Successioni di funzioni

Consideriamo una infinità numerabile ordinata di funzioni definite tutte su uno stesso insieme $A \subseteq R$ e, per semplicità, supponiamo che l'insieme A sia l'intervallo $[a,b]$:

$$\{f_n(x)\} = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots\} \qquad \textbf{[1]}$$

Se è data una **corrispondenza** tale che ad ogni punto $x = \alpha \in [a,b]$ associa la successione di numeri reali $\{f_n(\alpha)\} = \{f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), \cdots, f_n(\alpha), \cdots\cdots\}$ si dice che la **[1]** è una successioni di funzioni, e si indica col simbolo $\{f_n(x)\}$.

Definizione Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni definite in $A = [a,b] \subseteq R$.

Diciamo che tale successione di funzioni converge puntualmente in $X \subseteq A = [a,b] \subseteq R$ ad una funzione $f(x)$ e scriviamo: $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ **[2]** se $\forall\, x = \alpha \in X \subseteq A = [a,b] \subseteq R$ la successione numerica $\{f_n(\alpha)\}$ converge al valore $f(\alpha)$. L'insieme **X** prende il nome di insieme di convergenza puntuale della successione di funzioni.

La successione di funzioni **[1]** converge puntualmente, diverge puntualmente**, è** indeterminata in $[a,b]$ quando tale risulta la corrispondente successione numerica per ogni $x = \alpha \in [a,b]$.

Supposto che $\forall\, x \in [a,b]$ esista finito il limite: $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ **[2]**

Tale limite definisce una nuova funzione $f(x)$ di **x** in $[a,b]$. Per la definizione di limite si ha che $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall\, x \in [a,b]$ è possibile determinare in corrispondenza un indice $n(\varepsilon, x)$ (dipendente in generale da ε e da **x**) tale che si abbia: $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall\, n > n(\varepsilon, x)$ **[3]**

Quando l'indice $n(\varepsilon, x)$ è solo $n(\varepsilon)$, cioè dipende solo da ε e non dipende da x (questo significa che, per un certo ε, tale numero è lo stesso $\forall\, x \in [a,b]$), si dice che la **successione di funzioni** è uniformemente convergente in $[a,b]$.

Definizione di convergenza puntuale alla funzione limite $f(x)$

Si dice che la successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente alla funzione limite $f(x)$ se, $\forall\, x \in [a,b]$ e $\forall \varepsilon > 0$ si può determinare un indice $n(\varepsilon, x)$ tale che si abbia:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall\, n > n(\varepsilon, x) \qquad \textbf{[3]}$$

E' logico aspettarsi che l'indice $n(\varepsilon)$, a partire dal quale è verificata la relazione **[3]** dipenda non solo da ε ma anche dal particolare punto x considerato. Quando la scelta dell'indice $n(\varepsilon)$ in funzione di ε può essere fatta indipendentemente dalla x, allora abbiamo la convergenza uniforme.

Definizione di convergenza uniforme alla funzione limite $f(x)$

Si dice che la successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente in $[a,b]$ alla funzione limite $f(x)$ se, $\forall \varepsilon > 0$ si può determinare in corrispondenza un indice $n(\varepsilon)$ tale che, qualunque sia $x \in [a,b]$ e $\forall n > n(\varepsilon)$, si abbia: $\left|\mathbf{f(x) - f_n(x)}\right| = \left|\mathbf{R_n(x)}\right| < \boldsymbol{\varepsilon} \quad \forall\, \mathbf{n > n(\varepsilon)}$ **[4]**

Teorema: Se una successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente in $[a,b]$, allora converge in $[a,b]$ anche puntualmente. Non vale il viceversa, cioè una successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ può convergere puntualmente in $[a,b]$, senza convergere uniformemente.

Una successione di funzioni che sia **uniformemente convergente** è certamente convergente puntualmente, mentre una successione di funzioni può essere puntualmente convergente in tutti i punti di un intervallo $[a,b]$ senza essere uniformemente convergente in tale intervallo.

Quindi l'uniforme convergenza di una successione di funzioni è condizione più restrittiva della convergenza puntuale in quanto una successione di funzioni uniformemente convergente in $[a,b]$ è certamente puntualmente convergente, ma esistono successioni di funzioni puntualmente convergenti che non risultano uniformemente convergenti.

Esempio di successione di funzioni: $\{x^n\} = x, x^2, x^3, \cdots, x^n, \cdots$ con $0 \le x \le 1$, cioè con $x \in [0,1]$

Lessico

- **D** = dominio della successione di funzioni = intersezione dei domini delle singole funzioni della successione di funzioni
- **X**$=[a,b]$ = insieme di convergenza della successione di funzioni= *dom* $f(x)$
- L'insieme di convergenza **X** è l'insieme dei valori $x \in D$ in corrispondenza dei quali la successione di termine generico $f_n(x)$ è convergente, ovvero l'insieme dei valori $x \in D$ per i quali esiste finito il $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{f_n(x)}$.

- **Funzione limite** $\mathbf{f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)}$ Il valore del $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ dipenderà dal valore di x e noi lo indicheremo col simbolo $f(x)$. Definiamo **funzione limite** della successioni di funzioni $f_n(x)$ la funzione $f(x): X \to R$ oppure $f(x): x \to f(x)$
ovvero la funzione f che ad ogni **x** dell'**insieme di convergenza** $\mathbf{X}$ associa, come immagine, il valore del limite $f(x)$.

<<Determinare l'**insieme di convergenza** e la **funzione limite** della successione di funzioni: $\mathbf{f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}}$ >> $\forall x \in R$ risulta: $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{x} = e^x$ e quindi $\mathbf{X} = R$ e la **funzione limite** è la funzione $f(x) = e^x$. $X = R = dom\, f(x)$

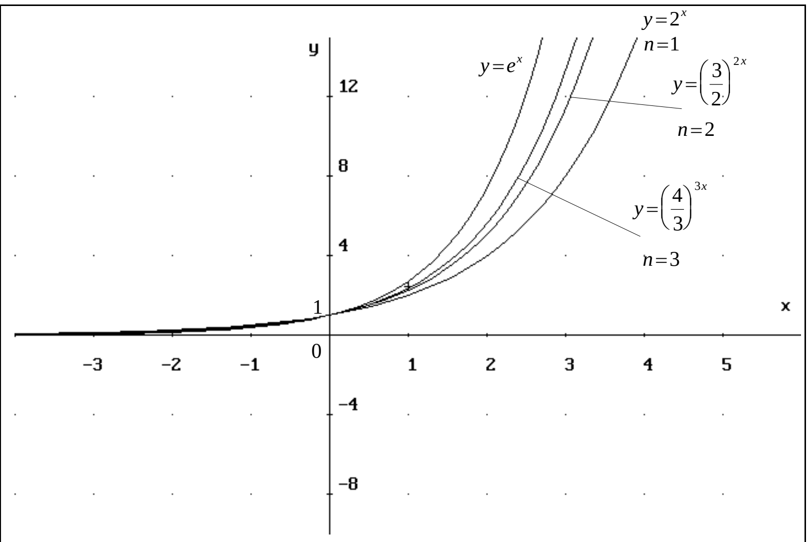
Consideriamo come esempio numerico la successione di funzioni

$$\{f_n(x)\} = \left\{\left(1+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{nx}}\right\} = \left\{2^x, \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}, \left(\frac{4}{3}\right)^{3x}, \cdots\right\}$$

Disegniamo i diagrammi delle prime tre funzioni

$$f_1(x) = 2^x \ , \ f_2(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} ,$$

$$f_3(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} , \ldots$$



Dal modo con cui si susseguono tali grafici (vedere figura) deduciamo che la generica funzione $f_n(x)$ si avvicina sempre più alla funzione $f(x) = e^x$, come abbiamo dedotto teoricamente calcolando il limite $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{x} = e^x$.

Studiare il comportamento della successione di funzioni $\mathbf{f_n(x) = x^n}$ con $0 \le x \le 1$, cioè:

$$f_n : [0,1] \to [0,1] \subset R : x \in [0,1] \to f_n(x) = x^n$$

La successione di funzioni $\{\mathbf{f_n}(\mathbf{x})\}=\{\mathbf{x^n}\}=\mathbf{x},\mathbf{x}^2,\mathbf{x}^3,\cdots,\mathbf{x^n},\cdots$ quando $x\in[0,1[$ tende a 0, mentre tende ad 1 per $x=1$ (tutti i termini della successione valgono 1)

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{x^n}=\begin{cases}\mathbf{0}\ \ \mathbf{se}\ \ \mathbf{0\le x<1}\\ \mathbf{1}\ \ \mathbf{se}\ \ \mathbf{x=1}\end{cases}$$

Questo risultato ci consente di affermare che la successione di funzioni proposta converge puntualmente verso la funzione limite: $f(x)=\begin{cases}\mathbf{0}\ \ \mathbf{se}\ \ \mathbf{0\le x<1}\\ \mathbf{1}\ \ \mathbf{se}\ \ \mathbf{x=1}\end{cases}$

Vediamo se questa convergenza puntuale è anche uniforme. Se la convergenza puntuale fosse anche uniforme, allora in corrispondenza di un ε positivo ed arbitrario (e come tale piccolo a piacere, in simboli $\forall\varepsilon>0$) dovremmo potere determinare un indice $\overline{n}(\varepsilon)$ non dipendente da $x\in[0,1]$ per il quale risulti: $|x^n-f(x)|<\varepsilon\quad\forall n>\overline{n}(\varepsilon)\quad\forall x\in[0,1]$.

Per $\mathbf{x=1}$ la condizione è verificata perché si ha: $|1^n-1|<\varepsilon\ \Rightarrow\ 0<\varepsilon\ \ \forall x\in[0,1]$

Per $\mathbf{x=0}$ la condizione è verificata perché si ha: $|0-0|<\varepsilon\ \Rightarrow\ 0<\varepsilon\ \ \forall x\in[0,1]$

Per questi due valori la scelta di $\varepsilon>0$ piccolo a piacere non dipende dal valore di $x\in[0,1]$.

Per $0<x<1$ la condizione diventa: $|x^n-0|<\varepsilon\ \Rightarrow\ x^n<\varepsilon\ \Rightarrow\ \ln x^n<\ln\varepsilon\ \Rightarrow\ n\cdot\ln x<\ln\varepsilon\ \Rightarrow$

$n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}$ in quanto $x\in[0,1]\ \Rightarrow\ \ln x<0$. In questo caso abbiamo: $n(\varepsilon,x)=\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}$ e, quindi possiamo scrivere: $|x^n-0|<\varepsilon\quad\forall n>n(\varepsilon,x)$. Il compito che dobbiamo affrontare adesso è quello di stabilire se è possibile sostituire l'indice $n(\varepsilon,x)$ con un indice $\overline{n}(\varepsilon)$ che non dipendente da $x\in]0,1[$.

Calcoliamo l'estremo superiore della funzione $n(\varepsilon,x)$. $\sup\limits_{x\in]0,1[}n(\varepsilon,x)=\sup\limits_{x\in]0,1[}\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}=\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 1}=\dfrac{\ln\varepsilon}{0}=+\infty$

La successione di funzioni $\{x^n\}$ nell'intervalli $[0,1]$ converge puntualmente ma non uniformemente.

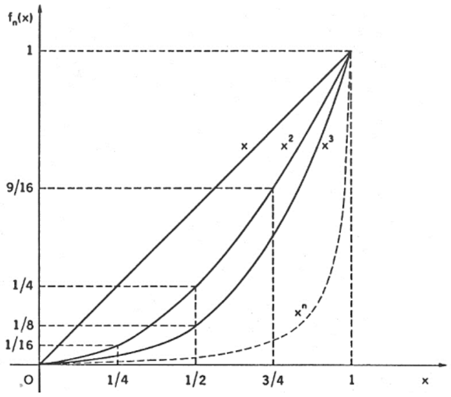
Vediamo se la successione di funzioni proposta converge uniformemente in un intervallo del tipo

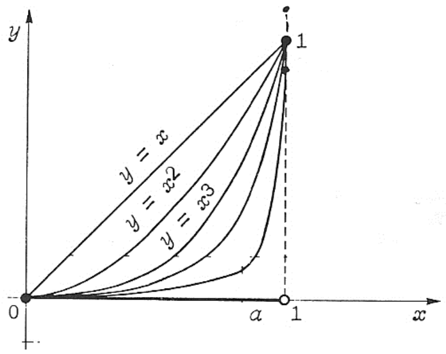
$$0\le x\le a<1$$

Procedente come prima troviamo: $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}\quad\sup\limits_{x\in[0,a]}n(\varepsilon,x)=\sup\limits_{x\in[0,a]}\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}=\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}$

Costatiamo che $n(\varepsilon,x)=n(\varepsilon,a)$ non dipende dalla x. Detto $\bar{n}(\varepsilon)$ il più piccolo numero intero maggiore del numero reale positivo $\frac{\ln\varepsilon}{\ln a}$ abbiamo: $|x^n-0|<\varepsilon \quad \forall n>\bar{n}(\varepsilon)$. Nell'intervallo $0\le x\le a<1$ la convergenza è uniforme.

Diagramma della successione di funzioni $\{f_n(x)\}=\{x^n\}=x,x^2,x^3,\cdots,x^n,\cdots$





Osservazione: Se la funzione $n(\varepsilon,x)$ ammette nell'intervallo di convergenza puntuale **X** estremo superiore (o massimo) finito, qualunque sia la scelta di ε, allora la convergenza è anche uniforme. Questo significa che $\sup\limits_{x\in X} n(\varepsilon,x)=k\in R \quad \forall\varepsilon>0$

Studiare il comportamento della successione di funzioni $\mathbf{f_n(x)=\frac{x}{nx+1}}$ con $0\le x\le 1$.

La successione di funzioni $\{f_n(x)\}=\left\{\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{nx+1}}\right\}=\frac{x}{x+1},\frac{x}{2x+1},\frac{x}{3x+1},\cdots,\frac{x}{nx+1},\cdots$ nell'intervallo $x\in[0,1[$ converge puntualmente in quanto risulta: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x}{nx+1}=0$ la **funzione limite** è: $\mathbf{f(x)=0}$

Vediamo se questa convergenza puntuale è anche uniforme. Se la convergenza puntuale fosse anche uniforme, allora in corrispondenza di un ε positivo ed arbitrario (e come tale piccolo a piacere, in simboli $\forall\varepsilon>0$) dovremmo potere determinare un indice $\bar{n}(\varepsilon)$ non dipendente da $x\in[0,1]$ per il quale risulti: $\left|\frac{x}{nx+1}-0\right|<\varepsilon \quad \forall n>\bar{n}(\varepsilon) \quad \forall x\in[0,1]$.

$$\left|\frac{x}{nx+1}\right|<\varepsilon \;\Rightarrow\; \frac{x}{nx+1}<\varepsilon \;\Rightarrow\; \frac{nx+1}{x}>\frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; x\varepsilon\cdot n>x-\varepsilon \;\Rightarrow\; n>\frac{x-\varepsilon}{x\varepsilon} \qquad n(\varepsilon,x)=\frac{x-\varepsilon}{x\varepsilon}$$

La funzione $n(\varepsilon,x)=\frac{x-\varepsilon}{x\varepsilon}$ è strettamente crescente in quanto la sua derivata prima vale: $\frac{1}{x^2}$

$$\sup_{x\in[0,1]} n(\varepsilon,x)=\sup_{x\in[0,1]}\frac{x-\varepsilon}{x\,\varepsilon}=\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \text{ = quantità finita}$$

Costatiamo che $n(\varepsilon,x)=n(\varepsilon,a)=\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ non dipende dalla x. Detto $\overline{n}(\varepsilon)$ il più piccolo numero intero maggiore del numero reale positivo $\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ abbiamo: $\left|\dfrac{x}{nx+1}-0\right|<\varepsilon \quad \forall n>\overline{n}(\varepsilon)=\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Nell'intervallo $[0,1]$ la convergenza è anche uniforme.

Teorema: Sia $\mathbf{M_n=\varphi(n)=\sup_{x\in X} R_n(x,n)=\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|}$ l'**estremo superiore** della funzione $R_n(x,n)$. Se le funzioni $f_n(x)$, $f(x)$ sono equilimitate in $X=dom\, f(x)$ allora la successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente alla funzione limite $f(x)$ se risulta:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[M_n=\varphi(n)\right]=0$$

La successione $\{f_n(x)\}$ si dice **equilimitata** in $X=dom\, f(x)$ se esiste un numero positivo $K>0$ tale che risulti: $|f_n(x)|\le K \quad \forall n\in\mathbb{N} \wedge \forall x\in X=dom\, f(x)$

Proposizione: Se esiste una successione numerica $\{a_n\}$ infinitesima ed a termini positivi tale che sia $|f_n(x)-f(x)|=|R_n(x,n)| \quad \forall n\in\mathbb{N} \wedge \forall x\in X=dom\, f(x)$ allora la successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente ad $f(x)$ in $X=dom\, f(x)$ e viceversa.

Come verificare la **uniforme convergenza** di una successione di funzioni $f_n(x)$

01) Si determina la funzione limite $f(x)$ calcolando il seguente limite: $\mathbf{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)}$

02) Si calcola l'insieme di convergenza $X=dom\, f(x)$ della successione di funzioni $f_n(x)$. Potremmo volere studiare l'uniforme convergenza in un sottoinsieme di $X=dom\, f(x)$ come l'intervallo $[a,b]$.

03) $f_n(x)$ **converge puntualmente** nell'insieme di convergenza $X=dom\, f(x)$

04) Si calcola $|R_n(x)|=|f_n(x)-f(x)|=R_n(x,n)$ considerando x variabile ed n costante

05) Ci calcoliamo l'**estremo superiore** (che potrebbe coincidere col massimo della funzione $R_n(x)$) quando la x varia nell'insieme $X=dom\, f(x)$ di **convergenza puntuale**. Se la

funzione $R_n(x)$ non è strettamente monotona allora bisogna calcolare la derivata prima di $R_n(x)$, cioè: $R_n'(x)$.

06) Si calcola il massimo di $R_n(x)$ e supponiamo di trovare la funzione: $Massimo\, di\, R_n(x)=\varphi(n)$

07) se risulta $\lim_{n\to+\infty}\varphi(n)=0$ allora la convergenza è anche uniforme; in caso contrario è solo puntuale.

Ripigliamo l'esercizio precedente: $\left|\mathbf{R_n(x)}\right| = \left|\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{nx+1}}-\mathbf{0}\right| = \left|\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{nx+1}}\right| = \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{nx+1}}$ $\quad R_n'(x)=\dfrac{1}{(nx+1)^2}$

La funzione $R_n(x)$ è strettamente crescente ed il suo estremo superiore si ottiene attribuendo alla x il valore 1. $\varphi(n)=\sup_{x\in[0,1]} R_n(x)=\dfrac{1}{n+1}$ $\quad \lim_{n\to+\infty}\varphi(n)=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$ La convergenza è anche uniforme, come avevamo trovato utilizzando un altro procedimento.

Questo metodo di stabilire la convergenza uniforme è detto metodo dell'estremo superiore. Esso afferma quanto segue: Una successione di funzioni $f_n(x)$ converge uniformemente nell'insieme $X = dom\, f(x)$ di convergenza uniforme se risulta:

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in X}\left|f_n(x)-f(x)\right| = \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in X}\left|R_n(x)\right|=0$$

Dove: (a) $X = dom\, f(x)$ è l'insieme di convergenza puntuale (b) $f(x)$ è la funzione limite.

Studiare il comportamento della successione di funzioni $\mathbf{f_n(x)=\dfrac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2+1}}$.

La successione di funzioni $\{f_n(x)\}=\left\{\dfrac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2+1}\right\}=\dfrac{2x}{4x^2+1},\dfrac{3x}{9x+1},\dfrac{4x}{16x+1},\cdots,\dfrac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2+1},\cdots$

In R la successione di funzioni proposta converge puntualmente in quanto risulta:

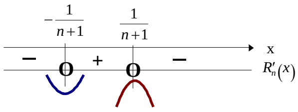
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{x}}{(n+1)^{\cancel{2}}x^{\cancel{2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)x}=0$$

La **funzione limite** è: $f(x)=0$ Vediamo se questa convergenza puntuale è anche uniforme utilizzando il metodo dell'estremo superiore.

$$\left|R_n(x)\right|=\left|f_n(x)-f(x)\right|=R_n(x,n)=\left|\frac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2+1}-0\right|=\left|\frac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2+1}\right|$$

$$R_n'(x)=\frac{(n+1)\left[-(n+1)^2x^2+1\right]}{\left[(n+1)^2x^2+1\right]}\qquad R_n'(x)=0\ \Rightarrow\ -(n+1)^2x^2+1=0\ \Rightarrow\ (n+1)^2x^2=1\ \Rightarrow$$

$$x_1=-\frac{1}{n+1}\qquad x_2=\frac{1}{n+1}$$



$$x=\frac{1}{n+1}\ \text{= punto di massimo}\ R_n\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{\cancel{(n+1)}\left(\frac{1}{\cancel{n+1}}\right)}{\cancel{(n+1)^2}\cancel{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}+1}=\frac{1}{2}\ \text{= massimo della funzione}\ R_n(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty}R_n\left(\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0$$

La successione di funzioni proposti in R converge puntualmente, ma non uniformemente.

Teoremi sulle successioni di funzioni uniformemente convergenti

Teorema N°1: Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme di una successione di funzioni

C.N.S. perché una successione di funzioni $f_n(x)$ sia uniformemente convergente in $[a,b]$ è che si possa determinare un indice $n=n(\varepsilon)$ tale che $\forall x\in[a,b]$ e $\forall n_1,n_2 : n_1>n(\varepsilon)\wedge n_2>n(\varepsilon)$, si abbia:

$$\left|f_{n_2}(x)-f_{n_2}(x)\right|<\varepsilon$$

Se risulta $n_2>n_1$, ponendo $n_2=n_1+p$ la precedente condizione può essere riformulata dicendo che deve risultare $\left|f_{n_1+p}(x)-f_{n_1}(x)\right|<\varepsilon\quad \forall n_1<n(\varepsilon)\wedge\forall p\in N$

Teorema N°2: **Teorema della continuità**

Se $f_n(x)$ è una successione di funzioni continue in $[a,b]$ e se la successione di funzioni converge uniformemente in $[a,b]$, allora $f(x)$ è continua in $[a,b]$.

Da questo teorema deduciamo che se una successione di funzioni continue ha una funzione limite discontinua, essa non può essere uniformemente convergente.

Teorema N°3: Teorema dell'inversione dei limiti

Se la successione di funzioni $f_n(x)$ è uniformemente convergente in $[a,b]$ è lecito lo scambio di due passaggi al limite. $\lim_{x\to x_o}\left[\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\lim_{x\to x_o}f_n(x)\right]$

Teorema N°4: **C.N.S.** perché una funzione $f(x)$, funzione limite di una successione di funzioni $f_n(x)$ uniformemente convergente in $[a,b]$, sia limitata in $[a,b]$ è che da un certo indice in poi n^* tutte le $f_n(x)$ risultino limitate in $[a,b]$.

Teorema N°5 di passaggio al limite sotto il segno di derivata, o teorema della derivabilità

Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni definite e derivabili in ogni punto dell'intervallo $[a,b]$. Se la successione $f_n(x)$ converge, anche solo puntualmente ad $f(x)$ in $[a,b]$ e se la successione delle funzioni $f_n'(x)$ è uniformemente convergente alla funzione $f'(x)$ in $[a,b]$, allora $f(x)$ è derivabile in ogni punto di $[a,b]$ e risulta: $\mathbf{f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)}$

Teorema N°6 di passaggio al limite sotto il segno di integrale, o teorema dell'integrabilità

Se la successione di funzioni $f_n(x)$ definite nell'intervallo $[a,b]$ (1) converge alla funzione limite $f(x)$ (2) la convergenza è uniforme

(3) le funzioni $f_n(x)$ sono integrabili nell'intervallo $[a,b]$,

allora anche la funzione limite $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e risulta:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\cdot dx=\int_a^b f(x)\cdot dx \quad \text{ossia} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\cdot dx=\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\cdot dx$$

Altri esercizi risolti sulla uniforme convergenza delle successioni di funzioni

Studiare in R la convergenza della successione di funzioni $\mathbf{f_n(x)=\frac{1}{1+x^n}}$

$$\lim_{n\to+\infty} x^n=\begin{cases}+\infty & se\ x>0\\ 0 & se\ x<0\\ 1 & se\ x=0\end{cases} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+x^n}=\begin{cases}0 & se\ x>0\\ 1 & se\ x<0\\ \frac{1}{2} & se\ x=0\end{cases}$$

La successione di funzioni $f_n(x)=\frac{1}{1+x^n}$ converge puntualmente verso la funzione limite:

$$f(x)=\begin{cases}0 & se\ x>0\\ 1 & se\ x<0\\ \frac{1}{2} & se\ x=0\end{cases} \quad \text{che non è continua in } R$$

Questo ci consente di affermare che la successione di funzioni $f_n(x)=\frac{1}{1+x^n}$ non converge uniformemente in R.

Serie di funzioni

Sia $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots\cdots$ una successione di funzioni reali definite nell'intervallo $[a,b]$. Introducendo tra gli elementi di questa successione di funzioni, in modo puramente formale, il simbolo di somma, definiamo una **serie di funzioni** come:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots\cdots \qquad [1]$$

A questa somma di funzione diamo un significato concreto attraverso le seguenti considerazioni.

Mediante le espressioni (dette somme parziali o le ridotte)

$$\boxed{\begin{aligned} &S_1(x) = f_1(x) \\ &S_2(x) = f_1(x) + f_2(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots\cdots + f_n(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}}$$

ci possiamo costruire la seguente successione di funzioni:

$$S_1(x), S_2(x), S_3(x), \cdots, S_n(x), \cdots\cdots \qquad [2]$$

che prende il nome di serie di funzioni e che viene indicata col simbolo introdotto in precedenza solo formalmente, cioè la somma di infinite funzioni $f_n(x)$ è la funzione $S(x)$, limite, quando esiste, della funzione $S_n(x)$ per $n \to +\infty$. Quindi per definizione abbiamo:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots\cdots = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$$

Le funzioni $f_n(x)$ si dicono termini della serie di funzioni, le funzioni $S_n(x)$ si dicono le somme parziali o le ridotte della serie di funzioni.

Per ogni $x = \alpha \in [a,b]$ la serie di funzioni diventa una serie numerica. Quindi, per ogni prefissato valore di x otteniamo una serie numerica che potrà essere convergente, divergente, indeterminata.

Una serie di funzioni è convergente nell'intervallo $[a,b]$, detto intervallo di convergenza, se tale è la serie numerica che si ottiene per ogni $x = \alpha \in [a,b]$.

Definizione: Dicesi insieme di convergenza di una serie di funzioni l'insieme **X** formato dai valori della **x** che danno luogo a serie numeriche convergenti.

D = dominio della successione di funzioni = intersezione dei domini delle singole funzioni della successione di funzioni

$X \subseteq D$ = insieme di convergenza della serie di funzioni

Quando la serie di funzioni converge in **X**, la somma $\mathbf{S(x)}$ della serie [1] è la funzione limite della successione delle somme parziali: $\mathbf{S(x)} = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{S_n(x)}$ [3]

La somma $\mathbf{S(x)}$ può esser calcolata solo per le serie telescopiche, per le serie geometriche e per le serie collegabili agli sviluppi in serie di Taylor.

L'espressione: $\mathbf{R_n(x)=S(x)-S_n(x)=f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots}$ [4]

dicesi **resto della serie** dopo il termine ennesimo.

Convergenza puntuale ed uniforme

La serie di funzioni [1] converge in **X** alla funzione $S(x)$ quando, ad ogni $\varepsilon > 0$ è possibile associare un indice $\mathbf{n^*(\varepsilon,x)}$, dipendente in generale da ε e da $\mathbf{x \in X=[a,b]}$, tale che per ogni $n > n^*$ si abbia: $\mathbf{|S_n(x)-S(x)|=|R_n(x)|=|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots|<\varepsilon}$

Quando n^* dipende soltanto da ε ma non dipende da **x** la serie si dice uniformemente convergente, in caso contrario si dice puntualmente convergente o semplicemente convergente.

Definizione di convergenza puntuale

Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{f_n(x)}$ converge puntualmente alla funzione somma $S(x)$ se, $\forall\ x \in X$ e $\forall\, \varepsilon > 0$, si può determinare un indice $n^*(\varepsilon, x)$ tale si abbia:

$$\mathbf{|S_n(x)-S(x)|=|R_n(x)|=|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots|<\varepsilon}$$

Definizione di convergenza uniforme

Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{f_n(x)}$ converge uniformemente alla funzione somma $S(x)$ nell'intervallo $\mathbf{X=[a,b]}$ se converge uniformemente in $\mathbf{X=[a,b]}$ ad $S(x)$ la successione delle ridotte $S_n(x)$. Con parole diverse possiamo dire che si ha convergenza uniforme quando ad ogni $\varepsilon > 0$ possiamo associare un indice $n^*(\varepsilon)$ che dipende soltanto da ε e non da **x** tale che risulti: $|\mathbf{S_n(x)-S(x)}| = |\mathbf{R_n(x)}| = |\mathbf{f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots}| < \varepsilon$ $\forall \mathbf{n > n^*(\varepsilon)}$ e $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X=[a,b]}$

Teorema di Cauchy

C.N.S. perché le serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{f_n(x)}$ converga uniformemente in $[a,b]$ alla funzione somma $S(x)$ è che, $\forall \varepsilon > 0$, esista un indice $n^*(\varepsilon)$ tale che, $\forall x \in [a,b]$ [1], e qualunque siano $n > n^*(\varepsilon)$ e $p \in N$, si abbia:

$$|\mathbf{S_{n+p}(x) - S_n(x)}| = |\mathbf{R_{n,p}(x)}| = |\mathbf{f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)}| < \varepsilon$$

dove con $R_{n,p}(x)$ indichiamo il resto di ordine **n,p** della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{f_n(x)}$.

Da questo si può dedurre, ponendo $p = 1$, che $\forall x \in [a,b] \subseteq X$ è $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Convergenza assoluta

La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{f_n(x)}$ è assolutamente convergente in **X=[a,b]** quando è convergente la serie dei valori assoluti dei suoi termini, cioè quando è **convergente** la seguente serie di funzioni: $\sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{f_n(x)}|$

Convergenza totale

La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{f_n(x)}$ si dice totalmente convergente in **X=[a,b]** quando è possibile determinare una successione di costanti tutte positive $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n, \cdots$ tali che:

a) $|f_n(x)| \leq k_n \quad \forall x \in [a,b]$

b) la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} k_n$ risulti convergente

[1] Questo significa che l'indice n* non dipende da x

Diciamo pure che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ si dice totalmente convergente in $X=[a,b]$ quando è maggiorata da una serie numerica convergente.

Se le funzioni $f_n(x)$ sono continue in $X=[a,b]$ come costanti K_n possiamo scegliere i massimi assoluti M_n assunti dalle funzioni $|f_n(x)|$ in $X=[a,b]$.

Risulta co giustificata la seguente definizione di serie totalmente convergente**:**

Una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è detta totalmente convergente nell'intervallo $X=[a,b]$ se si può determinare una serie numerica a termini positivi convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ tale che si abbia:

$$|f_n(x)| \le M_n \qquad \forall x \in X=[a,b] \text{ e } \forall n \in N$$

Criterio di Weierstrass

Se una serie di funzioni è totalmente convergente in $X=[a,b]$ essa è ivi anche uniformemente convergente, e la serie numerica ottenuta dando alla x un qualunque valore appartenente all'intervallo $X=[a,b]$ è una serie numerica assolutamente convergente.

Quindi <<**una serie di funzioni** totalmente convergente **in** $X=[a,b]$ **è ivi** assolutamente ed uniformemente convergente>>. Tuttavia la convergenza totale è una condizione sufficiente ma non necessaria per la uniforme convergenza. Questo significa che una serie di funzioni totalmente convergente è anche uniformemente convergente, mentre una serie uniformemente convergente può non essere totalmente convergente.

Non è superfluo ricordare che il Criterio di Weierstrass costituisce una condizione solo necessaria ma non sufficiente per l'uniforme convergenza di una serie di funzioni . Infatti una serie di funzioni può essere uniformemente convergente in $X=[a,b]$ senza essere ivi totalmente convergente, così come non sono legate tra di loro la convergenza uniforme e la convergenza assoluta.

In un punto **x** si può avere una serie assolutamente convergente senza che **x** faccia parte di un insieme in cui la serie di funzioni è uniformemente convergente e viceversa.

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{Convergenza Totale}} & & \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \boxed{\text{Convergenza Assoluta}} & \not\Rightarrow \quad \not\Leftarrow & \boxed{\text{Convergenza uniforme}} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \boxed{\text{Convergenza Puntuale}} & & \end{array}$$

- Una serie di funzioni **può essere** uniformemente convergente senza essere assolutamente convergente
- Una serie di funzioni può essere assolutamente convergente **senza essere uniformemente convergente**
- Una serie di funzioni può essere uniformemente convergente **senza essere totalmente convergente**

La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ è totalmente convergente in **R**. Infatti, per ogni valore della x risulta : $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ e la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente in quanto trattasi di una serie armonica generalizzata con esponente maggiore di **1**. Quindi la serie di funzioni proposta è anche uniformemente ed assolutamente convergente.

Insieme di convergenza

Per la determinazione dell'insieme di convergenza **X=[a,b]** di una serie di funzioni si possono usare i normali criteri di convergenza delle serie numeriche. Vanno ricercati i valori della variabile **x** in corrispondenza dei quali il criterio usato è soddisfatto e poi bisogna determinare, se ce ne sono, quei valori particolari per i quali i criteri non fornisce risposta.

Studiare la serie di funzioni: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$ $D = R$ = dominio della serie di funzioni

Si tratta di una serie a segni alterni dove $a_n = \frac{1}{n + x^2}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n + x^2} = 0$

$\frac{1}{n + 1 + x^2} < \frac{1}{n + x^2}$ $(a_{n+1} < a_n)$ $\forall\, n \in N$ Il termine a_n è infinitesimo e strettamente decrescente. La serie proposta converge puntualmente su tutto R per il criterio di Leibnitz

$X = R$ insieme di convergenza per la convergenza puntuale

Vediamo, adesso, se la convergenza è anche uniforme.

Fissato $\mathbf{x}$, essendo una serie a segni alterni, sarà $|S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)| \le |f_{n+1}(x)|$ e quindi

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \frac{1}{n+1+x^2} < \varepsilon \;\Rightarrow\; n+1+x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 - x^2 \;\Rightarrow$$

$n > \frac{1}{\varepsilon} = n^*(\varepsilon)$ in quanto appare evidente che risulta $\frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} - 1 - x^2$ $\forall\, x \in X = R$

Poiché, in questo caso, abbiamo $n^*(\varepsilon, x) = \frac{1}{\varepsilon} = n^*(\varepsilon)$ la serie di funzioni proposta converge uniformemente.

Se, poi, consideriamo la serie dei moduli associata alla serie proposta, cioè se consideriamo la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + x^2}$ ci accorgiamo che essa diverge $\forall\, x \in X = R$ in quanto ha lo stesso carattere della serie armonica semplice $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Osservazione: Criterio di Leibniz

Se la successione $\{a_n\}$ a **termini positivi** è **decrescente** $(a_{n+1} < a_n)$ ed infinitesima ($\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$),allora la serie a segni alterni $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ è convergente e sussiste la seguente formula di maggiorazione del resto: $|\mathbf{R_n}| \le \mathbf{a_{n+1}}$

Concludendo possiamo affermare che la serie di funzioni proposta $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$ in $\mathbb{R}$ converge uniformemente ma non assolutamente.

Studiare la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)^n$

$D = R - \{0\}$ = dominio della serie di funzioni

Determiniamo adesso l'insieme di convergenza della serie di funzioni proposta applicando il criterio della radice alla serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)^n$ (abbiamo supposto di fissare il valore di $x \in R$)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)^n\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} \cdot \frac{x-1}{x} = 1 \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{x-1}{x} < 1 \quad \text{se} \quad x > \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{serie a segni alternati convergente}$$

$X = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ = insieme di convergenza della serie di funzioni proposta

In tale intervallo la serie di funzioni proposta converge puntualmente

$$\left|\frac{x-1}{x}\right| < 1 \quad \forall x \in X = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x-1}{x}\right|^n < 1 \quad \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)^n\right| \le \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)^n\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

La serie di funzioni proposta, essendo maggiorata da una serie numerica a termini positivi e convergente, converge totalmente e quindi converge anche uniformemente ed assolutamente. [2]

Criterio di Cauchy

Se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è uniformemente convergente nell'intervallo limitato $X = [a,b]$, se la funzione $\alpha(x)$ è definita e limitata in $X = [a,b]$, allora anche la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha(x) \cdot f_n(x)$ è uniformemente convergente in $X = [a,b]$.

[2] Spesso , per dimostrare la convergenza uniforme di una serie di funzioni basta dimostrare la sua convergenza totale maggiorando la serie di funzioni proposta con una opportuna serie numerica convergente

La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^3 \cdot \sin nx}{n^2}$ ottenuta moltiplicando ogni termine della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, uniformemente convergente in ogni intervallo $\mathbf{X=[a,b]}$, per la funzione $\alpha(x)=x^3$, è anch'essa uniformemente convergente, in quanto la funzione $\alpha(x)=x^3$ è limitata in ogni intervallo $\mathbf{X=[a,b]}$.

Criterio di Abel

Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{g_n(x) \cdot f_n(x)}$

Se risulta: a) $|g_n(x)| \le k \quad \forall x \in [a,b]$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ uniformemente convergente in $\mathbf{X=[a,b]}$ allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{g_n(x) \cdot f_n(x)}$ converge uniformemente in $\mathbf{X=[a,b]}$.

Osservazione N°1: Il metodo più usato per dimostrare che una certa serie di funzioni converge uniformemente in un certo intervallo $[a,b]$ è di servirsi del teorema di Weierstrass , cioè di fare vedere che la serie di funzioni proposta ammette come maggiorante una serie numerica a termini positivi e convergente

Osservazione N°2:Se i valori assoluti dei vari termini di una serie di funzioni, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X=[a,b]}$, non superano i corrispondenti termini di una serie convergente a termini costanti, allora la data serie converge assolutamente ed uniformemente .

Teorema della continuità

<<Se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{f_n(x)}$ è uniformemente convergente nell'insieme $\mathbf{X=[a,b]}$ e se in x_o, punto non isolato di $\mathbf{X=[a,b]}$, le n funzioni $f_n(x)$ $[n=1,2,\cdots\cdots]$ sono continue, allora anche la somma $S(x)$ della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{f_n(x)}$ è una funzione continua **in** x_o>>

Questo teorema può servire in alcuni casi a dimostrare, per via indiretta, che una serie di funzioni non è uniformemente convergente in un insieme $\mathbf{X=[a,b]}$.

Considieriamo una serie di funzioni continue in $X=[a,b]$ e supponiamo che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ sia convergente in $X=[a,b]$. Se la somma $S(x)$ della serie di funzioni è **discontinua** in qualche punto di $X=[a,b]$ allora la serie di funzioni non può essere uniformemente convergente in $X=[a,b]$ in quanto, se lo fosse, la sua somma $S(x)$ dovrebbe risultare **continua** in $X=[a,b]$ contro l'ipotesi.

Studiare la convergenza della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} (x-1)\cdot x^{n-1}$

La somma dei primi n termini vale:

$$S_n(x)=(1-x)+x(1-x)+x^2(1-x)+\cdots+x^{n-1}(1-x)=1-x+x-x^2+x^2-x^3+\cdots+x^{n-1}-x^n=1-x^n$$

Se $|x|<1$ $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)=\lim_{n\to+\infty}(1-x^n)=1$ Se $|x|>1$ $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)=+\infty$ non esiste

Se $x=1$ $S_n(x)=0$ e il $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)=0$ Se $x=-1$ $S_n(x)=1-(-1)^n$ ed il $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$ non esiste

Quindi la serie di funzioni proposta converge per $|x|<1$ e per $x=1$, cioè converge per $-1<x\leq 1$.

Esaminiamo la continuità della funzione somma $S(x)=\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$ nel suo insieme di convergenza

$X=]-1,1[$ $\quad S(x)=\begin{cases} 1 & se \quad -1<x<1 \\ 0 & se \quad x=1 \end{cases}$ La funzione somma $S(x)$ è discontinua nel punto $x=1$ e continua in tutti gli altri punti del suo insieme di convergenza . Ne consegue che la serie di funzioni proposta non può convergere uniformemente nel suo insieme di convergenza in quanto la sua funzione somma è discontinua in un punto di tale insieme di convergenza.

Questa considerazione è spesso usata per dimostrare la non uniforme convergenza di una serie di funzioni (o di una successione di funzioni).

Teorema di derivazione per serie

1) se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge nell'intervallo $[a,b]$ alla funzione $S(x)$

2) se le funzioni $f_n(x)$ sono tutte derivabili in $X=[a,b]$

3) se la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente in $X=[a,b]$ ad una funzione $g(x)$

allora la somma $S(x)$ della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è derivabile in $X=[a,b]$ e per ogni x di tale intervallo risulta $g(x) = S'(x)$ cioè: $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = S(x) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = S'(x)$

<<**La somma delle derivate coincide con la derivata della somma anche nel caso di infinite funzioni**>>

Si dice pure che nelle condizioni sopra citate la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è derivabile termine a termine e si può scrivere : $D\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} Df_n(x)$

Concludendo possiamo affermare che è lecito derivare termine a termine una serie convergente di funzioni derivabili nell'intervallo $X=[a,b]$ solo se la serie delle derivate è uniformemente convergente in $X=[a,b]$.

Pertanto la condizione che la serie delle derivate sia uniformemente convergente è sufficiente ma non necessaria per garantire che la serie di funzioni sia derivabile termine a termine.

E' assegnata la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^{2n} x}{n(2n-1)} = S(x)$ $(D=R)$ (1) Determinare l'insieme di convergenza $X=[a,b]$ e studiarne la convergenza uniforme (2) Stabilire se, nel punto $x_o = -\frac{\pi}{6}$ esiste la derivata della sua somma $S(x)$ ed in caso affermativo calcolarla.

(1) $\cos^{2n} x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos^{2n} x}{n(2n-1)} \leq \frac{1}{n(2n-1)} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^{2n} x}{n(2n-1)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$

La serie di funzione proposta $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^{2n} x}{n(2n-1)}$ è maggiorata dalla serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$

che converge. La serie proposta converge totalmente e quindi anche uniformemente in $\mathbb{R}$, o meglio in intervalli del tipo $[a;b]$ con $a,b \in \mathbb{R}$.

(2) Poiché la serie proposta converge uniformemente in $\mathbb{R}$ essa è derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}$. La serie derivata ha la seguente somma:

$$S'(x)=g(x)=D_x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^{2n}x}{n(2n-1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}D\frac{\cos^{2n}x}{n(2n-1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cancel{n}(-\sin x)\cos^{2n-1}x}{\cancel{n}(2n-1)}=2(-\sin x)\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^{2n-1}x}{(2n-1)}$$

$$S'(x)=g(x)=2(-\sin x)\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y^{2n-1}}{(2n-1)}=-\sin x\cdot\ln\frac{1+y}{1-y}\quad \text{con}\quad y=\cos x\quad -1<y=\cos x<1$$

$$S'(x)=g(x)=-\sin x\cdot\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos}\qquad S'\left(-\frac{\pi}{6}\right)=g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cdot\ln\frac{1+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$S'\left(-\frac{\pi}{6}\right)=g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(4+3+4\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\sqrt{3}+2\right)^2=\ln\left(\sqrt{3}+2\right)$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\cdots\cdots+\frac{2}{(2n+1)}x^{2n+1}+\ldots\ldots\ldots\ldots=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}\qquad -1<x<1$$

Teorema di integrazione per serie

1) Se la serie di funzioni continue $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ converge uniformemente alla funzione somma $S(x)$

2) se le funzioni $f_n(x)$ sono tutte integrabili in $[a,b]$

allora preso $x\in[a,b]$ possiamo definire una nuova serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^x f_n(x)dx$ che ha come funzione somma la funzione $g(x)$ e che gode delle seguenti proprietà :

a) la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^x f_n(x)dx$ è uniformemente convergente in $[a,b]$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^x f_n(x)dx=\int_a^x f_1(x)dx+\int_a^x f_2(x)dx+\cdots+\int_a^x f_n(x)dx+\cdots=\int_a^x\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)dx=\int_a^x S(x)dx=g(x)$

Si dice pure che, nelle condizioni predette, la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ è integrabile termine a termine.

Più semplicemente possiamo dire che in un intervallo $[a,b]$ una serie uniformemente convergente di funzioni continue $S(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots\cdots$

è integrabile termine a termine $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx + \cdots$

ossia l'**integrale di una serie di funzioni è uguale alla serie degli integrali delle singole funzioni**. Possiamo anche dire che l'integrale di una somma di funzioni è uguale alla somma degli integrali delle singole funzioni anche nel caso di <<infinite funzioni>>

Studio di una serie di funzioni : considerazioni di carattere pratico

- Consideriamo un insieme di funzioni reali della variabile reale $\mathbf{x}$, che indicheremo col simbolo $f_n(x)$ dipendenti da $\mathbf{x}$ e dall'indice $n \in N$ Indicheremo con **D** (intersezione dei domini delle singole funzioni $f_n(x)$) il dominio della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. L'insieme **X** dei valori $x \in X$ in corrispondenza dei quali la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è convergente è detto insieme di convergenza della serie di funzioni .

D = dominio della serie di funzioni = intersezione dei domini delle singole funzioni $f_n(x)$

X = insieme di convergenza puntuale della serie di funzioni

- Studiare un'assegnata serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ significa determinare, in primo luogo, l'insieme di convergenza **X** della serie di funzioni e stabilire, poi, se in **X** o in suo sottoinsieme la convergenza è uniforme o, addirittura, **totale**. Trovare l'insieme di convergenza **X** significa individuare la convergenza puntuale.

- Per la determinazione dell'insieme di convergenza di una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ si possono usare i normali criteri di convergenza delle serie numeriche.

Vanno ricercati i valori della variabile $\mathbf{x}$ in corrispondenza dei quali il criterio usato è soddisfatto, indi bisogna esaminare quei valori particolari, se ce ne sono, in corrispondenza dei quali il criterio è inefficace. Naturalmente, se possibile, si determina la somma $S(x)$

- Per calcolare $S(x)$ si procede come segue: [3]

[3] La somma S(x) può essere calcolata solo per le serie telescopiche , per le serie geometriche e per le serie collegabili agli sviluppi in serie di Taylor

Si calcola, ove possibile, $\mathbf{S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)}$ $\mathbf{S(x)=\lim_{n\to+\infty} S_n(x)}$

- Per una serie di funzioni di tipo generale si calcola l'insieme **D** nel quale sono simultaneamente finiti e reali tutti i termini $f_n(x)$ della serie, cioè le funzioni $f_1(x), f_2(x), f_3(x),\cdots, f_n(x),\cdots\cdots$

Per le serie di potenze risulta sempre $\mathbf{D=R}$. Calcolato **D** e detto **x** un suo qualsiasi punto, si considera **x** fisso e la serie di funzioni come una serie numerica. Utilizzando uno dei criteri di convergenza delle serie numeriche si stabiliscono le condizioni che la **x** deve soddisfare perché la serie data sia convergente. Tutto ciò ci conduce alla determinazione dell'insieme di convergenza $X \subseteq D \subseteq R$. Abbiamo così individuato la convergenza puntuale, ci rimane da individuare, se esiste, la convergenza uniforme o la convergenza totale.

- In generale lo studio della convergenza uniforme di una serie di funzioni presenta notevoli difficoltà, a meno che non si riesca a maggiorare in un opportuno sottoinsieme **T** di **D** la serie dei moduli della serie di funzioni con una serie numerica convergente.

Questo significa che nell'insieme $T \subset D$ la serie di funzioni proposta converge totalmente e quindi anche uniformemente ed assolutamente.

Se non è possibile dimostrare che la serie di funzioni è totalmente convergente allora bisogna utilizzare la definizione di serie di funzioni uniformemente convergente.

- Si dice che la serie di funzioni $\mathbf{\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)}$ converge uniformemente alla funzione somma $S(x)$ nell'intervallo $[a,b]$ se converge uniformemente in $[a,b]$ ad $S(x)$ la successione delle ridotte $S_n(x)$. Con parole diverse possiamo dire che si ha convergenza uniforme quando ad ogni $\varepsilon>0$ possiamo associare un indice $n^*(\varepsilon)$ che dipende soltanto da ε e non da **x** tale che risulti: $\mathbf{|S_n(x)-S(x)|=|R_n(x)|=|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots|<\varepsilon}$ $\quad n > n^*(\varepsilon)$ e $\forall\ x \in [a,b]$

Per fare ciò prima bisogna calcolare la sua somma parziale di ordine n $\mathbf{S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)}$ e poi la funzione somma $\mathbf{S(x)=\lim_{n\to+\infty} S_n(x)}$.

Indi si risolve l'inequazione $\mathbf{|S_n(x)-S(x)|=|R_n(x)|=|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots|<\varepsilon}$ **[**]** se questa ammette una soluzione del tipo $n > n^*(\varepsilon)$ $\forall\ x \in X$ allora possiamo di re che la serie di funzioni è uniformemente convergente in **X** .

Per chiarire meglio il concetto di convergenza uniforme, precisiamo un possibile metodo per trovale l'intero $n^*(\varepsilon)$ in questione quando si immagini di avere fissato tanto il famoso $\varepsilon > 0$ quanto il punto $x \in X$ = insieme di convergenza

$$\left|\mathbf{S_n(x) - S(x)}\right| = \left|\mathbf{R_n(x)}\right| = < \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \forall\ n > n(\varepsilon, x)$$

Supponiamo di avere calcolato la funzione $n(\varepsilon, x)$. Immaginiamo adesso che, ritenendo ε costante, $\mathbf{x}$ vari in $\mathbf{X}$. L'indice $n(\varepsilon, x)$, trovato risolvendo la disequazione [**], risulterà una funzione di ε e di $\mathbf{x}$. Vediamo come si comporta questa funzione $n(\varepsilon, x)$.

Per ogni scelta particolare di ε per la funzione $n(\varepsilon, x)$ si possono presentare due casi:

1) la $n(\varepsilon, x)$ è illimitata superiormente in $\mathbf{X}$ al variare di $\mathbf{x}$ in $\mathbf{X}$ (la serie di funzioni converge solo puntualmente)

2) oppure essa è limitata superiormente in $\mathbf{X}$ (la serie di funzioni converge uniformemente)

Nel secondo caso la funzione $n(\varepsilon, x)$ è certamente dotata di massimo $n^*(\varepsilon)$, perché un insieme di numeri interi [ed $n(\varepsilon, x)$ rappresentano numeri interi] superiormente limitato è sempre dotato di massimo. Quindi se e solo se, comunque si scelga e si fissi $\varepsilon > 0$, la funzione $n(\varepsilon, x)$ è dotata di massimo $n^*(\varepsilon)$ al variare di $\mathbf{x}$ in $\mathbf{X}$, la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è uniformemente convergente in $\mathbf{X}$.

Ma risolvere la disequazione [**] e trovare come soluzione $n > n^*(\varepsilon)\ \ \forall\ x \in X$, in generale, è impresa ardua. Allora può essere utile ricordare che tale condizione equivale alla seguente condizione:

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X}\left|S_n(x) - S(x)\right| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X}\left|R_n(x)\right| = 0}$$

Infatti se le funzioni $f_n(x)$, $S(x)$ sono limitate in $\mathbf{X}$, allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{f_n(x)}$ converge uniformemente in $\mathbf{X}$ se e solo se risulta

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} M_n = 0} \quad \text{avendo posto:} \quad \mathbf{M_n} = \mathbf{\sup_{x\in X}\left|S_n(x) - S(x)\right|}$$

- Se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è una serie di funzioni a segni alternati cioè del tipo

$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n(x)$ allora, per individuare il suo insieme di convergenza X [1] possiamo applicare il criterio di Leibniz. In questo caso abbiamo: $X = D$

Inoltre sarà: $|S_n(x)-S(x)|=|R_n(x)|<|f_{n+1}(x)|$ e quindi, se voglio studiare l'uniforme convergenza in $X = D$, basta risolvere l'inequazione $|f_{n+1}(x)| < \varepsilon \quad \forall\, n > n(\varepsilon, x)$

se l'indice $n(\varepsilon, x)$ dipende da x e da ε la convergenza non è uniforme, se dipende solo da ε e non da x la convergenza è uniforme.

Come verificare l'uniforme convergenza in sintesi

1) Si calcola $S_n(x)$ 2) Si calcola $S(x)=\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$ 3) Si calcola $R_n(x)=S_n(x)-S(x)$

4) **D** è il dominio delle funzioni $f_n(x)$, X è l'insieme di convergenza della serie di funzioni

5) Si risolve la disequazione $|S_n(x)-S(x)|=|R_n(x)|=|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots|<\varepsilon$

In generale troviamo: $n > n(\varepsilon, x)$

6) Se troviamo $n(\varepsilon, x) = n^*(\varepsilon)$ allora la serie di funzioni è uniformemente convergente, se questo non è possibile allora la serie di funzioni è soltanto puntualmente convergente

7) Se la funzione $n(\varepsilon, x)$ in X ammette un estremo superiore finito $n^*(\varepsilon)$ allora la serie di funzioni data è uniformemente convergente in X, in caso contrario non lo è.

8) Una serie di funzioni non uniformemente convergente in X potrebbe essere uniformemente convergente in un sottoinsieme limitato di X.

9) Un altro modo di stabilire l'uniforme convergenza di una serie di funzioni è quello di utilizzare il metodo dell'estremo superiore, cioè un serie di funzione converge uniformemente se vale:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} |R_n(x)| = 0$$

---

[1] dove , per il momento la convergenza è solo **puntuale**

Vediamo come si deve procedere operativamente.

- Si verifica che le funzioni $f_n(x)$ ed $S(x)$ sono limitate in **X** dove la convergenza della serie di funzioni è puntuale
- Si calcola la funzione $\mathbf{g(x)=|R_n(x)|=|S_n(x)-S(x)|}$ dove la **n**, per il momento è considerata costante
- Di questa funzione $g(x)$ ci calcoliamo l'estremo superiore (che potrebbe essere il massimo) quando la x varia in **X** = insieme di convergenza puntuale. Questo significa che $\mathrm{dom}\, g(x) = X$

$g'(x) = 0 \Rightarrow x = x_0,\ x = x_1,$. Studiamo il segno della derivata prima della funzione $g(x)$ cioè della funzione $g'(x)$. Supponiamo che $x = x_0$ sia un punto di massimo assoluto in **X** [4]

Ci calcoliamo $g(x_0)$ che risulta essere una funzione della sola n e che possiamo indicare col simbolo $M_n = M(n)$. Con riferimento ai simboli introdotti in precedenza possiamo scrivere:

$$\mathbf{M_n = M(n) = \sup_{x \in X} |S_n(x) - S(x)|}$$

Se risulta $$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} M_n = \lim_{n\to+\infty} M(n) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} |S_n(x)-S(x)| = 0}$$

allora la serie di funzioni converge uniformemente **in X, in caso contrario la** convergenza è solo puntuale**.**

- Una serie di funzioni maggiorata in **X** da una serie numerica a termini positivi e convergente è in **X** totalmente convergente e quindi anche uniformemente convergente ed assolutamente convergente

Come serie numerica a termini positivi potremmo scegliere la serie i cui termini M_n sono gli estremi superiori (eventualmente i massimi) delle funzioni $|f_n(x)|$.

Un metodo pratico per verificare la convergenza totale (e quindi anche la convergenza uniforme ed assoluta) per una serie di funzioni $\mathbf{\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)}$.

Esempio particolare: $\mathbf{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n} \cdot e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n \cdot e^{nx}}}$

---

[4] Bisogna calcolare i valori che la funzione **g(x)** assume agli estremi dell'insieme di convergenza **X** e confrontarli con $g(x_0)$

(1) Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{f_n}(\mathbf{x})$ avente dominio $\mathbf{D}$. Considero la $\mathbf{x}$ costante e studio la convergenza della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbf{f_n}(\mathbf{x})|$ utilizzando uno dei criteri validi per le serie numeriche, ad esempio il criterio del rapporto. L'applicazione di uno di questi criteri, in generale, porta alla risoluzione di una disequazione con moduli la soluzione della quale ci dà l'insieme di convergenza puntuale della serie di funzione proposta $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{f_n}(\mathbf{x})$. Supponiamo di avere trovato:

$\mathbf{X} \subseteq \mathbf{D}$ = insieme di convergenza puntuale della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{f_n}(\mathbf{x})$

Nel nostro caso abbiamo: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{x}}{(n+1)\cdot e^{(n+1)x}} \cdot \frac{\mathbf{n}\cdot \mathbf{e}^{\mathbf{nx}}}{\cancel{x}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{e^x}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^x} < 1 \ \forall x > 0$ Per $\mathbf{x = 0}$ la serie proposta diventa: $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{0 = 0}$

$\mathbf{X} = [\mathbf{0}; +\infty[$ = insieme di convergenza puntuale della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{nx}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}\cdot \mathbf{e}^{\mathbf{nx}}}$

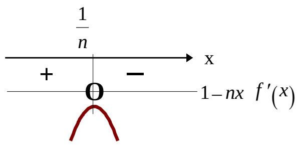
(2) Considero la funzione $\mathbf{f_n}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x,n})$ che è una funzione nelle variabili $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{n}$, con $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ed $n \in \mathbb{N}$. Inizialmente considero $\mathbf{n}$ costante ed $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ variabile e mi calcolo, se esiste il massimo assoluto $\mathbf{M_n}$ (o l'estremo superiore) della funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x,n})$ quando la $\mathbf{x}$ varia in $\mathbf{X}$.

$\frac{\partial f(x;n)}{\partial x} = 0 \ \Rightarrow$ ad esempio $x = \frac{1}{n}$. Mi calcolo $f\left(\frac{1}{n}; n\right) = M_n$ Attraverso lo studio del segno di $\frac{\partial f(x;n)}{\partial x}$ vedo se $\mathbf{M_n}$ è un massimo relativo. Per stabilire se $\mathbf{M_n}$ è un massimo assoluto bisogna confrontare $\mathbf{M_n}$ con i valori assunti dalla funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x,n})$ agli estremi dell'insieme di convergenza puntuale $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{D}$. Se $X = [a;b]$ bisogna confrontare $\mathbf{M_n}$ con $\mathbf{f}(a,\mathbf{n})$, $\mathbf{f}(b,\mathbf{n})$. Se risulta: $\mathbf{f}(a,\mathbf{n}) \le \mathbf{f}(b,\mathbf{n}) < M_n$ allora $\mathbf{M_n}$ è il massimo assoluto di $\mathbf{f}(\mathbf{x,n})$ in $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{D}$.

Se $X = [a;b[$ bisogna confrontare $\mathbf{M_n}$ con $\mathbf{f}(a,\mathbf{n})$, $\mathbf{f}(\infty,\mathbf{n}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x,n})$.per potere stabilire se $\mathbf{M_n}$ è veramente un massimo assoluto.

Nel caso particolare abbiamo:

$$\frac{\partial f(x;n)}{\partial x}=\frac{1-nx}{ne^{nx}}=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{n} \text{ punto di massimo relativo}$$



$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{en^2} \quad \text{massimo relativo}$$

$$f(0)=0 \qquad f(+\infty)=\frac{1}{n}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{nx}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ne^{nx}}=0 \qquad \mathbf{M_n}=f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{en^2} \quad f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{en^2}$$ massimo assoluto

(3) Accertato che $\mathbf{M_n}$ è il massimo assoluto della funzione $\mathbf{f(x,n)}$ in $\mathbf{X}$ possiamo affermare che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{f_n(x)}$ è maggiorata dalla serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{M_n}$, cioè:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{f_n(x)}<\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{M_n} \qquad \forall\, \mathbf{x}\in\mathbf{X}$$

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{M_n}$ diverge nulla possiamo dire sulla convergenza totale di $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{f_n(x)}$ in $\mathbf{X}$.

Se, invece, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{M_n}$ converge possiamo affermare che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{f_n(x)}$ in $\mathbf{X}$ converge totalmente e quindi anche uniformemente ed assolutamente.

Nel caso particolare abbiamo: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n\cdot e^{nx}}}<\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{en^2}=\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ è una serie armonica generalizzata convergente. La serie di funzioni proposta, essendo maggiorata da una serie numerica a termini positivi convergente, converge totalmente e quindi anche uniformemente ed assolutamente.

ESEMPI $\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\mathbf{nx}}{\mathbf{1+n^2x^2}}-\frac{\mathbf{(n+1)x}}{\mathbf{1+(n+1)^2x^2}}\right]$

$$S_n(x)=\left[\frac{x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+4x^2}\right]+\left[\frac{2x}{1+x^2}-\frac{3x}{1+9x^2}\right]+\left[\frac{3x}{1+9x^2}-\frac{4x}{1+16x^2}\right]+\cdots+=\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}\right]$$

$$\mathbf{S_n(x)=\frac{x}{1+x^2}-\frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}}$$

E quindi $\forall\ x\in R$ risulta:

$$S(x)=\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\underset{n\to+\infty}{Lim}\left[\frac{x}{1+x^2}-\frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}\right]=\frac{x}{1+x^2}-\underset{n\to+\infty}{Lim}\left[\frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}\right]$$

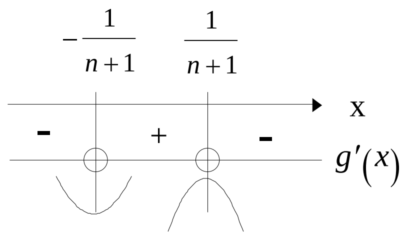
$$\mathbf{S(x)}=\frac{x}{1+x^2}-\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2}\right]=\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{x}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{(n+1)}\right]=\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1+x^2}}$$

$\mathbf{S(x)=\frac{x}{1+x^2}}$ $X=\mathbb{R}$ La serie di funzioni proposta **converge puntualmente** in $\mathbb{R}$, ma ancora non sappiamo se converge **uniformemente** o **totalmente**.

Studiamo adesso la **convergenza uniforme** della serie di funzioni proposta

$$\mathbf{g(x)=\left|R_n(x,n)\right|=\left|S_n(x)-S(x)\right|=\frac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2+1}}\quad,\ g'(x)=\frac{(n+1)\cdot\left[-(n+1)^2x^2+1\right]}{\left[(n+1)^2x^2+1\right]^2},$$

$$g'(x)=0\ \Rightarrow\ -(n+1)^2x^2+1=0\ \Rightarrow\ x_1=-\frac{1}{n+1}\ ,\ x_2=\frac{1}{n+1}$$



$\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ $x=\frac{1}{n+1}$ punto di **massimo assoluto**

$$M_n=g(n)\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{(n+1)\cdot\frac{1}{n+1}}{(n+1)^2\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+1}=\frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to\infty}g(n)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq0$ La serie di funzioni proposta **non converge uniformemente** in $\mathbb{R}$.

Altro procedimento per verificare la **convergenza uniforme**

$$R_n(x,n)=S(x)-S_n(x)=\frac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2+1}\qquad\left|R_n(x,n)\right|<\varepsilon\ \Rightarrow\left|\frac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2+1}\right|<\varepsilon$$

Tale disequazione, per $x=0$, è verificata $\forall\ n\in N$, mentre, per $x\neq0$, da essa si ricava:

$$(n+1)\cdot|x|<\varepsilon(n+1)^2x^2+\varepsilon\ ,\qquad \boldsymbol{\varepsilon\cdot(n+1)^2\cdot x^2-(n+1)\cdot|x|+\varepsilon>0}$$

le soluzioni di questa disequazione si ottengono per

$$n+1>\frac{|x|+\sqrt{x^2-4\varepsilon^2x^2}}{2\varepsilon x^2}=\frac{|x|+|x|\cdot\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon x^2}$$

ossia per : $n+1>\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon|x|}$ e quindi anche per $\boldsymbol{n>-1+\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon|x|}}$

$$n(\varepsilon,x)=-1+\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon|x|}\quad\text{con } x\in X=\mathbb{R}\qquad \lim_{x\to0}n(\varepsilon,x)=\lim_{x\to0}\left(-1+\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon|x|}\right)=+\infty$$

Poiché la funzione $n(\varepsilon,x)$ è illimitata superiormente in **X** la serie di funzioni proposta non converge uniformemente in $X=\mathbb{R}$. Questo significa che non è possibile trovare nessun indice $n^*(\varepsilon)$, dipendente da ε ma non da x, tale che per $n > n^*(\varepsilon)$ l'inequazione [§] risulti soddisfatta da ogni valore della $x\in X=\mathbb{R}$ e questo basta per potere affermare che la serie di funzioni data non è uniformemente convergente in $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{e^{nx}}-\frac{1}{e^{(n+1)x}}\right] \qquad \text{con } \mathbf{x\in R^+}$$

$$S_n(x)=\left(1-\cancel{\frac{1}{e^x}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{e^x}}-\cancel{\frac{1}{e^{2x}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{e^{2x}}}-\frac{1}{e^{3x}}\right)+\dots\setminus+\left[\cancel{\frac{1}{e^{(n-1)x}}}-\cancel{\frac{1}{e^{nx}}}\right]+\left[\cancel{\frac{1}{e^{nx}}}-\frac{1}{e^{(n+1)x}}\right]=1-\frac{1}{e^{(n+1)x}}$$

$$\mathbf{S(x)=\lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{e^{(n+1)x}}\right]=1}$$

$$\mathbf{X=R^+} \quad R_n(x,n)=S(x)-S_n(x)=1-1+\frac{1}{e^{(n+1)x}}=\frac{1}{e^{(n+1)x}} \quad \mathbf{|R_n(x)|=\frac{1}{e^{(n+1)x}}}$$

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ |R_n(x)|<\varepsilon \ \Rightarrow\ \frac{1}{e^{(n+1)x}}<\varepsilon \ \Rightarrow\ e^{(n+1)x}>\frac{1}{\varepsilon}\ \Rightarrow\ (n+1)x>\ln\frac{1}{\varepsilon}\ \Rightarrow$$

$n>-1+\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon}$ $\quad$ $\mathbf{n(\varepsilon,x)=-1+\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon}}$ La funzione $n(\varepsilon,x)$ non è limitata superiormente in R^+ in quanto risulta : $\quad \mathbf{\lim_{n\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)=+\infty}$

Concludendo possiamo affermare che la serie di funzioni proposta in R^+ converge puntualmente ma non converge uniformemente.

Se però consideriamo la serie di funzioni per $x\in[a,b]\subset R^+$, abbiamo:

$a\le x\le b \Rightarrow \frac{1}{b}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon}\le\frac{1}{a}\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon}$ e la funzione $-1+\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon}$ ha in $[a,b]$ come estremo superiore $n^*(\varepsilon)=-1+\frac{1}{a}\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon}$ che non dipende da x [5]

$|R_n(x)|<\varepsilon \quad \forall n>n^*(\varepsilon)=-1+\frac{1}{a}\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon}$ implica che la serie proposta converge uniformemente in $[a,b]$.

---

[5] Questo risultato è evidente se si osserva che la funzione $n(\varepsilon,x)=-1+\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon}$ è strettamente decrescente in R^+ (lo si deduce anche calcolando la derivata prima rispetto ad **x**) ed il sua estremo superiore si ottiene per $x=a$ che è l'estremo inferiore della variabile indipendente **x**

Serie geometriche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a\cdot q^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + ... + aq^n + ...\qquad S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\cdot a \qquad S = \frac{a}{1-q} \quad \text{se} \quad -1<q<1$$

$a=1$ la serie geometrica assume la forma: $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots\cdots + q^n + \cdots\cdot$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad S = \frac{1}{1-q} \quad \text{se} \quad -1<q<1$$

Serie telescopiche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(b_n - b_{n+k}\right) \quad = \quad \text{serie telescopica}$$

$$S_n = \left(b_1 + b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{k-1}\right) - \left(b_{n+1} + b_{n+2} + ... + b_{n+k}\right) \qquad S = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

caso particolare: $k=3$ $\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(b_n - b_{n+3}\right) \quad S_n = \left(b_0 + b_1 + b_2\right) - \left(b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3}\right)$

Sviluppo in serie di Mac Laurin delle funzioni elementari

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathbf{o}\left(x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad x\in R$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathbf{o}\left(x^{2n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x\in R$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathbf{o}\left(x^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x\in R$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + \mathbf{o}\left(x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} \qquad -1<x\le 1$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \mathbf{o}\left(x^n\right) \qquad -1\le x<1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + \mathbf{o}\left(x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{n-1}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\cdots + x^n + \mathbf{o}\left(x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$$

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^2 x^{2n}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{48}x^3-\frac{15}{384}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\mathbf{o}(x^n)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

$$-1\le x\le 1$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\cdots\cdots+\frac{2}{(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots=$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right)=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}\qquad -1<x<1$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\mathbf{o}(x^n)=$$

$$=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\mathbf{o}(x^n)=$$

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

con $-1\le x\le 1$ se $\alpha>0$; $-1<x\le 1$ se $-1<\alpha<0$; $-1<x<1$ se $\alpha\le -1$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{15}{336}x^7+\cdots+\frac{(2n-1x)!!}{(2n)!!(2n+1)}+\mathbf{o}\left(x^{2n+2}\right)=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$$

$$-1\le x\le 1$$

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{40}x^5-\frac{15}{336}x^7-\cdots-\frac{(2n-1x)!!}{(2n)!!(2n+1)}+\mathbf{o}\left(x^{2n+2}\right)=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$$

$$-1\le x\le 1$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathbf{o}\left(x^{2n+2}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad -1\le x\le 1\qquad R_n(x,0)\le\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

$$\operatorname{arccotg} x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\qquad -1\le x\le 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+\ldots\ldots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\ldots\ldots=$$

$$1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}(-1)^n x^n+\ldots=\qquad -1<x\le 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots(2n)}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+\ldots\ldots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \quad 1\leq x<1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots\cdots \qquad -1<x<1$$

$$tg\, x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{73}{891}x^9+\mathbf{o}\left(x^{10}\right)$$

$$e^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{15}x^5-\frac{1}{90}x^6+\frac{1}{90}x^7+o\left(x^8\right)$$

$$e^{\cos x}=e-\frac{e}{2}x^2+\frac{e}{6}x^4-\frac{31e}{720}x^6++o\left(x^8\right)$$

$$e^{tg\, x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4+\frac{37}{120}x^5+\frac{59}{240}x^6+\frac{137}{720}x^7+o\left(x^8\right)$$

$$e^{\arcsin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{24}x^4+\frac{1}{6}x^5+\frac{7}{144}x^6+\frac{13}{126}x^7+o\left(x^8\right)$$

$$e^{\mathrm{arctg}\, x}=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{7}{24}x^4+\frac{1}{24}x^5+\frac{29}{144}x^6-\frac{1}{1008}x^7+o\left(x^8\right)$$

$$e^{x\,\mathrm{arctg}\, x}=1+x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^6+\cdots\cdots$$

$$\sinh x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathbf{o}\left(x^{2n+1}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4\,!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathbf{o}\left(x^{2n}\right)=\sum_{n=}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

$$\tanh x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\frac{73}{891}x^9+\mathbf{o}\left(x^{10}\right)$$

$$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1) \qquad (2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)$$

$$sinh\, x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

Serie di potenze

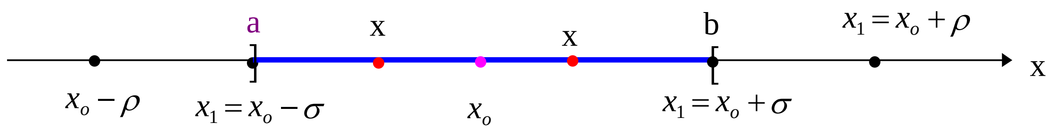
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{a_n}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x_o}\right)^{\mathbf{n}} = a_o + a_1\left(x-x_o\right) + a_2\left(x-x_o\right)^2 + \cdots\cdots + a_n\left(x-x_o\right)^n + \cdots\cdots =$$

serie di potenze di centro x_o (o punto iniziale x_o) e coefficienti a_n

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{a_n}\,\mathbf{x^n} = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots$$

serie di potenze di centro $x_o = 0$ (o punto iniziale $x_o = 0$) e coefficienti a_n

Per una serie di potenze possiamo determinare un numero positivo ρ, detto raggio di convergenza tale per $\boldsymbol{-\rho < x < \rho}$ la serie converge assolutamente ed uniformemente, mentre non converge per $\boldsymbol{x < -\rho}$ ed $\boldsymbol{x > \rho}$. Nulla può dirsi per $\boldsymbol{x = \pm\rho}$. Per $\boldsymbol{\rho = +\infty}$ la serie converge per qualsiasi valore della $\mathbf{x}$. Per una serie di potenze possiamo determinare anche un intervallo di convergenza $\left]x_o-\rho, x_o+\rho\right[$ che può ridursi al solo punto $\mathbf{x = x_o}$ ($\mathbf{x = 0}$) o all'insieme $\mathbf{R}$.



Una serie di potenze è assolutamente convergente nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ quando è convergente in $[a,b]$ la serie dei valori assoluti dei suoi termini $\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\mathbf{a_n}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x_o}\right)^{\mathbf{n}}\right|$ ($\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\mathbf{a_n}\,\mathbf{x^n}\right|$).

Teorema di Weierstrass: Se i valori assoluti di una serie di potenze non superano i corrispondenti di una serie convergente a termini costanti, allora la data serie converge assolutamente ed uniformemente. Una serie che sia assolutamente ed uniformemente convergente si dice totalmente convergente.

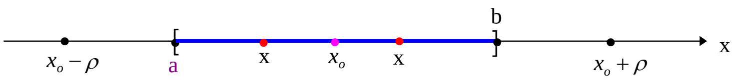
Con parole diverse possiamo dire che una serie di potenze è totalmente convergente se è maggiorata da una serie numerica convergente a termini positivi.

Sia $\mathcal{J} =]x_o - \rho, x_o + \rho[$ l'intervallo di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_o)^n$.

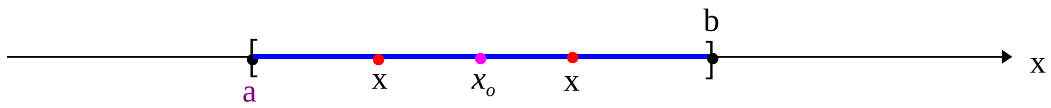
- $\rho = 0 \Rightarrow$ la serie di potenze converge soltanto nel punto $x = x_o$

- $0 < \rho < +\infty$ la serie di potenze converge assolutamente in ogni punto dell'intervallo limitato ed aperto $]x_o - \rho, x_o + \rho[$ e totalmente in ogni intervallo compatto $[a,b]$ contenuto in

$\mathcal{J} =]x_o - \rho, x_o + \rho[$.



- $\rho = +\infty$ la serie di potenze converge assolutamente in ogni punto $x \in \mathbf{R}$ e totalmente in ogni intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ di $\mathbf{R}$.



- Teorema di Abel

Se la serie di potenze converge nel punto $x = x_o + \rho$ allora essa converge uniformemente in ogni intervallo limitato e chiuso $[a; x_o + \rho]$ con $x_o - \rho < a < x_o + b$

Se la serie di potenze converge nel punto $x = x_o - \rho$ allora essa converge uniformemente in ogni intervallo limitato e chiuso $[x_o - \rho; b]$ con $x_o - \rho < a < x_o + b$

- Se $\mathcal{J} = [x_o - \rho, x_o + \rho]$ è l'intervallo di convergenza di una serie di potenze che converge assolutamente negli estremi di $\mathcal{J} = [x_o - \rho, x_o + \rho]$ allora la serie di potenze converge totalmente in $\mathcal{J} = [x_o - \rho, x_o + \rho]$.

Se la convergenza della serie di potenze è semplice ma non assoluta allora la serie di potenze in $\mathcal{J} = [x_o - \rho, x_o + \rho]$ converge uniformemente ma non totalmente.

Raggio di convergenza

Criterio di D'Alembert o criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lambda \Rightarrow \rho=\frac{1}{\lambda}=\begin{cases}\rho=+\infty & \text{se } \lambda=0\\ \rho=0 & \text{se } \lambda=+\infty\\ \rho=\dfrac{1}{\lambda} & \text{se } 0<\lambda<+\infty\end{cases} \qquad \text{se calcolo } \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lambda \Rightarrow \rho=\lambda$$

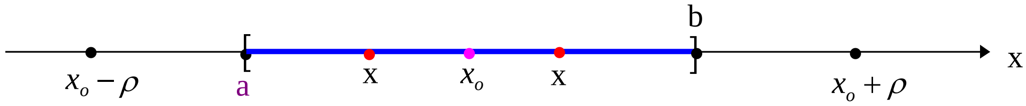
Criterio della radice o di Cauchy-Hadamard

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lambda \Rightarrow \rho=\frac{1}{\lambda}=\begin{cases}\rho=+\infty & \text{se } \lambda=0\\ \rho=0 & \text{se } \lambda=+\infty\\ \rho=\dfrac{1}{\lambda} & \text{se } 0<\lambda<+\infty\end{cases}$$

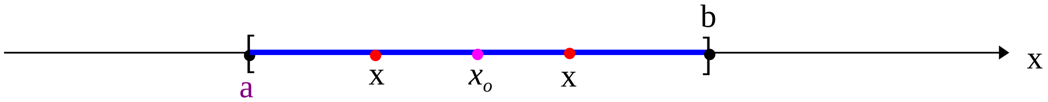
Intervallo di convergenza

(1) $\rho=0$ la serie di potenze converge soltanto nel punto $x=x_0$ ($x=0$)

(2) $0<\rho<+\infty$ la serie di potenze converge assolutamente per $x\in\,]x_o-\rho,x_o+\rho[$ e totalmente per ogni intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ contenuto in $\mathcal{J}=\,]x_o-\rho,x_o+\rho[$, mentre non converge in alcun punto x esterno all'intervallo $\mathcal{J}=\,]x_o-\rho,x_o+\rho[$. Nulla possiamo dire sulla convergenza della serie di potenze nei punti $x_o-\rho$ $(-\rho)$ e $x_o+\rho$ $(+\rho)$. In questi punti la serie di potenze diventa una serie numerica che va studiata applicando i criteri delle serie numeriche.



(3) $\lambda=+\infty$ la serie di potenze converge assolutamente $\forall x\in\mathbb{R}$ e totalmente per ogni intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ di $\mathbb{R}$.



Concludendo possiamo affermare quanto segue:

L'insieme di convergenza di una serie di potenze è un intervallo di centro $x = x_o$ ($x = 0$) che:

(1) si riduce al solo punto $x = x_o$ ($x = 0$) se il raggio di convergenza è $\boldsymbol{\rho = 0}$

(2) coincide con $\mathbb{R}$ se $\boldsymbol{\rho = +\infty}$

(3) è un intervallo limitato ed aperto $]x_o - \rho, x_o + \rho[$ ($]-\rho, +\rho[$) se $\mathbf{0} < \rho < +\infty$

In questo caso nulla possiamo dire sulla convergenza della serie di potenze agli estremi dell'intervallo $]x_o - \rho, x_o + \rho[$ ($]-\rho, +\rho[$). Dobbiamo studiare la serie di potenze per $x = x_o - \rho$ ($x = -\rho$) e per $x = x_o + \rho$ ($x = +\rho$) che diventa una serie numerica a termini costanti.

Successioni di funzioni

(1) $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ = funzione limite

$X=[a;b]=dom\, f(x)$ o un suo sottoinsieme è l'intervallo di convergenza puntuale

$$|f_n(x)-f(x)|=|R_n(x,n)|=\varphi(n,x) \quad \text{resto ennesimo}$$

(2) La successione di funzioni $f_n(x)$ converge uniformemente alla funzione limite $f(x)$ in $X=[a;b]$ se e solo se $\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in X}|R_n(x,n)|\to 0$ quando $n\to+\infty$

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in X}|R_n(x,n)|=\sup_{x\in X}\varphi(n,x)=\begin{cases}\varphi(n)\\ M(n)\end{cases}$$

$\lim_{n\to+\infty}\varphi(n)=\lim_{n\to+\infty}M(n)=0 \Rightarrow$ convergenza uniforme

$\lim_{n\to+\infty}\varphi(n)\neq 0$ oppure $\lim_{n\to+\infty}M(n)\neq 0 \Rightarrow$ convergenza puntuale

$\varphi(n)$ = estremo superiore della funzione $R_n(x,n)=\varphi(n,x)$

$M(n)$ = massimo assoluto della funzione $R_n(x,n)=\varphi(n,x)$

Se $R_n(x,n)$ è strettamente monotona si calcola il suo estremo superiore $\varphi(n)$, altrimenti si calcola il suo massimo assoluto $M(n)$

(2) $$|f(x)-f_n(x)|=|R_n(x,n)|<\varepsilon \quad \forall\, n>\begin{cases}n(\varepsilon,x) & \textbf{convergenza puntale}\\ n(\varepsilon) & \textbf{convergenza uniforme}\end{cases}$$

Se algebricamente non è possibile stabilire la relazione $\forall\, n>\begin{cases}n(\varepsilon,x) & \textbf{convergenza puntale}\\ n(\varepsilon) & \textbf{convergenza uniforme}\end{cases}$

allora si utilizza la relazione $\sup_{x\in X} n(\varepsilon,x)=n(\varepsilon) \Rightarrow$ convergenza uniforme

Se $\mathbf{n}(\varepsilon, \mathbf{x})$ è strettamente monotona si calcola il suo estremo superiore $\mathbf{n}(\varepsilon)$, altrimenti si calcola il suo massimo assoluto $\mathbf{M}(\varepsilon)$

(5) Se esiste una successione numerica $\{a_n\}$ a termini positivi e infinitesima tale che risulti $|f(x) - f_n(x)| = |R_n(x,n)| < a_n \quad \forall\, x \in X$, allora la successione di funzioni $f_n(x)$ converge uniformemente alla funzione limite $f(x)$ in $\mathbf{X}$.

Serie di funzioni

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots\cdots = S(x)$

$\mathbf{X=[a,b]}$ = insieme di convergenza puntuale

(2) Se possibile si calcola $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots\cdots + f_n(x)$

(3) $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots$

$$|S_n(x) - S(x)| = |R_n(x,n)| = \varphi(n,x) \quad \text{resto ennesimo}$$

(4) Si calcola $\sup_{x \in X} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in X} R_n(x,n) = \sup_{x \in X} \varphi(n,x) \begin{cases} \varphi(n) \\ M(n) \end{cases}$

$\varphi(n)$ = estremo superiore della funzione $R_n(x,n) = \varphi(n,x)$

$M(n)$ = massimo assoluto della funzione $R_n(x,n) = \varphi(n,x)$

Se $R_n(x,n)$ è strettamente monotona si calcola il suo estremo superiore $\varphi(n)$, altrimenti si calcola il suo massimo assoluto $M(n)$

$\lim_{n \to +\infty} \varphi(n) = \lim_{n \to +\infty} M(n) = 0 \quad \Rightarrow$ convergenza uniforme

$\lim_{n \to +\infty} \varphi(n) \neq 0$ oppure $\lim_{n \to +\infty} M(n) \neq 0 \quad \Rightarrow$ convergenza puntuale

(5) $\left|S(x) - S_n(x)\right| = \left|R_n(x,n)\right| < \varepsilon \quad \forall\, n > \begin{cases} n(\varepsilon,x) & \textbf{convergenza puntale} \\ n(\varepsilon) & \textbf{convergenza uniforme} \end{cases}$

Se algebricamente non è possibile stabilire la relazione $\forall\, n > \begin{cases} n(\varepsilon,x) & \textbf{convergenza puntale} \\ n(\varepsilon) & \textbf{convergenza uniforme} \end{cases}$

allora si utilizza la relazione $\sup\limits_{x\in X} n(\varepsilon,x) = n(\varepsilon) \quad \Rightarrow$ convergenza uniforme

Se $n(\varepsilon,x)$ è strettamente monotona si calcola il suo estremo superiore $n(\varepsilon)$, altrimenti si calcola il suo massimo assoluto $M(\varepsilon)$

$n(\varepsilon,x)$ è dotato di estremo superiore (massimo assoluto) $n(\varepsilon)$ si ha la convergenza uniforme altrimenti si ha convergenza puntuale

(6) Una serie di funzioni maggiorata da una serie numerica a termini positivi convergente [$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \le \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$] converge totalmente e quindi anche uniformemente, assolutamente e puntualmente.

Con parole diverse ma equivalenti possiamo dire che una serie di funzioni $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ si dice totalmente convergente in $X=[a,b]$ se è possibile determinare una serie numerica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} M_n$ a termini non negativi convergente tale da avere: $\left|f_n(x)\right| \le M_n \quad \forall n \in N \ \wedge\ \forall x \in X$

Per M_n potremmo scegliere, se possibile, l'estremo superiore o il massimo assoluto in $X=[a,b]$ della funzione $f_n(x)$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n(x)$ = serie a segni alternati. Si applica il criterio di Leibnitz

Se risulta $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ la serie di funzione converge puntualmente.

Poi si risolve la disequazione

$$\left|S(x) - S_n(x)\right| = \left|R_n(x,n)\right| < f_{n+1}(x) \quad \forall\, n > \begin{cases} n(\varepsilon, x) & \textbf{convergenza puntale} \\ n(\varepsilon) & \textbf{convergenza uniforme} \end{cases}$$

(8) Per calcolare l'insieme di convergenza puntale **X** si possono utilizzare i criteri ci convergenza validi per le serie numeriche a termini positivi. Questo procedimento è necessario quando della serie di funzioni non siamo in grado di calcolare la somma $S_n(x)$ dei suoi primi **n** termini