## Gradiente di una funzione

Data la funzione scalare $f(x,y) = f(P)$ definiamo **gradiente** di $f$ il vettore definito dalla seguente relazione vettoriale: $grad\ f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j}$

Per una funzione $f(P) = f(x,y,z)$ abbiamo: $grad\ f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{k}$

Per una funzione ad n variabili $f(P) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ abbiamo:

$$grad\ f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\vec{e}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\vec{e}_n$$

L'operatore vettoriale $\nabla$, che trasforma una funzione in un vettore è detto **operatore nabla** oppure **operatore hamiltoniano**. Il **gradiente** è un operatore che applicato ad uno scalare $f$ produce il vettore le cui componenti sono le derivate parziali della funzione scalare $f$.

Il **gradiente** di una funzione $f$ può essere indicato anche col seguente simbolo:

$$\nabla f(P) = grad\ f(P) = \left(f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P)\right) \qquad \textbf{[5]}$$

Il gradiente della funzione $f(x,y)$ nel punto $(x_o, y_o)$, indicato col seguente simbolo:

$$\nabla f(x_o,y_o) = grad\ f(x_o,y_o) = f'_x(x_o,y_o)\cdot\vec{i} + f'_y(x_o,y_o)\cdot\vec{j} = \left(f'_x(x_o,y_o), f'_y(x_o,y_o)\right) \qquad \textbf{[6]}$$

ha un significato simile a quello della derivata $f'(x_o)$ di una funzione $f(x)$ di una variabile reale nel punto $x_o$. Infatti $f'(x_o)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva di equazione $y = f(x)$ nel punto di ascissa $x_o$. Nel caso di una funzione a due variabili $f(x,y)$ il gradiente, valutato nel punto $(x_o, y_o)$, fornisce i coefficienti dell'equazione del piano tangente alla superficie solida che è grafico della funzione $f(x,y)$. L'equazione del piano tangente è:

$$z - f(x_o,y_o) = f_x(x_o,y_o)\cdot(x - x_o) + f_y(x_o,y_o)\cdot(y - y_o)$$

**Calcolare il gradiente della funzione** $f(x,y) = x^2 + y^2$ **nel punto** $P_o(3,2)$

$f_x = 2x$ , $f_x(3,2) = 6$ , $f_y = 2y$ , $f_y(3,2) = 4$, $\nabla f(3,2) = grad\ f(3,2) = 6\cdot\vec{i} + 4\cdot\vec{j} = (6,4)$

**Calcolare il gradiente della funzione** $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ **nel punto** $P_o(-1,3,-2)$

$f_x = 2x$ , $f_x(-1,3,-2) = -2$ , $f_y = 2y$ , $f_y(-1,3,-2) = 6$ , $f_z = 2z$ , $f_z(-1,3,-2) = -4$

$$grad\ f = -2\cdot\vec{i} + 6\cdot\vec{j} + -4\cdot\vec{k} = (-2, 6, -4)$$

## Analisi vettoriale

Il simbolo $\nabla$ rappresenta un operatore simbolico che si può esprimere scrivendo:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

E si chiama operatore nabla oppure operatore hamiltoniano. La notazione $\nabla f$ si legge **gradiente di $f$** oppure **nabla $f$**.

## Campi vettoriali

Supponiamo che ad ogni punto di una certa regione $A$ dello spazio $\mathbb{R}^3$ sia associato il vettore

$\vec{v} = \vec{v}(P) = \vec{v}(\vec{r})$ con $\vec{r} = P - O = x \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k} = \vec{OP} = (x, y, z)$

L'insieme di tutti questi vettori costituisce un campo vettoriale; diciamo pure che la regione $A$ dello spazio $\mathbb{R}^3$ è sede di un campo vettoriale. Quindi un modello di campo vettoriale $\vec{v}(P)$ si ottiene considerando, per ogni punto $P \in A \subset \mathbb{R}^3$, il vettore $\vec{v}(P)$ applicato in $P$. Quindi un campo vettoriale è un qualsiasi vettore $\vec{v}$ funzione del punto $P(x, y, z)$ al quale è applicato. Se il vettore $\vec{v}$ è una forza $\vec{F}$ otteniamo un campo di forze come il campo gravitazionale, il campo elettrico, il campo magnetico. Se $\vec{v}(P)$ non ha alcun significato fisico abbiamo un **campo vettoriale puramente matematico**. Concludendo possiamo affermare che un campo vettoriale è un qualsiasi vettore $\vec{v}$ funzione del punto $P(x, y, z)$ al quale è applicato. In simboli abbiamo: $\vec{v} = \vec{v}(P) = \vec{v}(\vec{r})$ dove $P$ è il generico punto dello spazio al quale è applicato il vettore $\vec{v}$ ed $\vec{r} = P - O = x \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$ è il raggio vettore associato al punto $P$. Un campo vettoriale dello spazio $\mathbb{R}^3$ si ottiene assegnando la funzione vettoriale:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$$

dove $v_x = v_x(x, y, z) = X = X(x, y, z)$, $v_y = v_y(x, y, z) = Y = Y(x, y, z)$, $v_z = v_z(x, y, z) = Z = Z(x, y, z)$ sono le proiezioni del vettore $\vec{v}$ sugli assi cartesiani $Oxyz$ e sono definite in un insieme $A \subset \mathbb{R}^3$

Se ci si limita a fare variare **P** in una regione piana e se il vettore $\vec{v}(P)$ appartiene sempre al piano considerato diremo che trattasi di un campo vettoriale piano.

In tal caso, assunto il piano come piano $Oxy$, è sempre $Z = \mathrm{v}_z = 0$ mentre **X** e **Y** sono funzioni di x ed y. In simboli abbiamo:

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}(P) = \vec{\mathrm{v}}(x,y) = \mathrm{v}_x(x,y)\cdot\vec{i} + \mathrm{v}_y(x,y)\cdot\vec{j} = X(x,y)\cdot\vec{i} + Y(x,y)\cdot\vec{j} = (X,Y)$$

## Divergenza e rotore di un campo vettoriale

Definiamo **divergenza di un campo vettoriale**

$$\vec{\mathrm{v}}(P) = \mathrm{v}_x(x,y,z)\cdot\vec{i} + \mathrm{v}_y(x,y,z)\cdot\vec{j} + \mathrm{v}_z(x,y,z)\cdot\vec{k}$$

la funzione scalare definita dalla seguente relazione: $\operatorname{div}\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}$

Nel piano abbiamo: $\operatorname{div}\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y}$

Definiamo **rotore** (o **rotazione**) del campo vettoriale $\vec{\mathrm{v}}(P)$ il vettore dello spazio definito dalla seguente relazione vettoriale:

$$\operatorname{rot}\vec{\mathrm{v}} = \left(\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{i} + \left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{j} + \left(\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}\right)\cdot\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{v}_x & \mathrm{v}_y & \mathrm{v}_z \end{vmatrix}$$

Le componenti del vettore $\operatorname{rot}\vec{\mathrm{v}}$ coincidono con i minori che si ottengono sopprimendo la $1^a$, la $2^a$, la $3^a$ colonna e cambiando di segno il secondo.

**Teorema**: Il **prodotto scalare** del vettore simbolico $\nabla$ per il vettore $\vec{\mathrm{v}}(P)$ è uguale alla **divergenza** del vettore $\vec{\mathrm{v}}(P)$. Infatti:

$$\nabla\times\vec{\mathrm{v}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(\mathrm{v}_x\cdot\vec{i} + \mathrm{v}_y\cdot\vec{j} + \mathrm{v}_z\cdot\vec{k}\right) = \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{\mathrm{v}}$$

**Teorema**: Il prodotto vettoriale del vettore simbolico $\nabla$ per il vettore $\vec{v}(P)$ è uguale al rotore del vettore $\vec{v}(P)$. Infatti:

$$\nabla \wedge \vec{v}(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cdot \vec{k} = \mathrm{rot}\, \vec{v}(P)$$

**Definizione**: Un campo vettoriale il cui rotore sia identicamente nullo si dice che è un campo irrotazionale.

**Definizione**: In campo vettoriale $\vec{v}(P) = v_x(x,y,z) \cdot \vec{i} + v_y(x,y,z) \cdot \vec{j} + v_z(x,y,z) \cdot \vec{k}$ è irrotazionale se e solo se la forma differenziale associata $v_x \cdot dx + v_y \cdot dy + v_z \cdot dz$ è chiusa.

Le due definizioni sono equivalenti in quanto se $\vec{v}$ è un campo vettoriale definito a partire da una forma differenziale chiusa, allora esso ha rotore nullo. Viceversa un qualsiasi campo vettoriale con rotore nullo ha la forma differenziale associata $v_x \cdot dx + v_y \cdot dy + v_z \cdot dz$ chiusa.

Dei tre operatori grad, $div$, $rot$ si può rilevare che: ● il gradiente opera tra scalai e vettori ● la divergenza opera tra vettori e scalari ● il rotore opera tra vettori e vettori

Quando un campo vettoriale $\vec{v}$ soddisfa alla condizione $\mathrm{div}\, \vec{v} = 0$ si dice solenoidale; quando soddisfa alla condizione $rot\, \vec{v} = 0$ si dice irrotazionale.

## Circuitazione di un campo vettoriale

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare avente come frontiera la curva piana $\gamma$. Definiamo circuitazione del campo vettoriale $\vec{v}(P)$ lungo la linea chiusa $\gamma$ l'integrale curvilineo del prodotto scalare $\vec{v} \times d\vec{P} = \vec{v} \times \vec{\tau} \cdot ds$ esteso alla curva $\gamma$. $\vec{\tau}(P)$ è il versore tangente a $\gamma$ nel punto $P$ avente lo stesso orientamento del verso positivo del cammino di integrazione. In simboli abbiamo:

$$C_{\gamma}(\vec{v})=\oint_{\gamma}\vec{v}\times d\overrightarrow{P}=\oint_{\gamma}\vec{v}\times\vec{\tau}\cdot ds=\oint_{\gamma}v_x\cdot dx+v_y\cdot dy+v_z\cdot dz$$

Tale relazione si chiama anche la circuitazione del campo vettoriale $\vec{v}(P)$ lungo la frontiera di $A$ nel verso positivo. Di solito il verso di percorrenza di $\gamma$ è quello antiorario.

Se il vettore $\vec{v}(P)$ è una forza $\vec{F}(P)$ allora il seguente integrale di linea

$$\underset{\gamma(AB)}{L}(\vec{F})=\oint_{\gamma(AB)}\vec{F}\times d\overrightarrow{P}=\oint_{\gamma(AB)}F_x\cdot dx+F_y\cdot dy+F_z\cdot dz$$

Rappresenta il lavoro compiuto dalla forza quando questa sposta il suo punto di applicazione da una posizione iniziale $A$ ad una posizione finale $B$.

Esempio: Dati la circonferenza $\sigma$ di centro $O(0;0)$ e raggio $r=1$ ed il campo vettoriale $\vec{v}(x,y)=xy\cdot\vec{i}-y\cdot\vec{j}$ determinare la circuitazione di $\vec{v}$ lungo la circonferenza $\sigma$ orientata in senso antiorario.

$$\sigma:\begin{cases}x=\cos\vartheta\\ y=\sin\vartheta\end{cases}\qquad \begin{cases}dx=-(\sin\vartheta)d\vartheta\\ y=(\cos\vartheta)d\vartheta\end{cases}\qquad \begin{cases}x'=-\sin\vartheta\\ y=\cos\vartheta\end{cases}\qquad 0\le\vartheta\le 2\pi$$

$$C(\vec{v})=\oint_{\sigma}v_x\cdot dx+v_y\cdot dy=\int_0^{2\pi}\left(-\sin^2\vartheta\cdot\cos\vartheta-\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\right)d\vartheta=\int_0^{2\pi}-\sin^2\vartheta d\sin\vartheta-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2\vartheta d2\vartheta$$

$$C(\vec{v})=\left[-\frac{1}{3}\sin^3\vartheta+\frac{1}{2}\cos 2\vartheta\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

Il vettore $\vec{v}$ è, punto per punto, perpendicolare alla circonferenza goniometrica $\sigma$.

## Lavoro compiuto da una forza

Consideriamo un campo di forze caratterizzato dal vettore $\overrightarrow{F}(x,y)$ che è la forza applicata al punto $P(x,y)$. Sia $d\vec{P}=(dx,dy)=dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j}$ il vettore spostamento infinitesimo applicato in $P(x,y)$. Se la forza $\overrightarrow{F}$ sposta il suo punto di applicazione $P(x,y)$

lungo una curva γ diciamo che essa compie lavoro. Se sposta il suo punto di applicazione lungo il tratto infinitesimo $d\vec{P}$ della curva γ compie il lavoro infinitesimo (o elementare):

$$d\,L = \vec{F} \times d\,\vec{P} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|d\,\vec{P}\right| \cdot \cos\vartheta = X(x,y)dx + Y(x,y)\,dy$$

mentre se sposta il suo punto di applicazione lungo γ dalla posizione iniziale $M$ a quella finale $N$ compie il lavoro: $L = \int_M^N \vec{F} \times d\,\vec{P} = \int_M^N X(x,y)dx + Y(x,y)dy$

Integrali del tipo $\int_M^N X(x,y)dx + Y(x,y)dy$ (che rappresentano il lavoro compiuto da una forza lungo una curva $\gamma$ a partire dal punto $M$ fino al punto $N$) sono integrali curvilinei di una forma differenziale lineare o integrali curvilinei di seconda specie o integrali curvilinei ai differenziali delle coordinate.

Se l'integrale curvilineo di seconda specie non dipende dal cammino di integrazione γ ma dipende esclusivamente dalla posizione iniziale **M** e da quella finale **N**, diciamo che siamo in presenza di un campo di forze conservative e la forma differenziale associata $X\,dx + Y\,dy$ prende il nome di forma differenziale esatta in quanto essa è il differenziale totale di una funzione $U(x,y)$ che rappresenta un potenziale scalare del campo vettoriale $\vec{F}$, cioè:

$$d\,U = U_x d\,x + U_y\,d\,y = X\,d\,x + Y\,d\,y$$

Se $X\,dx + Y\,dy$ è una **forma differenziale esatta**, allora indicato con $U(x,y)$ una sua qualsiasi primitiva risulta: [**] (γ) $\displaystyle L\left(\vec{F}\right)_{\gamma(M\to N)} = \int_{\gamma(M\to N)} d\,U = \int_M^N X(x,y)dx + Y(x,y)dy = U(N) - U(M)$

qualunque sia la curva semplice e generalmente regolare γ contenuta nell'insieme di definizione **A** di **X** e **Y** e congiungente **M** ed **N**.

Per stabilire che la forma differenziale $X(x,y)dx + Y(x,y)\,dy$ è esatta basta verificare che essa è chiusa ed è definita in un dominio semplicemente connesso.

Una forma differenziale $\omega = X(x,y)\cdot d\,x + Y(x,y)\cdot d\,y$ definita in un insieme aperto $A \subset R^2$ e di classe $C^1$ in $A$, si dice chiusa se verifica la seguente relazione $\dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}$

Se poi l'insieme $A$ è anche semplicemente connesso allora la forma differenziale $\omega = X(x,y)\cdot dx + Y(x,y)\cdot dy$ si dice esatta. Se la forma differenziale è esatta allora esiste una funzione $U(x,y)$ per la quale risulta: $\omega = dU(x,y) = X(x,y)\cdot dx + Y(x,y)\cdot dy$

Un aperto connesso $A \subset R^2$ si dice semplicemente connesso se una qualsiasi curva piana semplice e chiusa tutta contenuta in $A \subset R^2$ è la frontiera di un insieme di punti tutti appartenenti ad $A \subset R^2$. Un dominio limitato mediante un unico contorno costituito da una linea chiusa è semplicemente connesso.

La funzione $U(x,y)$ può essere calcolata anche in base al seguente ragionamento. Se $U(x,y)$ è una **primitiva** della forma differenziale lineare $X\,dx + Y\,dy$ risulta identicamente: $\frac{\partial U}{\partial x} = X(x,y)$

Detti $x_o$ un punto fisso ed x un punto variabile dell'intervallo limitato e aperto $]a,b[$, per ogni $y \in ]c,d[$ (cioè pensando di mantenere fisso y) abbiamo: $U(x,y) = \int_{x_o}^{x} X(x,y)dx + \gamma(y)$

(abbiamo effettuato una integrazione indefinita rispetto ad x mantenendo y costante; per questo motivo la costante additiva è una funzione di y, cioè: $C = \gamma(y)$ )

Partendo dalla relazione $\frac{\partial U}{\partial x} = X(x,y)$ ricaviamo $U = \int_{x_o}^{x} X(x,y)dx + \gamma(y)$ (Potremmo scrivere semplicemente $U = \int X(x,y)dx + \gamma(y)$ ). Derivando ambo i membri rispetto ad y otteniamo:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_o}^{x} \frac{\partial X}{\partial y} dx + \gamma'(y) = \int_{x_o}^{x} \frac{\partial Y}{\cancel{\partial x}} \cancel{dx} + \gamma'(y) = \int_{x_o}^{x} \partial X(x,y) + \gamma'(y)$$

$Y(x,y) = \left[Y(x,y)\right]_{x_o}^{x} + \gamma'(y)$ , $Y(x,y) = Y(x,y) - Y(x_o,y) + \gamma'(y)$

$$\gamma'(y) = Y(x_o,y) \quad \Rightarrow \quad \gamma(y) = \int_{y_o}^{y} Y(x_o,y)dy + C$$

Partendo dalla relazione $\frac{\partial U}{\partial y} = Y(x,y)$ ricaviamo $U = \int_{y_o}^{y} Y(x,y)dy + g(x)$

Derivando ambo i membri rispetto ad x e ricordando che $\frac{\partial U}{\partial x} = X(x,y)$ ricaviamo:

$$X(x,y) = \int_{y_o}^{y} \frac{\partial Y}{\partial x} dy + g'(x) = \int_{y_o}^{y} \frac{\partial X}{\cancel{\partial y}} \cancel{dy} + g'(x) = \int_{y_o}^{y} \partial X(x,y) + g'(x)$$

$X(x,y) = X(x,y) - X(x,y_o) + g'(x) \qquad g'(x) = X(x,y_o) \qquad g(x) = \int_{x_o}^{x} X(x,y_o)dx + C$

**Esempio**: Riconoscere che la forma differenziale $\omega = dU(x,y) = \left(3x^2y - y^2\right)\cdot dx + \left(x^3 - 2xy + 1\right)\cdot dy$ è il differenziale esatto di una funzione $U(x,y)$ della quale bisogna calcolare la sua espressione analitica.

Il domino della forma differenziale proposta è $R^2$ che è un dominio semplicemente connesso.

$$X(x,y) = 3x^2y - y^2 \quad Y(x,y) = x^3 - 2xy + 1 \quad \frac{\partial X}{\partial y} = 3x^2 - 2y \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 3x^2 - 2y \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X(x,y) = 3x^2y - y^2 \qquad U = \int_0^x \left(3x^2y - y^2\right)dx + \gamma(y) \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \int_0^x \left(3x^2 - 2y\right)dx + \gamma'(y) \quad ,$$

$$x^3 - 2xy + 1 = x^3 - 2xy + \gamma'(y) \quad \gamma'(y) = 1 \Rightarrow \gamma(y) = \int_0^y dy = y + C \Rightarrow U(x,y) = x^3y - x^2 + y + C$$

**Esempio**: Data il campo di forze $\vec{F} = y\cdot\vec{i} + x\cdot\vec{j}$ calcolare il potenziale ed il lavoro compiuto da $\vec{F}$ quando sposta il suo punto di applicazione dalla posizione di ascissa $x = 0$ alla posizione finale di ascissa $x = \pi$ lungo la curva $\gamma$ di equazione $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

La forma differenziale $X\cdot dx + Y\cdot dy = y\cdot dx + x\cdot dy$ è chiusa in quanto risulta: $\frac{\partial X}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$

Essa è esatta in quanto il suo dominio è $\mathbb{R}^2$ che è un dominio semplicemente connesso.

Possiamo calcolare il suo potenziale $U(x,y)$. $\frac{\partial U}{\partial x} = y \Rightarrow \partial U = y\cdot\partial x \quad \int \partial U = y\cdot\int \partial x + \gamma(y)$

$U = yx + \gamma(y) \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x + \gamma'(y)$ ricordando che $\frac{\partial U}{\partial y} = x$ possiamo scrivere: $x = x + \gamma'(y) \quad \gamma'(y) = 0$

$\gamma(y) = C \qquad U = yx + C \quad x = 0 \Rightarrow y = 1 \quad A(1,0)$ punto iniziale $\quad x = \pi \Rightarrow y = -1 \quad A(-1,0)$ punto finale $\quad L_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{A\to B} y\cdot dx + x\cdot dy = U(B) - U(A) = 0 - 0 = 0$

$\vec{F}\times\overrightarrow{dP} = 0 \Rightarrow \vec{F}\perp\overrightarrow{dP}$ La forza è, punto per punto, perpendicolare alla traiettoria che la circonferenza goniometrica.

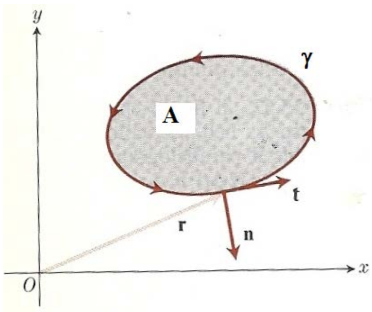
## Flusso del vettore $\vec{v}$ uscente da una linea piana frontiera di un dominio piano

Consideriamo il campo bidimensionale $\vec{v}=X(x,y)\cdot\vec{i}+Y(x,y)\cdot\vec{j}$ dove $X,Y$ sono funzioni continue con le loro derivate prime parziali $\frac{\partial X}{\partial x}$ e $\frac{\partial Y}{\partial y}$ nel domino regolare $A\subset R^2$ avente come frontiera $\partial A=f_r(A)$ la curva piana $\gamma$. Abbiamo visto che nel piano risulta $\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}$

$\vec{r}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$ è il vettore posizione

$\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{ds}$ è il versore tangente positivo

$\vec{n}=\vec{t}\wedge\vec{k}=\frac{dy}{ds}\cdot\vec{i}-\frac{dx}{ds}\cdot\vec{j}$ è il versore normale




Le formule di Gauss nel piano ci consentono di scrivere:

$$\iint_A\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{f_r(A)}X\,dy-Y\,dx=\int_{+\gamma}\left[\left(X\cdot\vec{i}+Y\cdot\vec{j}\right)\times\vec{n}\right]ds=\int_{+\gamma}[\vec{v}\times\vec{n}]\,ds$$

essendo $\vec{n}$ il versore normale esterno alla frontiera $f_r(A)=\partial A=+\gamma$.

**Teorema**: Se lungo la curva $\gamma$ scegliamo come verso positivo quello antiorario allora $\vec{n}$ rappresenta il versore positivo rivolto verso l'esterno della curva $\gamma$. Concludendo possiamo affermare che se $\vec{v}$ è il campo vettoriale piano di componenti $X,Y$ continue con le loro derivate parziali $\frac{\partial X}{\partial x},\frac{\partial Y}{\partial y}$ risulta:

$$\iint_A(\operatorname{div}\vec{v})\,dx\,dy=\int_{f_r(A)}(\vec{v}\times\vec{n})\,ds \qquad [\sigma]$$

essendo $\vec{n}$ il versore normale esterno alla frontiera $f_r(A)=\partial A=+\gamma$.

Sia $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ $t\in[a,b]$ una rappresentazione parametrica della frontiera del domino regolare $A\subset R^2$

Poiché risulta: $\vec{t} = \frac{dx}{ds} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{ds} \cdot \vec{j} = \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)s]^2 + [y'(t)]^2}} \cdot \vec{i} + \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)s]^2 + [y'(t)]^2}} \cdot \vec{j}$ e

$\vec{n} = \frac{dy}{ds} \cdot \vec{i} - \frac{dx}{ds} \cdot \vec{j} = \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)s]^2 + [y'(t)]^2}} \cdot \vec{i} - \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)s]^2 + [y'(t)]^2}} \cdot \vec{j}$ possiamo scrivere:

$$\vec{v} \times \vec{n} = \left( X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} \right) \times \left( \frac{dy}{ds} \cdot \vec{i} - \frac{dx}{ds} \cdot \vec{j} \right) = \frac{X \cdot dy}{ds} - \frac{Y \cdot dx}{ds} \qquad (\vec{v} \times \vec{n})\, ds = X \cdot dy - Y \cdot dx$$

$$\vec{v} \times \vec{n} = \left( X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} \right) \times \left( \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)s]^2 + [y'(t)]^2}} \cdot \vec{i} - \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)s]^2 + [y'(t)]^2}} \cdot \vec{j} \right) =$$

$$\vec{v} \times \vec{n} = \frac{X \cdot y'(t)}{\sqrt{[x'(t)s]^2 + [y'(t)]^2}} - \frac{Y \cdot x'(t)}{\sqrt{[x'(t)s]^2 + [y'(t)]^2}} = \frac{X \cdot y'(t) - Y \cdot x'(t)}{\sqrt{[x'(t)s]^2 + [y'(t)]^2}}$$

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \cdot dt$$

$$(\vec{v} \times \vec{n})\, ds = \frac{X \cdot y'(t) - Y \cdot x'(t)}{\sqrt{[x'(t)s]^2 + [y'(t)]^2}} \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \cdot dt = X \cdot y'(t) - Y \cdot x'(t)$$

$$\iint_A (\operatorname{div} \vec{v})\, dx\, dy = \int_{f_r(A)} (\vec{v} \times \vec{n})\, ds = \int_a^b \left( X \cdot y'(t) - Y \cdot x'(t) \right) \cdot dt$$

Il teorema $[\sigma]$ prende il nome di **teorema della divergenza nel piano**. L'integrale $\int_{f_r(A)} (\vec{v} \times \vec{n})\, ds$ si chiama il **flusso del vettore** $\vec{v}$ uscente dalla frontiera $f_r(A) = \partial A = +\gamma$ del dominio piano $A$.

Il teorema precedente può essere così riformulato: L'integrale della divergenza di un vettore $\vec{v}$ esteso ad un dominio $A \subset R^2$ è uguale al flusso del vettore $\vec{v}$ uscente dalla frontiera di $A$.

Se le funzioni $X$ ed $Y$ sono funzioni continue con le loro derivate prime parziali $\frac{\partial X}{\partial x}$ e $\frac{\partial Y}{\partial y}$ nel domino regolare $A \subset R^2$ avente come frontiera $\partial A = f_r(A)$ la curva piana $\gamma$, risulta:

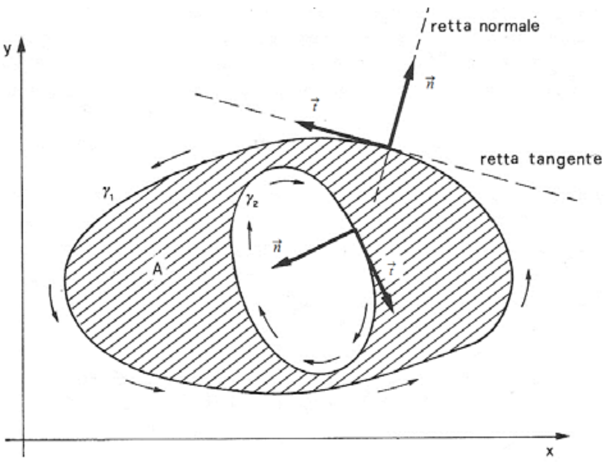
$$\int_{f_r(A)} X d\,y + Y d\,x = \iint_A \left( \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) d\,x\,d\,y$$

Tale relazione prende il nome di formula di Green ed esprime il teorema di Stokes nel piano.

## Come si stabilisce la coerenza dell'orientamento del versore tangente positivo con l'orientamento positivo della frontiera?

La frontiera di $A$, come curva regolare $\gamma$, ammette versore tangente $\vec{t}$ in tutti i suoi punti. Per ogni punto della frontiera $\gamma$ è definita la retta normale come retta perpendicolare alla tangente. Secondo convenzione, si orienta la retta normale verso l'esterno dell'insieme $A$ e si considera il corrispondente versore normale esterno $\vec{n}$. Si orienta poi il versore tangente $\vec{t}$ in modo che la coppia $(\vec{n},\vec{t})$ risulti congruente all'orientamento degli assi cartesiani $Oxy$, cioè alla coppia di versori $(\vec{i};\vec{j})$: $\vec{n}\equiv\vec{i};\vec{t}\equiv\vec{j}$. La coppia $(\vec{n},\vec{t})$ deve essere tale che mediante una opportuna rotazione ed una opportuna traslazione il versore $\vec{n}$ coincida col versore $\vec{i}$ dell'asse delle ascisse ed il versore $\vec{t}$ coincida col versore $\vec{j}$ dell'asse delle ordinate. In corrispondenza all'orientamento del versore tangente $\vec{t}$, viene indotto un orientamento sulla frontiera $f_r(A)=\partial A$ che, per convenzione, viene detto positivo. La frontiera cos' orientata si indica col simbolo $+\partial A$.

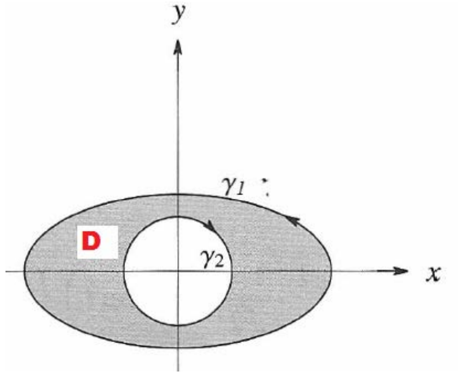
In figura è rappresentato un insieme $A$ la cui frontiera è l'unione di due curve $\gamma_1$, $\gamma_2$. $\partial A=\gamma_1\cup\gamma_2=\gamma_1^+\cup\gamma_2^-$
L'orientamento positivo di $\partial A$ corrisponde al verso antiorario della curva $\gamma_1=\gamma_1^+$ ed al verso orario della curva $\gamma_2=\gamma_2^-$.




Esempio numerico

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+4y^2\le 1, 8x^2+8y^2\ge 1\right\}$$

Si può notare che la frontiere dell'insieme **D** è composta da due contorni, l'ellisse $\gamma_1=\gamma_1^+$ e la circonferenza $\gamma_2=\gamma_2^-$.

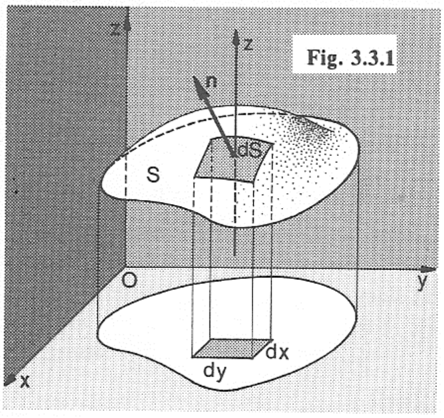


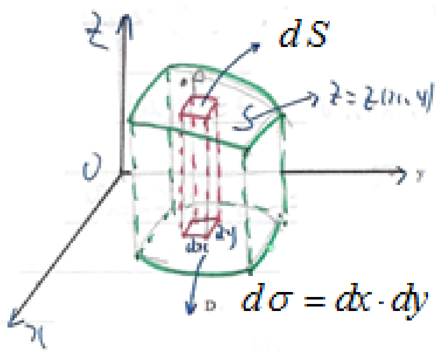
## Teorema di Stokes

Il teorema di Stokes è una estensione del teorema di Green nel piano in forma vettoriale a superfici e curve in tre dimensioni, cioè nello spazio $\mathbb{R}^3$.

Supponiamo che la superficie **S** abbia equazione $z = f(x,y)$ [3] e questa funzione sia definita e continua in tutti i punti del dominio normale **D**, proiezione ortogonale di **S** sul piano $Oxy$. Consideriamo nel piano $Oxy$ e nel dominio **D** un elemento infinitesimo di superficie $d\sigma = dx\,dy$

Questa superficie infinitesima $d\sigma$, proiettata ortogonalmente su **S**, dà l'elemento infinitesimo di superficie $dS$. Se $\vec{n}$ è il versore normale positivo a $dS$ in un suo punto interno $P(x,y,z)$, la relazione che intercorre tra $dS$ e $d\sigma$ è: $d\sigma = dx\,dy = dS \cdot \cos\widehat{nz} = dS \cdot \cos\gamma$




Sia $\vec{v}(P) = \vec{v}(x,y,z) = X(x,y,z)\cdot\vec{i} + Y(x,y,z)\cdot\vec{j} + Z(x,y,z)\cdot\vec{k}$ un campo vettoriale definito nell'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Sia $S$ una porzione di superficie regolare dotata di bordo regolare contenuta in $A$ e sia $\vec{n}$ il versore normale positivo di $S$. Si chiama flusso del campo vettoriale $\vec{v}$ attraverso la superficie orientata $S$ dal suo versore positivo $\vec{n}$, il seguente integrale superficiale: $\Phi_S(\vec{v}) = \int_S (\vec{v} \times \vec{n})\,dS = \iint_D (\vec{v} \times \vec{N})\,dx\,dy$

Per definire il flusso occorrono: (1) una superficie regolare $S$ (2) un campo vettoriale $\vec{v}$ definito in tutti i punti di $S$ (3) una scelta del versore normale $\vec{n}$ su $S$.

Se il versore normale $\vec{n}$ è orientato verso l'esterno della superficie $S$ si parla di flusso uscente attraverso $S$.

Per una rappresentazione parametrica di $S$ del tipo $\begin{cases} x=x(u,\mathrm{v}) \\ y=y(u,\mathrm{v}) \\ z=z(u,\mathrm{v}) \end{cases} \quad (u,\mathrm{v})\in D\subset\mathbb{R}^2$ abbiamo:

$$\Phi_S(\vec{\mathrm{v}})=\int_S(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{n})d\sigma=\iint_D\left(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{N}\right)du\,d\mathrm{v}$$

dove $D$ è la proiezione ortogonale della superficie $S$ su piano $Ou\mathrm{v}$ ed $\vec{N}$ è un vettore normale alla superficie $S$, precisamente è il vettore:

$$\vec{N}=N_x\cdot\vec{i}+N_y\cdot\vec{j}+N_z\cdot\vec{k}=\left(N_x,N_y,N_z\right) \qquad N_x=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix} \quad N_y=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix} \quad N_z=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix}$$

$\vec{n}=\left(n_x,n_y,n_z\right)=\dfrac{\vec{N}}{\left\|\vec{N}\right\|}$ = versore normale positivo della superficie $S$

Si può dimostrare che $\left\|\vec{N}\right\|=d\sigma$ e quindi si ha che: $(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{n})d\sigma=\left(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{N}\right)du\,d\mathrm{v}$

Riportiamo alcune notazioni usati spesso in questi argomenti.

$$\vec{\varphi}_u=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\vec{k}=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right) \qquad \vec{\varphi}_{\mathrm{v}}=\frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}}\cdot\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}\cdot\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\cdot\vec{k}=\left(\frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}},\frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}},\frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\right)$$

$$\vec{\varphi}_u\wedge\vec{\varphi}_{\mathrm{v}}=\vec{N}=N_x\cdot\vec{i}+N_y\cdot\vec{j}+N_z\cdot\vec{k}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}\\ \frac{\partial z}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix}\cdot\vec{i}+\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}}\\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

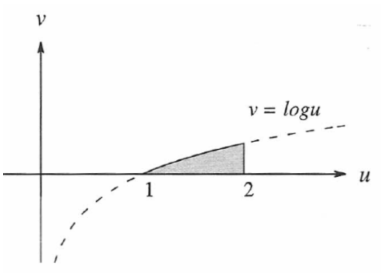
La direnzione del vettore è la direzione normale alla superficie $S$ in un suo generico punto. Ne consegue che il versore normale $\vec{n}$ in un generico punto di $S$ è: $\vec{n}=\dfrac{\vec{\varphi}_u\wedge\vec{\varphi}_{\mathrm{v}}}{\left\|\vec{\varphi}_u\wedge\vec{\varphi}_{\mathrm{v}}\right\|}=\dfrac{\vec{N}}{\left\|\vec{N}\right\|}$

Il versore $\vec{n}$ è chiamato versore normale positivo e la "faccia" della superficie $S$ rivolta nel verso di $\vec{n}$ è detta faccia positiva di $S$ ed è indicata col simbolo $+S$.

Calcolare il lusso uscente attraverso la superficie $S$ del campo vettoriale:

$$\vec{\mathrm{v}}(x,y,z)=x\cdot\vec{i}+\frac{y}{y+z}\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$$

dove $S$ è la superficie di equazioni parametriche: $S:\begin{cases}x=u\cdot e^{\mathrm{v}}\\ y=\mathrm{v}\\ z=u-\mathrm{v}\end{cases}$ essendo $(u,\mathrm{v})\in D$, dominio disegnato nella seguente figura:




Sia $\vec{\varphi}_u\wedge\vec{\varphi}_{\mathrm{v}}=\vec{N}=N_x\cdot\vec{i}+N_y\cdot\vec{j}+N_z\cdot\vec{k}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}\\ \frac{\partial z}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix}\cdot\vec{i}+\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}}\\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$ in versore normale alla superficie $S$ in un suo generico punto, ed $\vec{n}=\frac{\vec{\varphi}_u\wedge\vec{\varphi}_{\mathrm{v}}}{\left\|\vec{\varphi}_u\wedge\vec{\varphi}_{\mathrm{v}}\right\|}=\frac{\vec{N}}{\left\|\vec{N}\right\|}$ il suo versore.

$$N_x=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}\\ \frac{\partial z}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1 \qquad N_y=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ e^{\mathrm{v}} & u\cdot e^{\mathrm{v}}\end{vmatrix}=(1+u)e^{\mathrm{v}}$$

$$N_z=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}}\\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{\mathrm{v}} & u\cdot e^{\mathrm{v}}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=e^{\mathrm{v}} \qquad \vec{N}=-\vec{i}+(1+u)e^{\mathrm{v}}\cdot\vec{j}+e^{\mathrm{v}}\cdot\vec{k}=\left(-1,(1+u)e^{\mathrm{v}},e^{\mathrm{v}}\right)$$

La norma di $\vec{N}$ è: $\left\|\vec{N}\right\|=\sqrt{1+(1+u)^2\cdot e^{2\mathrm{v}}+e^{2\mathrm{v}}}=\sqrt{1+2e^{2\mathrm{v}}+u^2e^{2\mathrm{v}}+2ue^{2\mathrm{v}}}$

Per la superficie parametrizzata, si ha che:

$$\vec{\varphi}_u=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\vec{k}=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\left(e^{\mathrm{v}},0,1\right)$$

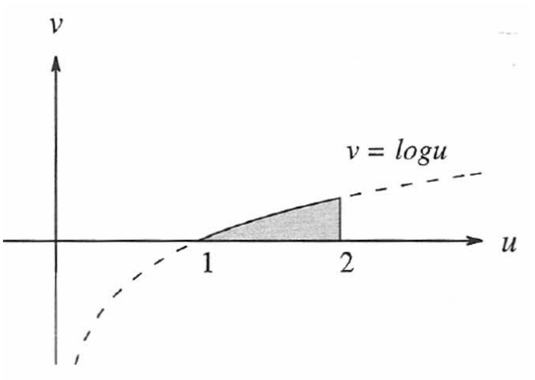
$$\vec{\varphi}_{v}=\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\vec{k}=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\left(u\cdot e^{v},1,-1\right)$$

$$\vec{v}=\left(x,\frac{y}{y+z},z\right)=\left(u\cdot e^{v},\frac{v}{u},u-v\right)\qquad \vec{N}=\left(-1,e^{v}+ue^{v},e^{v}\right)$$

$$\vec{v}\times\vec{N}=\left(u\cdot e^{v},\frac{v}{u},u-v\right)\times\left(-1,e^{v}+ue^{v},e^{v}\right)=\frac{v}{u}e^{v}\qquad \left(\vec{v}\times\vec{n}\right)d\sigma=\left(\vec{v}\times\vec{N}\right)du\,dv=\frac{v}{u}e^{v}\,du\,dv$$

Osservando che il dominio $D$ è normale rispetto all'asse $u$ il flusso richiesto è:

$$\Phi_S\left(\vec{v}\right)=\int_S\left(\vec{v}\times\vec{n}\right)d\sigma=\iint_D\left(\vec{v}\times\vec{N}\right)du\,dv=\iint_D\frac{v}{u}\cdot e^{v}\,du\,dv=\int_1^2\frac{1}{u}du\int_0^{\ln u}v\cdot e^{v}dv$$




Integrando per parti otteniamo: $\int v\cdot e^{v}dv=\left(v-1\right)e^{v}+C$ $\qquad\int_0^{\ln u}v\cdot e^{v}dv=1-u-u\cdot\ln u$

$$\int\ln u\cdot du=-u-\ln u+K\qquad \Phi_S\left(\vec{v}\right)=\int_1^2\frac{1-u-u\cdot\ln u}{u}du=\int_1^2\frac{du}{u}-\int_1^2du+\int_1^2\ln u\cdot du$$

$$\Phi_S\left(\vec{v}\right)=\ln 2-1+\left[-u+u\cdot\ln u\right]_1^2=\ln 2-\cancel{1}-2+2\ln 2+\cancel{1}=3\ln 2-3$$

# Un altro procedimento per calcolare il flusso di un campo vettoriale

## Teorema della divergenza o teorema di Gauss o teorema di Green nello spazio

Collega il flusso $\Phi_S(\vec{\mathrm{v}})$ di un campo vettoriale $\vec{\mathrm{v}}=(X,Y,Z)$ attraverso una superficie gobba **S** all'integrale triplo della divergenza del campo vettoriale $\vec{\mathrm{v}}=(X,Y,Z)$ esteso alla regione **V** individuata dalla superficie **S**.

$$\Phi_S(\vec{\mathrm{v}})=\int_S(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{n})dS=\iint_D(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{N})du\,d\mathrm{v}=\iiint_V\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{v}}\,dx\,dy\,dz=\iiint_V\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

Con parole diverse possiamo dire che il teorema della divergenza nello spazio riconduce un integrale triplo esteso ad un dominio $V\subset R^3$ all'integrale superficiale esteso alla frontiera **S** di **V**.

Sia $\vec{\mathrm{v}}$ un campo vettoriale dello spazio a componenti $(X,Y,Z)$ nel dominio regolare **V**, chiusura di un aperto di $R^3$ limitato e connesso, con frontiera **S** costituita da una superficie regolare.

Sotto queste ipotesi l'integrale triplo della divergenza di un campo vettoriale $\vec{\mathrm{v}}=(X,Y,Z)$ esteso al dominio **V** è uguale al flusso del vettore $\vec{\mathrm{v}}=(X,Y,Z)$ uscente dalla frontiera **S** del dominio **V**.

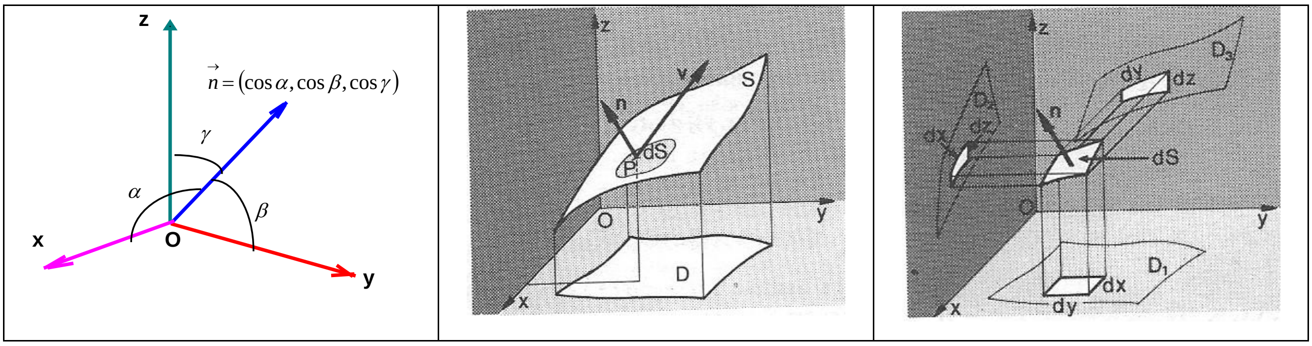
**V** = volume delimitato dalla superficie gobba **S**

**S** = frontiera del dominio **V**

## Teorema della divergenza nello spazio

**Il flusso di un campo vettoriale $\vec{\mathrm{v}}$ attraverso una superficie gobba chiusa $S$ nella direzione del versore $\vec{n}$ normale esterno è uguale all'integrale triplo della divergenza del campo vettoriale $\vec{\mathrm{v}}$ lungo il dominio spaziale $V\subset\mathbb{R}^3$ individuato dalla superficie $S$.**

## Un terzo modo di calcolare il flusso di un campo vettoriale




Sia $S$ una superficie gobba di equazione $F(x,y,z)=0$. Sia $\vec{v}=(X,Y,Z)$ un vettore applicato in ogni punto della superficie $S$. Sotto queste ipotesi è definito il seguente prodotto scalare

$$(\vec{v}\times\vec{n})\,dS = X\cdot\cos\alpha\,dS + Y\cdot\cos\beta\,dS + Z\cdot\cos\gamma\,dS$$

Esiste l'integrale di superficie del prodotto scalare $(\vec{v}\times\vec{n})$ che rappresenta il flusso del campo vettoriale $\vec{v}=(X,Y,Z)$ uscente dalla superficie $S$ bordo del volume $V$.

$$\Phi_S(\vec{v})=\int_S(\vec{v}\times\vec{n})dS=\iint_D(\vec{v}\times\vec{N})\,dx\,dy=\iint_S(X\cdot\cos\alpha+Y\cdot\cos\beta+Z\cdot\cos\gamma)\,dS$$

$$\iint_S Z\cdot\cos\gamma\,dS=\iint_{S_{Oxy}} Z\cdot dx\,dy=0 \qquad \Phi_S(\vec{v})=\iint_S X\cdot\cos\alpha\,dS+\iint_S Y\cdot\cos\beta\,dS+\iint_S Z\cdot\cos\gamma\,dS$$

con $dS$ elemento infinitesimo della superficie $S$ e $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ sono i coseni direttori del versore $\vec{n}$ normale positivo della superficie $S$.

Supponiamo che la superficie $S$ venga incontrata in un solo punto da ogni parallela ad uno dei tre assi coordinati e siano $D_1=S_{Oxy}$, $D_2=S_{Oxz}$, $D_3=S_{Oyz}$ le proiezioni ortogonali rispettivamente sui tre piani $Oxy\,(z=0)$, $Oxz\,(y=0)$, $Oyz\,(x=0)$. Naturalmente per utilizzare i domini $D_1=S_{Oxy}$, $D_2=S_{Oxz}$, $D_3=S_{Oyz}$ di $R^2$ dobbiamo potere esplicitare rispetto alle variabili $x,y,z$ l'equazione $F(x,y,z)=0$ della superficie gobba $S$.

Noi sappiamo che $\cos\alpha\,dS=dy\,dz$, $\cos\beta\,dS=dx\,dz$, $\cos\gamma\,dS=dx\,dy$ e che abbiamo:

in $D_1=S_{Oxy}$ $\quad F(x,y,z)=0 \;\Rightarrow\; z=f(x,y)$, in $D_2=S_{Oxz}$ $\quad F(x,y,z)=0 \;\Rightarrow\; y=g(x,z)$, in $D_3=S_{Oyz}$ $\quad F(x,y,z)=0 \;\Rightarrow\; x=h(y,z)$.

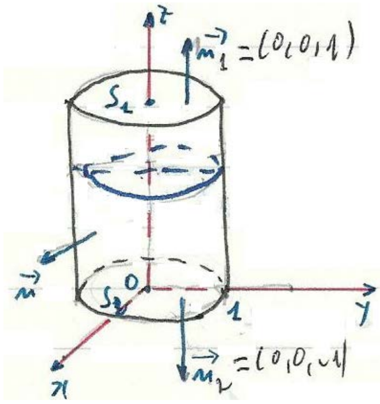
Si dimostra che: $\Phi_S(\vec{v}) = \iint_{S_{Oxy}} Z \cdot dx\,dy + \iint_{S_{Oxz}} Y \cdot dx\,dz + \iint_{S_{Oyz}} X \cdot dy\,dz$

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_{S_{Oxy}} Z\left[x, y, f(x,y)\right] \cdot dx\,dy + \iint_{S_{Oxz}} Y\left[x, g(x,z), z\right] \cdot dx\,dz + \iint_{S_{Oyz}} X\left[h(y,z), y, z\right] \cdot dy\,dz$$

$S$ = superficie gobba frontiera (bordo) del volume $V$, cioè:

$V$ =volume avente come bordo (frontiera) la superficie gobba $S$.

Se la superficie $S$ contiene una parte di superficie cilindrica le cui generatrici sono parallele all'asse $Oz$, allora è nullo l'integrale $\iint_S Z \cdot \cos\gamma\, d\,S = \iint_{S_{Oxy}} Z \cdot dx\,dy = 0$ in quanto risulta:




$$\cos\gamma = \cos\left(\vec{n} \hat{,} \vec{z}\right) = \cos\left(\vec{i} \hat{,} \vec{z}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

**Teorema del rotore o di Stokes**: Se la superficie $S$ ed il suo bordo $\partial S$ sono orientati coerentemente, la circuitazione del vettore $\vec{v}$ lungo il bordo $\partial S$ uguaglia il flusso del rotore di $\vec{v}$ attraverso la superficie $S$. In simboli abbiamo: $\int_{\partial s}(\vec{v}\times\vec{t})d\,s=\int_S\left[\left(rot\,\vec{v}\times\vec{n}\right)\right]d\,\sigma$

ovvero, in forma scalare:

$$\int_{+\partial S} X\,d\,x+Y\,d\,y+Z\,d\,z=\int_{+S}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)d\,y\,d\,z+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)d\,x\,d\,z+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)d\,x\,d\,y$$

$\int_{+\partial s}(\vec{v}\times\vec{t})d\,s=\oint_{+\partial s}(\vec{v}\times\vec{t})d\,s=\int_{+\partial S} X\,d\,x+Y\,d\,y+Z\,d\,z$ rappresenta la circuitazione del campo vettoriale $\vec{v}$ lungo il bordo della superficie $S$.

A parole abbiamo: L'integrale curvilineo della forma differenziale $\omega=X\,d\,x+Y\,d\,y+Z\,d\,z$ lungo il bordo $\partial S$ (orientato positivamente) è uguale all'integrale di superficie tra il vettore $rot\,\vec{v}$ ed il versore $\vec{n}$ normale ad $S$. $\vec{v}=X(x,y,z)\cdot\vec{i}+Y(x,y,z)\cdot\vec{j}+Z(x,y,z)\cdot\vec{k}$

$$rot\,\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cdot\vec{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cdot\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cdot\vec{k}$$

**Teorema di Stokes nello spazio**: Il flusso del rotore $\int_S\left[\left(rot\,\vec{v}\times\vec{n}\right)\right]d\,\sigma$ di un campo vettoriale $\vec{v}$ attraverso una superficie sghemba $S$ è uguale alla circuitazione $\oint_{\partial s}(\vec{v}\times\vec{t})d\,s$ del campo vettoriale $\vec{v}$ lungo il contorno $\gamma=\partial S$.

$$\int_S\left[\left(rot\,\vec{v}\times\vec{n}\right)\right]d\,\sigma=\int_{+S}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)d\,y\,d\,z+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)d\,x\,d\,z+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)d\,x\,d\,y$$

$$\int_S\left[\left(rot\,\vec{v}\times\vec{n}\right)\right]d\,\sigma=\int_{+S}\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\,\sigma$$

$$\iint_S \left[\left(rot\,\vec{v}\times\vec{n}\right)\right] d\,\sigma = \int_{+\partial S} X\,d\,x + Y\,d\,y + Z\,d\,z$$

$+\partial S$ = bordo della superficie $S$ e $\cos\alpha = \cos(\vec{n},\vec{x})$ ; $\cos\beta = \cos(\vec{n},\vec{y})$ , $\cos\gamma = \cos(\vec{n},\vec{z})$ sono i coseni direttori del versore $\vec{n}$ normale ad $S$ ed orientato verso l'esterno.

## Teorema della divergenza nello spazio

**Il flusso di un campo vettoriale $\vec{v}$ attraverso una superficie gobba chiusa $S$ nella direzione del versore $\vec{n}$ normale esterno è uguale all'integrale triplo della divergenza del campo vettoriale $\vec{v}$ lungo il dominio spaziale $A \subset \mathbb{R}^3$ individuato dalla superficie $S$ .**

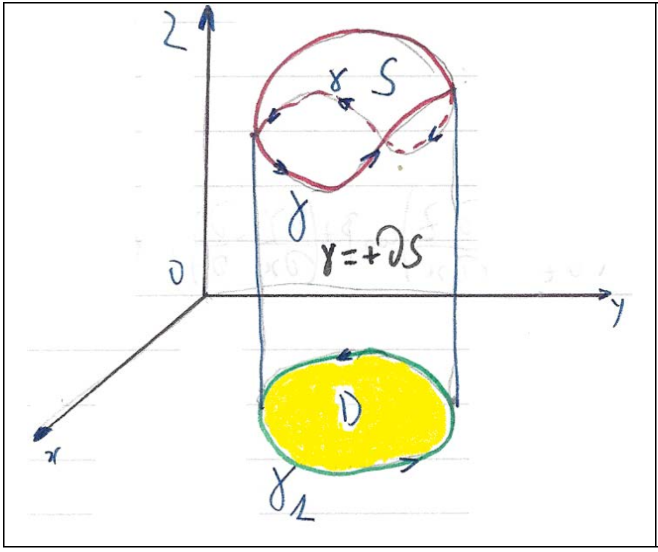
In simboli abbiamo:

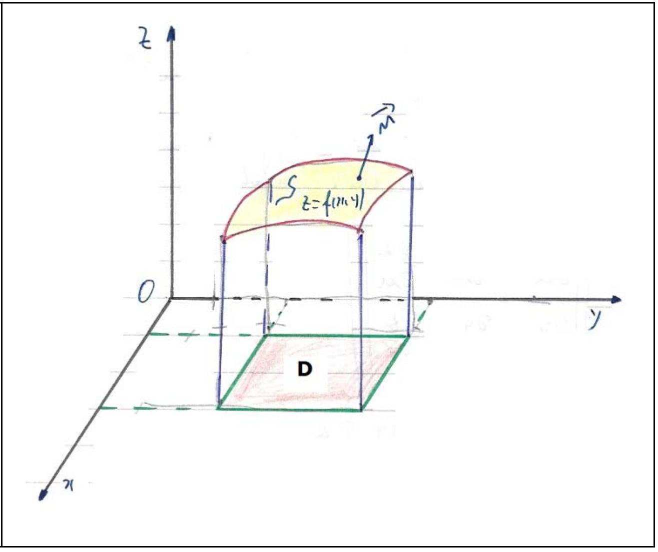
$$\int_{f_r(A)} \left(\vec{v}\times\vec{n}\right) d\,\sigma = \iiint_A \left(\operatorname{div}\vec{v}\right) dx\,dy\,dz = \iiint_A \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \int_{f_r(A)} X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy$$

con $\vec{n}$ versore normale esterno a $f_r(A)$.

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(x,y,z) = X(x,y,z)\cdot\vec{i} + Y(x,y,z)\cdot\vec{j} + Z(x,y,z)\cdot\vec{k}$$

### Ulteriori considerazioni sul flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie




$$d\sigma = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} \cdot du\, dv = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dx\, dy$$

Il dominio $D$ è la proiezione sul piano $Oxy$ della superficie gobba $S$. Il dominio $C$ del piano $Ouv$ è il corrispondente del dominio $D$ del piano $Oxy$.

Sia $\vec{v}(P) = \vec{v}(x,y,z) = X(x,y,z)\cdot\vec{i} + Y(x,y,z)\cdot\vec{j} + Z(x,y,z)\cdot\vec{k}$ un campo vettoriale ed $S$ una superficie regolare rappresentata dalle equazioni parametriche $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in C \subset \mathbb{R}^2$ o dalla equazione cartesiana: $z = z(x,y) = f(x,y)$.

Sia $\vec{n}$ il versore della normale positiva in un generico punto della superficie $S$. I coseni direttori del versore $\vec{n}$ sono:

$$\cos\alpha = \cos(\vec{n},\vec{x}) = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{J_1}{\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}} \qquad \cos\beta = \cos(\vec{n},\vec{y}) = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{J_2}{\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}}$$

$$\cos\gamma = \cos(\vec{n},\vec{z}) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{J_3}{\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}} \quad \text{con} \quad p = \frac{\partial f}{\partial x} \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$J_1, J_2, J_3$ sono i minori, presi con i segni alternati, della matrice Jacobiana $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}} \end{bmatrix}$

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}} \end{vmatrix} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}} - \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}} \frac{\partial z}{\partial z} \qquad J_2 = -\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}} & \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}} - \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k} = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \vec{i} + \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{n} = \frac{J_1}{\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}} \cdot \vec{i} + \frac{J_2}{\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}} \cdot \vec{j} + \frac{J_3}{\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{n} = \left( \frac{J_1}{\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}}, \frac{J_2}{\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}}, \frac{J_3}{\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}} \right) = \left( \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right)$$

$$\Phi_S(\vec{\mathrm{v}}) = \int_S (\vec{\mathrm{v}} \times \vec{n}) d\sigma = \iint_D (X \cdot \cos\alpha + Y \cdot \sin\beta + Z \cdot \cos\gamma) d\sigma$$

$$\Phi_S(\vec{\mathrm{v}}) = \int_S (\vec{\mathrm{v}} \times \vec{n}) d\sigma = \iint_C \left[ X(u,\mathrm{v}) \cdot J_1 + Y(u,\mathrm{v}) \cdot J_2 + Z(u,\mathrm{v}) \cdot J_3 \right] du\, d\mathrm{v} = \iint_D (-p \cdot X - q \cdot Y \cdot \sin\beta + Z) dx\, dy$$

## Versore $\vec{n}$ normale aduna superficie gobba $S$

In alcune questioni occorre conoscere le componenti (coseni direttori) del versore $\vec{n}$ normale ad una superficie gobba $S$. Se la superficie $S$ è data mediante la rappresentazione parametrica $\begin{cases} x = x(u,\mathrm{v}) \\ y = y(u,\mathrm{v}) \\ z = z(u,\mathrm{v}) \end{cases}$ $(u,\mathrm{v}) \in C \subset \mathbb{R}^2$ abbiamo: $\vec{n} = n_x \cdot \vec{i} + n_y \cdot \vec{j} + n_z \cdot \vec{k} = \vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$

$$\vec{n} = \cos(\vec{n},\vec{x}) \cdot \vec{i} + \cos(\vec{n},\vec{y}) \cdot \vec{j} + \cos(\vec{n},\vec{z}) \cdot \vec{k} = \frac{\pm J_1}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}} \cdot \vec{i} + \frac{\pm J_2}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}} \cdot \vec{j} + \frac{\pm J_3}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}} \cdot \vec{k}$$

Il doppio segno scaturisce dal fatto che per ogni punto $P \in S$ possiamo avere due versori $\vec{n}$, uno positivo e l'altro negativo. Per quello positivo (negativo) prendiamo tutti e tre i segni positivi (negativi).

Se la superficie $S$ ha equazione cartesiana $z = z(x,y) = f(x,y)$ abbiamo:

$$\vec{n} = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \vec{i} + \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \vec{k} \qquad \text{con} \quad p = \frac{\partial f}{\partial x} \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

In questo caso il versore normale $\vec{n}$ è orientato concordemente col semiasse positivo dell'asse $z$.

## Potenziale vettore

Assegnato il campo vettoriale $\vec{E} = (X, Y, Z)$ consideriamo la forma differenziale

$$\boldsymbol{\omega(x,y,z) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}$$

Abbiamo visto, che a determinate condizioni, la forma differenziale $\boldsymbol{\omega(x,y,z)}$ è esatta. Quando ciò si verifica è possibile trovare una funzione scalare $\mathbf{U(x,y,z)}$ [ $f(x,y,z)$ ] tale che risulti:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = X \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = Y \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = Z$$

La funzione scalare $\mathbf{U(x,y,z) = f(x,y,z)}$ si chiama potenziale scalare del campo vettoriale $\vec{E} = (X, Y, Z)$ e si dice pure che il campo vettoriale $\vec{E} = (X, Y, Z)$ deriva da un potenziale $U(x, y, z)$. Ne consegue che la circuitazione di $\vec{E} = (X, Y, Z)$ lungo una qualsiasi linea chiusa è nulla:

$$C_\gamma(\vec{\mathrm{E}}) = \oint_\gamma \vec{\mathrm{E}} \times d\overrightarrow{P} = \oint_\gamma \vec{\mathrm{E}} \times \vec{\tau} \cdot ds = \oint_\gamma X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz$$

Risulta pure che $\mathbf{rot\,\vec{E} = 0}$ in ogni punto del dominio $V \subset R^3$.

Adesso ci poniamo il problema di trovare un campo vettoriale $\vec{F} = (A, B, C)$ tale che risulti:

$$rot\,\vec{F} = \vec{E}$$

Cioè note le componenti $(X, Y, Z)$ del campo vettoriale $\vec{E}$ trovare le componenti $(A, B, C)$ del campo vettoriale $\vec{F}$. Si tratta di risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali a derivate parziali dove l'incognita è una funzione di più variabili. Se risulta $\mathbf{div\,\vec{E} = 0}$ allora esiste il campo vettoriale $\vec{F} = (A, B, C)$ tale che sia: $\mathbf{rot\,\vec{F} = \vec{E}}$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{E}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial y} - \dfrac{\partial B}{\partial z} = X \\ \dfrac{\partial A}{\partial z} - \dfrac{\partial C}{\partial x} = Y \\ \dfrac{\partial B}{\partial x} - \dfrac{\partial A}{\partial y} = Z \end{cases}$$

Si può dimostrare che una delle tre componenti del campo vettoriale $\vec{F} = (A, B, C)$ è nulla; ad esempio possiamo scrivere $\vec{F} = (A, B, 0)$ oppure $\vec{F} = (A, 0, C)$ oppure $\vec{F} = (0, B, C)$.

$$\int_S \left(\vec{E} \times \vec{n}\right) dS = \int_S \left(rot\,\vec{F} \times \vec{n}\right) dS = \int_{\gamma=\partial S} \left(rot\,\vec{F} \times \vec{\tau}\right) ds = \int_{\gamma=\partial S} A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

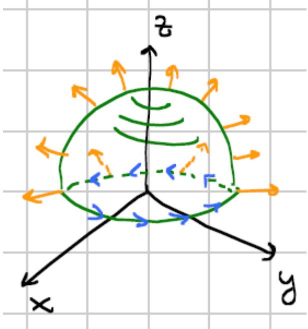
Risulta pure: ↓ ↓ ↓ ↓

**flusso** **flusso** **circuitazione** **circuitazione**

Analizziamo queste proprietà attraverso un esempio.

**Calcolare il flusso del vettore $\vec{E} = (x, z - x, y^2 - z)$ attraverso la superficie**

$$S = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + 2z^4 = 0, z \geq 0 \right\}.$$




- Calcolo il campo vettoriale $(A, B, C)$ tale che sia: $\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{E}}$

$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{E}} = \mathbf{1 + 0 - 1 = 0}$ Quindi $\vec{E} = (X, Y, Z)$ è un rotore di un campo vettoriale $\vec{F} = (A, B, C)$. Posso scegliere $\vec{F} = (A, B, 0)$ per quanto detto in precedenza, ma potrei scegliere $\vec{F} = (A, 0, C)$ oppure $\vec{F} = (0, B, C)$. In questo caso scelgo $\vec{F} = (A, B, 0)$.

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{vmatrix} = -\frac{\partial B}{\partial z} \cdot \vec{i} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \vec{j} + \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) \cdot \vec{k} = \left( -\frac{\partial B}{\partial z}, \frac{\partial A}{\partial z}, \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right)$$

$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{F}}=\vec{\mathbf{E}} \quad\Rightarrow\quad -\frac{\partial B}{\partial z}=x \quad\Rightarrow\quad \partial B=-x\partial z \quad\Rightarrow\quad \int\partial B=-\int x\partial z \quad \mathbf{B}(\mathbf{x,y,z}) = \mathbf{-xz}+\mathbf{C}_1(\mathbf{x,y})$ perché la variabile di integrazione è $\mathbf{z}$.

$\frac{\partial A}{\partial z}=z-x \quad\Rightarrow\quad \partial A=(z-x)\partial z \quad\Rightarrow\quad \int\partial A=\int(z-x)\partial z \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}(\mathbf{x,y,z})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{z}^2\,\mathbf{-xz}+\mathbf{C}_2(\mathbf{x,y})$ perché la variabile di integrazione è $\mathbf{z}$.

Adesso debbo determinare $\mathbf{C}_1(\mathbf{x,y})$ e $\mathbf{C}_2(\mathbf{x,y})$ in modo da soddisfare la terza condizione $\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}=y^2-z$ sapendo che $\mathbf{B}(\mathbf{x,y,z}) = \mathbf{-xz}+\mathbf{C}_1(\mathbf{x,y})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x,y,z})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{z}^2\,\mathbf{-xz}+\mathbf{C}_2(\mathbf{x,y})$.

$$-\cancel{z}+\frac{\partial C_1}{\partial x}-\frac{\partial C_2}{\partial y}=y^2-\cancel{z} \qquad \frac{\partial C_1}{\partial x}-\frac{\partial C_2}{\partial y}=y^2$$

Come seconda semplificazione cerco la costante $\mathbf{C}_2(\mathbf{x,y})$ dipendente solo dalla $\mathbf{x}$. Sotto questa ipotesi risulta $\frac{\partial C_2(x)}{\partial y}=0 \quad\Rightarrow\quad C_2(x)=0 \quad\Rightarrow\quad -\cancel{z}+\frac{\partial C_1}{\partial x}-\frac{\partial C_2}{\partial y}=y^2-\cancel{z} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial C_1}{\partial x}=y^2 \quad\Rightarrow$

$\partial C_1=y^2\partial x \quad\Rightarrow\quad \int\partial C_1=\int y^2\partial x \quad C_1(x,y)=xy^2$

$\mathbf{A}(\mathbf{x,y,z})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{z}^2\,\mathbf{-xz}+\mathbf{C}_2(\mathbf{x,y})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{z}^2\,\mathbf{-xz}+0=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{z}^2\,\mathbf{-xz} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{x,y,z}) = \mathbf{-xz}+\mathbf{C}_1(\mathbf{x,y})=\mathbf{-xz}+\mathbf{xy}^2$

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{F}}=\vec{\mathbf{E}} \quad\Rightarrow\quad \vec{\mathbf{F}}=\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{z}^2\,\mathbf{-xz},\mathbf{-xz}+\mathbf{xy}^2,\mathbf{0}\right)$$

Si può verificare, tramite Derive, che $\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{F}}=\left(\mathbf{x,z-x,y^2-z}\right)=\vec{\mathbf{E}}$

Volendo potevo scegliere come componente nulla la prima o la secondo al posto della terza.

Come bordo della superficie $S$ posso scegliere la circonferenza di equazione $x^2+y^2=4$ giacente sul piano orizzontale $z=0$. La sua equazione è: $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z\ =\ 0 \end{cases}$

$$\Phi_S(\vec{E})=\int_S(\vec{E}\times\vec{n})\,dS=\int_{\gamma=\partial S}A\,dx+B\,dy+C\,dz=\int_{\gamma=\partial S}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{z}^2\,\mathbf{-xz}\right)dx+\left(\mathbf{-xz}+\mathbf{xy}^2\right)dy+0\cdot dz$$

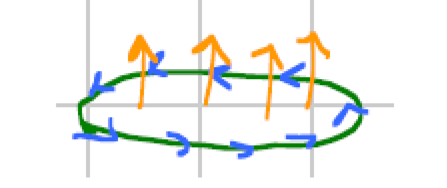
$$\Phi_S\left(\vec{E}\right)=\int_{\gamma=\partial S}(0-0)dx+\left(-0+\mathbf{xy}^2\right)dy+0\cdot dz=\int_{\gamma=\partial S}\mathbf{xy}^2\,dy$$

Introduco le coordinate polari: $\begin{cases} x=2\cos\vartheta \\ y=2\sin\vartheta \end{cases}$ $\quad 0\le\vartheta\le2\pi \quad$ $\begin{cases} d\,x=-2\sin\vartheta\, d\vartheta \\ d\,y=2\cos\vartheta\, d\vartheta \end{cases}$

$$\Phi_S\left(\vec{E}\right)=\int_{\gamma=\partial S}\mathbf{xy}^2\,\underline{d\,y}=\int_0^{2\pi}\left[2\cos\vartheta\cdot4\sin^2\vartheta\right]\cdot\underline{2\cos\vartheta\cdot d\,\vartheta}=16\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\cdot\cos^2\vartheta\cdot d\,\vartheta=4\int_0^{2\pi}\cos^2 2\vartheta\cdot d\,\vartheta$$

$$\Phi_S\left(\vec{E}\right)=2\int_0^{2\pi}(1+\cos4\vartheta)\cdot d\,\vartheta=2\left[\vartheta+\frac{1}{4}\sin4\vartheta\right]_0^{2\pi}=2\cdot2\pi=4\pi$$

Un altro modo per calcolare il flusso è quello di trovare una superficie più semplice di $S$ e che abbia lo stesso bordo. Posso scegliere il cerchio del piano $Oxy$ con normale $\vec{N}=(0,0,1)$



Se le superfici S ed $S_1$ hanno lo stesso bordo ($\partial S=\partial S_1$) allora il flusso del campo vettoriale $\vec{v}$ attraverso la superficie $S$ è uguale al flusso di $\vec{v}$ attraverso $S_1$.

$S_1$ può essere anche una superficie piana che si trova su uno dei tre piani coordinati.

$$\oint_S(\vec{v})=\int_S(\vec{v}\times\vec{n})\,dS=\oint_{S_1}(\vec{v})=\int_{S_1}(\vec{v}\times\vec{n})\,dS$$

Calcolare il flusso del vettore $\vec{v}=(x,\ z-y,\ y^2-z)$ attraverso la superficie $S:\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+2z^4=4;\ z\ge0\}$

$$\partial S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=4 \,,\ z=0\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{bordo della} \\ \text{superficie } S \end{array} \right.$$

In base alla definizione abbiamo:

$$\oint_S (\vec{v}) = \int_S (\vec{F} \times \vec{n})\, dS = \iint_D (\vec{v} \times \vec{n})\, dx\, dy \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i calcoli sono} \\ \text{semplificati.} \end{array} \right.$$

Invece di calcolare il flusso di $\vec{v}$ attraverso la superficie $S$, lo calcolo rispetto ad un'altra superficie $S_1$ più semplice ma che abbia lo stesso bordo. Nel caso nostro posso usare come superficie $S_1$ il cerchio del piano $O_{xy}$ di equazione $x^2+y^2 \leq 4$ la cui normale è $\vec{N}(0,0,1)$

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4 \,,\ z=0\}$$

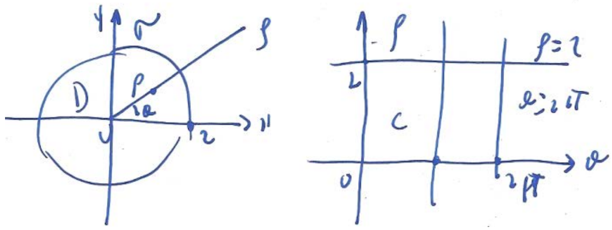
$$\oint_S (\vec{v}) = \oint_{S_1} (\vec{v}) = \int_{S_1} (\vec{v} \times \vec{n})\, dS = \iint_D (x, z-y, y^2-z) \times (0,0,1)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D (y^2 - z)\, dx\, dy = \iint_D y^2\, dx\, dy \quad \text{essendo } z=0$$

Passo dalle coordinate cartesiane a quelle polari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & 0 \le \rho \le 2 \\ y = \rho\sin\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \qquad \phi(\vec{v}) = \iint_C \rho^2 \sin^2\theta \cdot \rho \, d\rho \, d\theta =$$

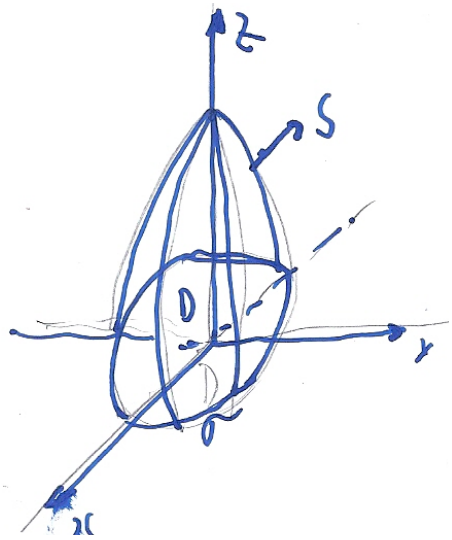
$$= \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \int_0^2 \rho^3 \, d\rho = \pi \cdot 4 = 4\pi$$




$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x \, d2x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}[2\pi] = \pi$$

$$\int_0^2 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}[\rho^4]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$$




Osservazione

La linea γ è il bordo della superficie gobba S chiusa
Volta, è il bordo del solido V.

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+2z^4 \le 4\}$ $\quad S: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+2z^4 = 4;\ z \ge 0\}$

$\Gamma: \{(x,y,z) \in R^3: x^2+y^2=4, z \geq 0\}$ $D: \{(x,y,z) \in R^3: x^2+y^2 \leq 4 ; z \geq 0\}$

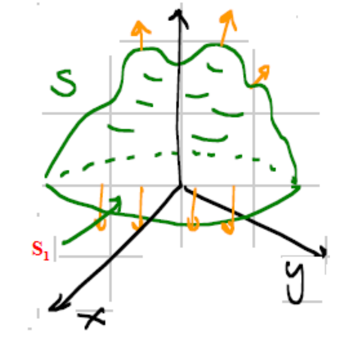
Usando il teorema della divergenza di Green-Gauss otteniamo:

$\int\limits_{S=\partial V} (\vec{E} \times \vec{n})\, d\,S = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \vec{E}\, dx\, dyy\, dz$ Con $V \subset R^3$ ed $S = \partial V$ è il bordo di $V$ orientato verso l'alto.

Questa volta però, per avere un $V$ pieno dobbiamo aggiungere la base, cioè il cerchio giacente sul piano cartesiano $Oxy$ che indico con $S_1$.

Otteniamo: $\iiint\limits_{V} \operatorname{div} \vec{E}\, dx\, dyy\, dz = \int\limits_{S} (\vec{E} \times \vec{n})\, d\,S + \int\limits_{S_1} (\vec{E} \times \vec{n})\, d\,S_1$

$\mathbf{div\,\vec{E} = 0}$ $\Rightarrow$ $0 = \int\limits_{S} (\vec{E} \times \vec{n})\, d\,S + \int\limits_{S_1} (\vec{E} \times \vec{n})\, d\,S_1$




$$\int\limits_{S} (\vec{E} \times \vec{n})\, d\,S = -\int\limits_{S_1} (\vec{E} \times (0,0,-1))\, d\,S_1 = \int\limits_{S_1} (\vec{E} \times (0,0,1))\, d\,S_1 = 4\pi$$

Questo procedimento è valido anche se $\mathbf{div\,\vec{E} \neq 0}$, solo che in questo caso posso utilizzare la formule dell'integrale triplo $\int\limits_{S=\partial V} (\vec{E} \times \vec{n})\, d\,S = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \vec{E}\, dx\, dyy\, dz$.

$S=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+2z^4=0, z\geq 0\}$

$\vec{E}=(X,Y,Z)$ $\vec{E}$ $(X,Y,Z)$ $\boldsymbol{\omega(x,y,z)}$ $\boldsymbol{\omega(x,y,z)=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz}$ $U(x,y,z)$

$rot\,\vec{E}$ $\mathbf{rot\,\vec{E}=0}$ $\mathbf{div\,\vec{E}=0}$ $\mathbf{rot\,\vec{F}=\vec{E}}$ $\vec{E}=(x,z-x,y^2-z)$

$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=X$ $\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=Y$ $\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}=Z$ $V\subset R^3$ $\vec{F}=(A,B,C)$ $\vec{F}$ $(A,B,C)$ $rot\,\vec{F}=\vec{E}$