=0$ $[56]$

$y_p(x)=A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx$ con A, B costanti da determinare

- ik è radice dell'equazione caratteristica $a\cdot\lambda^4+b\cdot\lambda^3+c\cdot\lambda^2+d\cdot\lambda+e=0$ $[56]$ $r=2$ (ad esempio)

$y_p(x)=x^2\cdot(A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx)$ con A, B costanti da determinare

(4) $f(x)=e^{\beta x}\cdot p\cdot\cos kx$ oppure $f(x)=e^{\beta x}\cdot q\cdot\sin kx$ oppure $f(x)=e^{\beta x}\cdot(p\cdot\cos kx+q\cdot\sin kx)$

con β, p, q, k costanti note

- $\beta\pm ik$ non sono radici dell'equazione caratteristica $a\cdot\lambda^4+b\cdot\lambda^3+c\cdot\lambda^2+d\cdot\lambda+e=0$ $[56]$

$y_p(x)=e^{\beta x}\cdot(A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx)$ con A, B costanti da determinare

- $\beta \pm ik$ sono radici dell'equazione caratteristica $a \cdot \lambda^4 + b \cdot \lambda^3 + c \cdot \lambda^2 + d \cdot \lambda + e = 0$ $[56]$ aventi, ad esempio, molteplicità $r = 2$

$y_p(x) = x^2 \cdot e^{\beta x} \cdot (A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx)$ con A, B costanti da determinare

(5) $f(x) = P_m(x) \cdot e^{\beta x} \cdot (p\cos kx + q\sin kx)$ con β, p, q, k costanti note e $P_m(x)$ polinomio di grado m noto

- $\beta \pm ik$ non sono radici dell'equazione caratteristica $a \cdot \lambda^4 + b \cdot \lambda^3 + c \cdot \lambda^2 + d \cdot \lambda + e = 0$ $[56]$

$y_p(x) = e^{\beta x} \cdot [T(x) \cdot \cos kx + R(x) \cdot \sin kx]$ con $T(x), R(x)$ polinomi di grado $\leq m$ i cui coefficienti sono da determinare

- $\beta \pm ik$ sono radici dell'equazione caratteristica $a \cdot \lambda^4 + b \cdot \lambda^3 + c \cdot \lambda^2 + d \cdot \lambda + e = 0$ $[56]$ aventi molteplicità r

$y_p(x) = x^r \cdot e^{\beta x} \cdot [T(x) \cdot \cos kx + R(x) \cdot \sin kx]$ con $T(x), R(x)$ polinomi di grado $\leq m$ i cui coefficienti sono da determinare

(6) $f(x) = e^{\beta x}[A(x) \cdot \cos kx + B(x) \cdot \sin kx]$ con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi noti e β e k numeri reali.

Se $\beta \pm ki$ non sono radici dell'equazione caratteristica allora un integrale particolare ci viene fornito da: $y_p(x) = e^{\beta x}[A_1(x) \cdot \cos kx + B_1(x) \cdot \sin kx]$ dove $A_1(x)$ e $B_1(x)$ sono polinomi i cui gradi non superano il maggiore fra i gradi dei polinomi $A(x)$ e $B(x)$. Dei polinomi $A_1(x)$ e $B_1(x)$ bisogna calcolare i coefficienti utilizzando il principio di identità dei polinomi.

Se $\beta \pm ki$ sono radici (aventi molteplicità r) dell'equazione caratteristica allora un integrale particolare ci viene fornito da: $y_p(x) = x^r \cdot e^{\beta x}[A_1(x) \cdot \cos kx + B_1(x) \cdot \sin kx]$ dove $A_1(x)$ e $B_1(x)$ sono polinomi i cui gradi non superano il maggiore fra i gradi dei polinomi $A(x)$ e $B(x)$. Dei polinomi $A_1(x)$ e $B_1(x)$ bisogna calcolare i coefficienti utilizzando il principio di identità dei polinomi.

(7) $f(x) = P(x) \cdot e^{\beta x} \cdot \cos kx$ oppure $f(x) = P(x) \cdot e^{\beta x} \cdot \sin kx$ con $P(x)$ polinomio di grado k.

Si tratta di un caso particolare del precedente.

Se $\beta \pm ki$ non sono radici dell'equazione caratteristica allora un integrale particolare ci viene fornito da: $y_p(x) = e^{\beta x}\left[A(x)\cdot\cos kx + B(x)\cdot\sin kx\right]$ dove $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi di grado $\leq k$, dei quali bisogna calcolare i coefficienti utilizzando il principio di identità dei polinomi.

Se $\beta \pm ki$ sono radici (aventi molteplicità r) dell'equazione caratteristica allora un integrale particolare ci viene fornito da: $y_p(x) = x^r \cdot e^{\beta x}\left[A(x)\cdot\cos kx + B(x)\cdot\sin kx\right]$ dove $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi di grado $\leq k$, dei quali bisogna calcolare i coefficienti utilizzando il principio di identità dei polinomi.

(8) $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)\cdots$ con $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)\cdots$ funzioni dei tipi visti in precedenza. In questa circostanza si considerino le seguenti 4 equazioni differenziali:

$$a\cdot y^{(4)} + b\cdot y^{(3)} + c\cdot y'' + d\cdot y' + e\cdot y = f_1(x) \quad a\cdot y^{(4)} + b\cdot y^{(3)} + c\cdot y'' + d\cdot y' + e\cdot y = f_2(x)$$

$$a\cdot y^{(4)} + b\cdot y^{(3)} + c\cdot y'' + d\cdot y' + e\cdot y = f_3(x) \quad a\cdot y^{(4)} + b\cdot y^{(3)} + c\cdot y'' + d\cdot y' + e\cdot y = f_4(x) \quad [57A]$$

Se $y_{p1}(x), y_{p4}(x), y_{p3}(x), y_{p4}(x)$ sono gli integrali particolari delle precedenti equazioni differenziali, un integrale particolare dell'equazione differenziale

$$a\cdot y^{(4)} + b\cdot y^{(3)} + c\cdot y'' + d\cdot y' + e\cdot y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)$$

è dato da: $y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p4}(x) + y_{p3}(x) + y_{p4}(x)$

Metodo di Lagrange per la risoluzione delle equazioni differenziali lineari complete (o metodo della variazione delle costanti arbitrarie)

Questo metodo ci consente di calcolare un **integrale particolare** $y_p(x)$ quando conosciamo l'**integrale generale** $y^*(x)$ dell'equazione omogenea associata [4]. Consideriamo per semplicità l'equazione del terzo ordine: $y''' + a_1(x)\cdot y'' + a_2(x)\cdot y' + a_3(x)\cdot y = f(x)$ [11] avente come equazione omogenea associata: $y''' + a_1(x)\cdot y'' + a_2(x)\cdot y' + a_3(x)\cdot y = 0$ [12]

della quale $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ sono tre **integrali particolari** fra loro linearmente indipendenti, cioè a Wronskiano diverso da zero. $y^*(x) = c_1\cdot y_1(x) + c_2\cdot y_2(x) + c_3\cdot y_3(x)$

I 3 integrali particolari sono fra loro linearmente indipendenti se l'equazione differenziale è a coefficienti costanti.

- **Wronskiano** $W(x)$ di n funzioni $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ è il determinante formato dalle n funzioni e dalle loro derivate fine all'ordine $n-1$. Se $W(x) \neq 0$ le n funzioni sono **linearmente indipendenti**, se $W(x) = 0$ le n funzioni sono **linearmente dipendenti**.

Dell'equazione [11] ricerchiamo un integrale particolare $y_p(x)$ avente una espressione formale analoga a quella dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata, nella quale però alle costanti c_1, c_2, c_3 si sostituiscono tre funzioni $\gamma_1(x), \gamma_2(x), \gamma_3(x)$ derivabili e da determinare.

$$y_p(x) = \gamma_1(x) \cdot y_1(x) + \gamma_2(x) \cdot y_2(x) + \gamma_3(x) \cdot y_3(x) \qquad [13]$$

con $\gamma_1(x), \gamma_2(x), \gamma_3(x)$ (prima indicate con c_1, c_2, c_3) funzioni incognite da determinare in modo che esse verifichino la [11]. [12]

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} \qquad [14]$$

Si dimostra che le funzioni $\gamma_1(x), \gamma_2(x), \gamma_3(x)$ si ottengono risolvendo con la regola di Cramer il seguente sistema nelle incognite $\gamma_1'(x), \gamma_2'(x), \gamma_3'(x)$ e poi integrando le suddette funzioni:

$$\begin{cases} y_1(x) \cdot \gamma_1'(x) + y_2(x) \cdot \gamma_2'(x) + y_3(x) \cdot \gamma_3'(x) = 0 \\ y_1'(x) \cdot \gamma_1'(x) + y_2'(x) \cdot \gamma_2'(x) + y_3'(x) \cdot \gamma_3'(x) = 0 \\ y_1''(x) \cdot \gamma_1'(x) + y_2''(x) \cdot \gamma_2'(x) + y_3''(x) \cdot \gamma_3'(x) = f(x) \end{cases} \qquad [15]$$

Si ottiene:

$$\gamma_1'(x) = \frac{\alpha(x)}{W(x)} = \sigma(x) \Rightarrow \gamma_1(x) = \int \sigma(x)dx = A(x)$$

$$\gamma_2'(x) = \frac{\beta(x)}{W(x)} = \delta(x) \Rightarrow \gamma_2(x) = \int \delta(x)dx = B(x)$$

$$\gamma_3'(x) = \frac{\Phi(x)}{W(x)} = \mu(x) \Rightarrow \gamma_3(x) = \int \mu(x)dx = C(x)$$ [13]

Un integrale particolare dell'equazione differenziale [11] è:

$$y_p(x) = y_1(x) \cdot \int \sigma(x)dx + y_2(x) \cdot \int \delta(x)dx + y_3(x) \cdot \int \mu(x)dx =$$

$$= y_1(x) \cdot A(x) + y_2(x) \cdot B(x) + y_3(x) \cdot C(x)$$

L'**integrale generale** dell'equazione [11] è: $y(x) = y_p(x) + y^*(x)$

---

[12] Le funzioni $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ o le conosciamo preventivamente o dobbiamo conoscere qualche metodo che ci consenta di calcolarle

[13] $\alpha(x) = W_1(x)$, $\beta(x) = W_2(x)$, $\Phi(x) = W_3(x)$

Equazioni differenziali esatte

Noi sappiamo che la forma generale dell'equazione differenziale del primo ordine in forma normale è:

$$y'(x)=\alpha(x,y) \quad \text{cioè} \quad \frac{dy}{dx}=\alpha(x,y) \qquad [\sigma]$$

L'integrazione di equazioni differenziali di questo tipo non presenta grosse difficoltà se la funzione $\alpha(x,y)$ assume una delle tre seguenti forme:

$\alpha(x,y)=M(x)\cdot N(x) \quad \alpha(x,y)=M(x) \quad \alpha(x,y)=N(x)$

Si tratta di equazioni differenziali a variabili separabili che abbiamo visto come si risolvono.

Nel caso più generale abbiamo: $\alpha(x,y)=-\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ e l'equazione differenziale $[\sigma]$ diventa:

$$M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0 \qquad [\rho]$$

Una espressione del tipo $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy$ $[\rho]$ è detta differenziale esatto se esiste una funzione $f(x,y)$ per la quale risulta: $d\,f(x,y)=M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy$ $[P]$

Se non esiste una siffatta funzione, allora l'espressione $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy$ non è un differenziale esatto. Si presentano tre questioni:

(1) Come si fa a sapere se una data espressione è o non è un differenziale esatto?

(2) Se l'espressione è un differenziale esatto, come si trova la funzione $f(x,y)$ di cui è un differenziale esatto?

(3) Se l'espressione $[\rho]$ non è un differenziale esatto, come si può risolvere l'equazione differenziale $[\sigma]$?

Teorema: **Criterio per stabilire se la forma differenziale** $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy$ **è un differenziale esatto**. Supponiamo che le funzioni $M(x,y)$ ed $N(x,y)$ e le loro derivate parziali prime $M_x=\frac{\partial M}{\partial x}$, $M_y=\frac{\partial M}{\partial y}$, $N_x=\frac{\partial N}{\partial x}$, $N_y=\frac{\partial N}{\partial y}$ siano continue in un dominio semplicemente connesso D.

Allora una condizione necessaria e sufficiente perché $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy$ sia un differenziale esatto è che risulti: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

Se queste condizioni sono verificate allora è possibile trovare una funzione $f(x,y)$ per la quale risulta:

$$d\,f(x,y)=M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy \qquad [P] \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$$

L'equazione differenziale $\alpha(x,y)=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ cioè $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0$ è una equazione il cui primo membro è una forma differenziale lineare. Se tale forma è un differenziale esatto, l'equazione si dice **equazione differenziale esatta**.

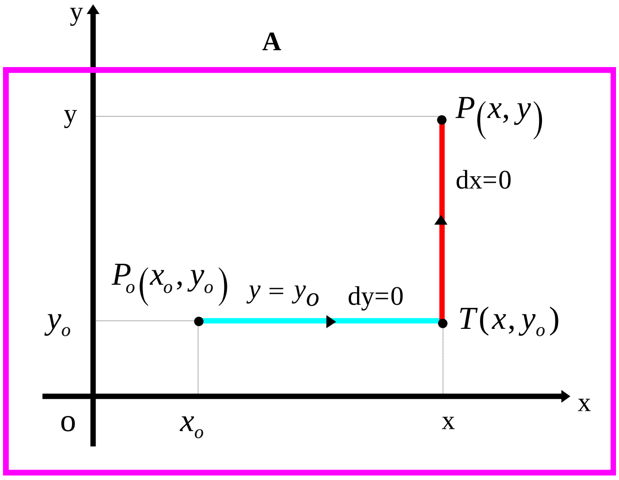
Per determinare la funzione $f(x,y)$ possiamo utilizzare due procedimenti diversi che conducono allo stesso risultato.

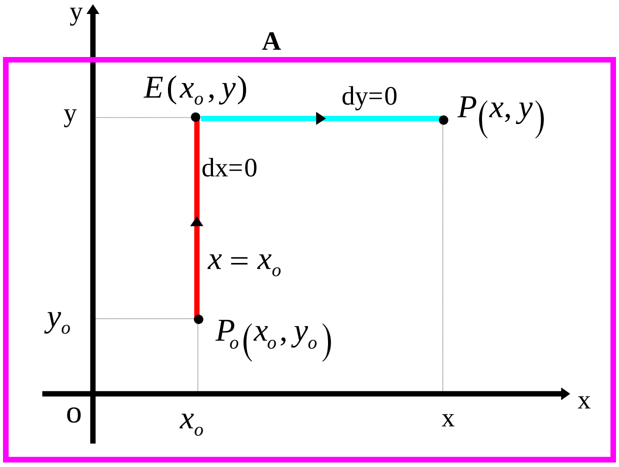
Primo procedimento: Se $P_o(x_o,y_o)$ è un punto qualsiasi del dominio semplicemente connesso D, allora la funzione $f(x,y)$ si ricava applicando una delle due seguenti formule:

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y_o)\,dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)\,dy=C \qquad f(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}N(x_o,y)\,dy=C$$

Se possibile, utilizzare come punto $P_o(x_o,y_o)$ il punto $O(0,0)$. Queste due formule possono essere facilmente ricordate se utilizziamo i due seguenti schemi se, Come dominio semplicemente connesso D scegliamo il rettangolo avente i lati paralleli agli assi cartesiani: $A =]a,b[\times]c,d[$ (intervallo di R^2)

Con questa sostituzione basta integrare lungo la spezzata P_oTP o lungo la spezzata P_oEN





Quando utilizziamo la formula $f(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_o,y)\,dy$ bisogna osservare che:

(1) il primo integrale del secondo membro $\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx$ è calcolato rispetto ad x e la y è ritenuta costante

(2) il secondo integrale $\int_{y_0}^{y} N(x_o,y)\,dy$ è calcolato rispetto ad y.

Osservazioni simili valgono se utilizziamo la formula $f(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y_o)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy$

$\left(3x^2y-y^2\right)dx+\left(x^3-2xy+1\right)dy=0$ $\quad M(x,y)=3x^2y-y^2 \quad N(x,y)=x^3-2xy+1$

Risulta: $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=3x^2-2y \quad D=\mathbb{R}^2$ che è un dominio semplicemente connesso

La forma differenziale $\left(3x^2y-y^2\right)dx+\left(x^3-2xy+1\right)dy$ è esatta e possiamo calcolare la funzione $f(x,y)$ utilizzando, ad esempio, la prima formule e scegliendo come punto $P_o(x_o,y_o)$ l'origine degli assi cartesiani $O(0,0)$

$$f(x,y)=\int_0^x\left(3x^2\cdot 0-0\right)dx+\int_0^y\left(x^3-2xy+1\right)dy=0+\left[x^3y-xy^2+y\right]_0^y=x^3y-xy^2+y=C$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale proposta è: $x^3y - xy^2 + y = C$ Si trova lo stesso risultato utilizzando la seconda formula $f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_o,y)\,dy = C$

$$f(x,y) = \int_0^x \left(3x^2y - y^2\right)dx + \int_0^y (0 - 2\cdot 0\cdot y + 1)\,dy = \left[x^3y - xy^2\right]_0^x + [y]_0^y = x^3y - xy^2 + y = C$$

Secondo procedimento: Se è verificata la condizione $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ allora esiste una funzione $f(x,y)$ per la quale risulta $d\,f(x,y) = f_x\cdot dx + f_y\cdot dy = M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy$

Questo vuole dire che $[51]$ $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ $\qquad f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ $[52]$

Dalla $[51]$, ritenendo la y costante, ricaviamo:

$$\partial f = M(x,y)\cdot\partial x \;\Rightarrow\; \int\partial f = \int M(x,y)\cdot\partial x + g(y) \;\Rightarrow\; f(x,y) = \int M(x,y)\cdot\partial x + g(y) \quad [53]$$

La costante additiva $g(y)$ dell'integrale indefinito è una funzione della y in quanto nella funzione $f(x,y)$ abbiamo ritenuto x variabile ed y costante. Per determinare la funzione $g(y)$ utilizzo la relazione $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ $[53]$ rispetto ad y

Derivo ambo i membri della $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\cdot\partial x + \dfrac{\partial}{\partial y} g(y)$

$$N(x,y) = \int \frac{\partial}{\partial y} M(x,y)\cdot\partial x + g'(y) \quad N(x,y) = \int \frac{\partial N}{\partial x}\cdot\partial x + g'(y) \quad N(x,y) = \int \partial N + g'(y)$$

$$N(x,y) = N(x,y) + K + g'(y) \qquad K + g'(y) = 0 \qquad g'(y) = -K \qquad g(y) = -K\,y$$

$$f(x,y) = \int M(x,y)\cdot\partial x - K\,y + C \quad [53]$$

Applichiamo questo procedimento all'esempio precedente.

La funzione $f(x,y)$ da ricercare deve essere tale da soddisfare le due equazioni:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=X(x,y)=3x^2y-y^2 \qquad [\partial f=(3x^2y-y^2)\partial x]$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=Y(x,y)=x^3-2xy+1 \qquad [\partial f=(x^3-2xy+1)\partial y$$

Dalla prima di queste due equazioni possiamo ricavare $f(x,y)$ effettuando una integrazione indefinita rispetto alla variabile indipendente x (pensando fissa l'altra variabile indipendente y). Con ciò otteniamo la $f(x,y)$ a meno di una costante additiva dipendente dalla y. Integrando otteniamo: $\int\partial f=\int(3x^2y-y^2)\partial x \quad f(x,y)=x^3y-xy^2+\varphi(y)\ [5]$

Adesso bisogna determinare la funzione $\varphi(y)$ in modo che sia verificata anche la seconda equazione $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)=x^3-2xy+1 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^3-2xy+\varphi'(y) \ \Rightarrow$

$$\cancel{x^3}-\cancel{2xy}+\varphi'(y)=\cancel{x^3}-\cancel{2xy}+1 \qquad \varphi'(y)=1 \ \Rightarrow\ \frac{d\varphi}{dy}=1 \ \Rightarrow\ d\varphi=dy \qquad \int d\varphi=\int dy$$

$\varphi=y+C$ sostituendo nella $[5]$ otteniamo: $\quad f(x,y)=x^3y-xy^2+y+C$

Se utilizzo la relazione $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=Y(x,y)=x^3-2xy+1 \quad [\partial f=(x^3-2xy+1)\partial y$ ottengo:

$$\int\partial f=\int(x^3-2xy+1)\partial y+p(x) \qquad f(x,y)=x^3y-xy^2+y+p(x)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3x^2y^2-y^2+p'(x) \qquad 3x^2y^2-y^2=3x^2y^2-y^2+p'(x) \qquad p'(x)=0 \qquad p(x)=C$$

$f(x,y)=x^3y-xy^2+y+C$ Abbiamo trovato lo stesso risultato.

Quanto detto in precedenza può essere sostituito dalle seguenti considerazioni.

La funzione $f(x,y)$ può essere calcolata anche in base al seguente ragionamento. Se $f(x,y)$ è una **primitiva** della forma differenziale lineare $M\,dx+N\,dy$ risulta identicamente: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)}$

Detti x_o un punto fisso ed x un punto variabile dell'intervallo limitato e aperto $]a,b[$, per ogni $y\in]c,d[$ (cioè pensando di mantenere fisso y) abbiamo: $f(x,y)=\int_{x_o}^{x} M(x,y)dx+g(y)$

(abbiamo effettuato una integrazione indefinita rispetto ad x mantenendo y costante; per questo motivo la costante additiva è una funzione di y, cioè: $C=g(y)$)

Partendo dalla relazione $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ ricaviamo $f(x,y)=\int\limits_{x_o}^{x} M(x,y)dx+g(y)$

Derivando ambo i membri rispetto ad y otteniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\int_{x_o}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx+g'(y)=\int_{x_o}^{x}\frac{\partial N}{\cancel{\partial x}}\cancel{dx}+g'(y)=\int_{x_o}^{x}\partial N(x,y)+g'(y)$$

$N(x,y)=\left[N(x,y)\right]_{x_o}^{x}+g'(y)$, $N(x,y)=N(x,y)-N(x_o,y)+g'(y)$

$$g'(y)=N(x_o,y) \quad\Rightarrow\quad g(y)=\int_{y_o}^{y}N(x_o,y)dy+C$$

Partendo dalla relazione $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$ ricaviamo $f(x,y)=\int_{y_o}^{y}N(x,y)dy+p(x)$

Derivando ambo i membri rispetto ad x e ricordando che $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ ricaviamo:

$$M(x,y)=\int_{y_o}^{y}\frac{\partial N}{\partial x}dy+p'(x)=\int_{y_o}^{y}\frac{\partial M}{\cancel{\partial y}}\cancel{dy}+p'(x)=\int_{y_o}^{y}\partial M(x,y)+p'(x)$$

$M(x,y)=M(x,y)-M(x,y_o)+p(x) \qquad g'(x)=X(x,y_o) \qquad p(x)=\int_{x_o}^{x}M(x,y_o)dx+C$

Se possibile conviene scegliere come punto $P_o(x_o,y_o)$ il punto $O(0,0)$

Ritornando all'esercizio precedente abbiamo:

$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=3x^2y-y^2 \qquad f(x,y)=\int_0^x(3x^2y-y^2)dx+g(y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\int_0^x(3x^2-2y)dx+g'(y)$,

$x^3-2xy+1=x^3-2xy+g'(y) \qquad g(y)=1\Rightarrow\ g(y)=\int\limits_0^y dy=y+C \ \Rightarrow\ f(x,y)=x^3y-x^2+y+C$

Fattore integrante

Consideriamo e l'equazione differenziale $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0$ $[\rho]$ con $M(x,y)$, $N(x,y)$ definite in un dominio semplicemente connesso e supponiamo che tale equazione differenziale non sia esatta. Questo significa che $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot d$ non è un differenziale esatto. Ci poniamo il problema di vedere se esiste una funzione β (diversa da zero) della sola variabile x [$\beta(x)$] o della sola variabile y [$\beta(y)$] o di entrambe le variabili [$\beta(x,y)$] in m odo che l'equazione differenziale equivalente alla data $\beta \cdot M(x,y) \cdot dx + \beta \cdot N(x,y) \cdot dy = 0$ sia esatta.

Teorema: Se l'espressione $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} = g(x)$ risulta funzione della sola variabile x, allora esiste una funzione $\beta(x)$ della variabile x detta **fattore integrante**, tale che l'equazione differenziale $\beta(x) \cdot M(x,y) \cdot dx + \beta(x) \cdot N(x,y) \cdot dy = 0$ è esatta.

Il fattore integrante $\beta(x)$ si ricava applicando la seguente formula: $\beta(x) = e^{\int g(x)dx}$

Teorema: Se l'espressione $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} = p(y)$ risulta funzione della sola variabile y, allora esiste una funzione $\beta(y)$ della variabile y detta **fattore integrante**, tale che l'equazione differenziale $\beta(y) \cdot M(x,y) \cdot dx + \beta(y) \cdot N(x,y) \cdot dy = 0$ è esatta.

Il fattore integrante $\beta(y)$ si ricava applicando la seguente formula: $\beta(y) = e^{\int p(y)dy}$

Osservazione generale: Si può dimostrare che si può rendere esatta ogni equazione differenziale del primo ordine $M(x,y) \cdot dx + N(x,y) \cdot dy = 0$ $[\rho]$ moltiplicandola per un appropriato fattore integrante $\beta(x,y)$. Tale **fattore integrante** ha la proprietà di verificare la seguente relazione: $\dfrac{\partial}{\partial y}[\beta(x,y) \cdot M(x,y)] = \dfrac{\partial}{\partial x}[\beta(x,y) \cdot N(x,y)]$

Purtroppo non è facile determinare $\beta(x,y)$ partendo da questa equazione.

Esempio N°1: $(1-x^2y) \cdot dx + (x^2y - x^3) \cdot dy = 0$ $M(x,y) = 1 - x^2y$ $N(x,y) = x^2y - x^3$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = -x^2 \neq \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2$ $(1-x^2y) \cdot dx + (x^2y - x^3) \cdot dy$ non è un differenziale esatto

Cerchiamo, se possibile, un **fattore integrante**. In questo caso risulta:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}=g(x)=-\frac{2}{x} \qquad \beta(x)=e^{\int g(x)dx}=e^{-2\int\frac{1}{x}dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{e^{2\ln x}}=\frac{1}{\left(e^{\ln x}\right)^2}=\frac{1}{x^2}$$

L'equazione differenziale proposta, moltiplicandone ambo i membri per $\frac{1}{x^2}$, si trasforma nella seguente equazione differenziale esatta: $\left(\frac{1}{x^2}-y\right)\cdot dx+(y-x)\cdot dy=0$

Scelto come punto $P_o(x_o,y_o)$ il punto $P(1,0)$ ed applicando la formula

$$f(x,y)=\int_1^x M(x,y_o)dx+\int_0^y N(x,y)dy=C$$

Si trova che l'integrale generale è: $xy^2-2x^2y-2=Cx$

Esempio N°2: $y^2\cdot dx+(xy-1)\cdot dy=0 \quad M(x,y)=y^2 \quad N(x,y)=xy-1$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2y\neq\frac{\partial N}{\partial x}=y \quad y^2\cdot dx+(xy-1)\cdot dy$ non è un differenziale esatto

Cerchiamo, se possibile, un **fattore integrante**. In questo caso risulta:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}=p(y)=-\frac{1}{y} \qquad \beta(y)=e^{y}=e^{-\int\frac{1}{y}dy}=e^{-\ln y}=\frac{1}{e^{\ln y}}=\frac{1}{y}$$

L'equazione differenziale proposta, moltiplicandone ambo i membri per $\frac{1}{y}$, si trasforma nella seguente equazione differenziale esatta: $y\cdot dx+\left(x-\frac{1}{y}\right)\cdot dy=0$

Scelto come punto $P_o(x_o,y_o)$ il punto $P(0,1)$ ed applicando la formula

$$f(x,y)=\int_0^x M(x,y_o)dx+\int_1^y N(x,y)dy=C$$

Si trova che l'integrale generale è: $xy-\ln|y|=C$