Curve semplici del piano e dello spazio

Sia f una **funzione di variabile reale a valori vettoriali** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$

Definizione: Si definisce **curva** in $\mathbb{R}^n$ la funzione (applicazione) $f:X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, dove X è l'intervallo $[a,b]$ di retta reale.

Nello spazio ordinario, cioè nello spazio a tre dimensioni, cioè in $\mathbb{R}^3$ abbiamo:

$$f: t\in[a,b]\to f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\in\mathbb{R}^3 \qquad \textbf{[1]}$$

$$[\ \vec{f} = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k} \qquad a\le t\le b\,]$$

Nel piano, cioè nello spazio a due dimensioni, cioè in $\mathbb{R}^2$ abbiamo:

$$f: t\in[a,b]\to f\left(x(t),y(t)\right)\in R^2 \quad \textbf{[2]} \quad [\ \vec{f} = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} \qquad a\le t\le b\,]$$

Nello spazio ad n dimensioni, cioè in R^n abbiamo:

$$f: t\in[a,b]\to f\left(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\right)\in\mathbb{R}^n \qquad \textbf{[3]}$$

$$[\ \vec{f} = x_1(t)\cdot\vec{e}_1 + x_2(t)\cdot\vec{e}_2 + \cdots + x_n(t)\cdot\vec{e}_n \quad a\le t\le b\,]$$

f prende il nome di **curva** γ ad n dimensioni definita su $[a,b]$. Il **grafico** della funzione f prende il nome di **sostegno** o **traccia** della curva f. Infatti quando **t** descrive l'intervallo $[a,b]$ i valori della funzione f [1] cioè $f\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ descrivono un insieme di punti $P[x(t),y(t),z(t)]$ nello spazio a 3 dimensioni (2, n dimensioni) che costituisce il **grafico** della funzione f. Diciamo pure che:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad a\le t\le b \qquad \textbf{[4]}$$

sono le **equazioni parametriche** della nostra curva γ.

Osserviamo che per una curva di equazioni parametriche [4] si hanno infinite **rappresentazioni parametriche**. Posto infatti: $t = g(u)$ **[5]**, con $g(u)$ funzione continua nell'intervallo $[c,d]$ ed avente $[a,b]$ come codominio, otteniamo per la sua rappresentazione parametrica:

[1] Cioè le immagini della funzione f

$$\begin{cases} x = x[g(u)] = \alpha(u) \\ y = y[g(u)] = \beta(u) \\ z = z[g(u)] = \gamma(u) \end{cases} \qquad \textbf{[6]} \qquad c \le u \le d$$

Conclusione: Se *f* è una curva definita dalle equazioni parametriche

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}} \qquad a \le t \le b \qquad \textbf{[4]}$$

allora l'insieme dei punti $P[x(t), y(t), z(t)]$ dello spazio R^3 dicesi **sostegno** o **traccia** γ della curva *f*. La curva *f* è una funzione di $R \to R^3$, il **sostegno** di *f* si identifica col grafico di *f*. Nella pratica dire sostegno o traccia o curva è la stessa cosa. Le equazioni parametriche [4] inducono sulla curva *f* di sostegno γ un **orientamento** che è quello che va dal punto **A** corrispondente a $t = a$ al punto **B** corrispondente a $t = b$.

Siano: $f_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1 \qquad f_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 4s^2 \end{cases} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2}$

due curve. Esse, benché siano diverse hanno lo stesso sostegno in R^2, costituito dal grafico della funzione $y = x^2$ compreso tra i punti $O(0,0)$ e $A(1,1)$. Inoltre si può passare da un sostegno all'altro mediante il cambiamento di variabile $s = \frac{t}{2}$ oppure $t = 2s$. Due curve si dicono **parametricamente equivalenti** se hanno lo stesso **sostegno** γ. Due curve **parametricamente equivalenti** possono avere lo stesso **orientamento** cioè lo stesso verso (**versi opposti** cioè orientamenti opposti) se inducono sul sostegno γ lo stesso verso (versi opposti).

Le due seguenti curve f e g sono parametricamente equivalenti (cioè hanno lo stesso sostegno γ) ma hanno **orientamenti opposti** :

$$f : \begin{cases} x(t) = 1 + \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 & \le t \le & 2\pi \\ \downarrow & & \downarrow \\ A = (2,0) & & A = (2,0) \end{matrix}$$

f circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio $r = 1$ [$(x - 1)^2 + y^2 = 1$] percorsa in senso antiorario

$$g : \begin{cases} x(t) = 1 + \cos t \\ y(t) = -\sin t \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 & \le t \le & 2\pi \\ \downarrow & & \downarrow \\ A = (2,0) & & A = (2,0) \end{matrix}$$

g circonferenza di centro $(1{,}0)$ e raggio $r = 1$ [$(x-1)^2 + y^2 = 1$] percorsa in senso orario

Il punto $P[x(t),y(t),z(t)]$ della curva f si dice **semplice** se non corrisponde a valori distinti del parametro $t \in [a,b]$ ma corrisponde ad un solo valore di $t \in [a,b]$. Una **curva è semplice** quando ogni suo punto è **semplice**, cioè quando ogni suo punto non corrisponde a due valori distinti del parametro t. Se risulta $A \equiv P(a) \neq B \equiv P(b)$ la curva è **aperta**, se risulta $A \equiv P(a) = B \equiv P(b)$ la curva si dice **chiusa**. La curva è **regolare** quando le derivate delle funzioni [4] sono **continue** in $[a,b]$ e non si annullano contemporaneamente per nessun valore di $t \in]a,b[$. Una curva si dice **regolare a tratti** se l'intervallo $[a,b]$ può essere suddiviso in un numero finito di intervalli parziali in ognuno dei quali la curva è **regolare** .

Il **versore** $\vec{u}_o$ **tangente positivo** a γ nel punto P_o, quando le equazioni parametriche della γ sono le [4], si ottiene applicando la seguente formula:

$$\vec{u}_o = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k} = \frac{x'(t_o)}{A}\cdot\vec{i} + \frac{y'(t_o)}{A}\cdot\vec{j} + \frac{z'(t_o)}{A}\cdot\vec{k} \qquad [7]$$

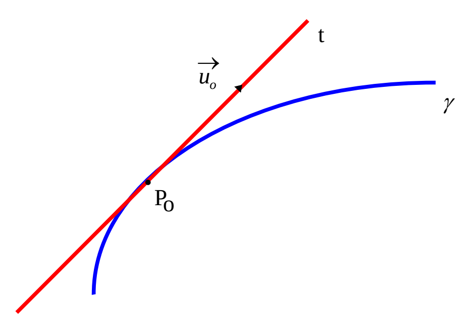
dove $A = \sqrt{[x'(t_o)]^2 + [y'(t_o)]^2 + [z'(t_o)]^2}$

e $\cos\alpha = \dfrac{x'(t)}{A}$, $\cos\beta = \dfrac{y'(t)}{A}$, $\cos\gamma = \dfrac{z'(t)}{A}$ [8] $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma =$ sono i **coseni direttori** della tangente positiva a γ in P_o. Si ha inoltre:

$$\begin{cases} x = x_o + \dfrac{x'(t_o)}{A}\cdot t \\ y = y_o + \dfrac{y'(t_o)}{A}\cdot t \\ z = z_o + \dfrac{z'(t_o)}{A}\cdot t \end{cases} \quad [9] \quad \begin{cases}\text{equazioni parametriche} \\ \text{della tangente a } \gamma \text{ in } P_o\end{cases} \quad \text{oppure} \quad [10] \quad \begin{cases} x = x_o + x'(t_o)\cdot(t-t_o) \\ y = y_o + y'(t_o)\cdot(t-t_o) \\ z = z_o + z'(t_o)\cdot(t-t_o) \end{cases}$$

$$[11] \qquad \frac{x-x_o}{x'(t_o)} = \frac{y-y_o}{y'(t_o)} = \frac{z-z_o}{z'(t_o)}$$

equazione cartesiana della tangente a γ in P_o



Sia P_o un **punto di regolarità** della curva f, cioè un punto dove almeno una delle tre derivate delle funzioni [4] sia $\neq 0$. Il piano passante per P_o ed ortogonale alla tangente in P_o prende il nome di **piano normale** alla curva nel punto P_o. Ogni retta passante per P_o e giacente nel piano normale è perpendicolare alla retta tangente e si dice **normale alla curva** in P_o. In un punto P_o di regolarità della curva esistono infinite rette normali alla curva. Indicato $P(x,y,z)$ un generico punto variabile dello spazio , l'equazione del **piano normale** a γ in P_o in forma vettoriale si scrive: $(P-P_o)\times\vec{u}_o=0$ [12]

che in forma scalare equivalente diventa: $x'(t_o)\cdot(x-x_o)+y'(t_o)\cdot(y-y_o)+z'(t_o)\cdot(z-z_o)$ [13]

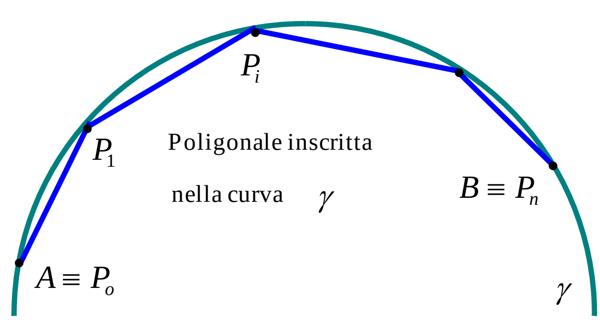
Lunghezza di un arco di curva

Sia γ un arco di curva semplice del piano o dello spazio descritto dal punto $P(t)$ al variare di t nell'intervallo $[a,b]$. Per definire la **lunghezza** $\ell(\gamma)$ di detto arco conviene fare ricorso alle poligonali inscritte. Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in **n** intervalli parziali mediante i punti $a=t_o,t_1,t_2,\cdots,t_i\cdots,t_n=b$ e diciamo P_i il punto dell'arco corrispondente al valore t_i del parametro, chiameremo **poligonale inscritta** la poligonale avente per vertici successivi i punti $P_o\equiv A,P_1,P_2,\cdots,P_i,\cdots,P_n\equiv B$ scelti in modo che P_o precede P_1 , P_1 precede P_2 e così di seguito. $A[x(a),y(a)]$ e $B[x(b),y(b)]$ sono gli estremi dell'arco.

La **curva è aperta** se $A\neq B$, la **curva è chiusa** se $A\equiv B$. Risulta:

$\ell(p) = \sum_{i=0}^{n-1}\overline{P_iP_{i+1}}$ = lunghezza di una generica poligonale inscritta nell'arco di curva AB

Di poligonali inscritte nell'arco AB se ne possono costruire infinite variando la partizione dell'intervallo $[a,b]$ ed ognuna di esse ha una ben determinata lunghezza. Chiameremo **lunghezza** $\ell(\gamma)$ dell'arco AB l'**estremo superiore** delle lunghezze delle poligonali inscritte.



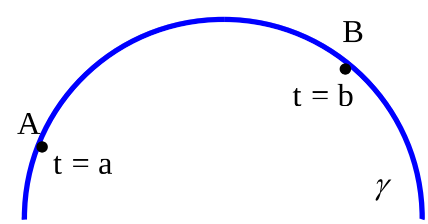
Dunque una curva semplice è rettificabile se l'insieme numerico delle lunghezze delle poligonali in essa inscritte è **limitato**.

L'estremo superiore di tale insieme numerico è allora la **lunghezza della curva**. Quando il precedente insieme numerico non ha estremo superiore finito allora la curva γ **non è rettificabile** e si dice che la sua lunghezza è infinita.

Relativamente alla **rettificabilità** di una curva sussistono i seguenti teoremi:

Teorema N°1 (di Jordan): **C.N.S.** affinché una curva γ, espressa parametricamente dalle equazioni $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad a \le t \le b$ $[4]$, sia **rettificabile** è che le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ siano a **variazione limitata** in tutto l'intervallo $[a, b]$.

Teorema N°2 (di Darbou): L'estremo superiore dell'insieme delle lunghezze delle poligonali inscritte in una curva γ è anche il limite della lunghezza di una poligonale generica inscritta quando la lunghezza massima dei lati della poligonale tende a zero.



Lunghezza di un arco di curva piana

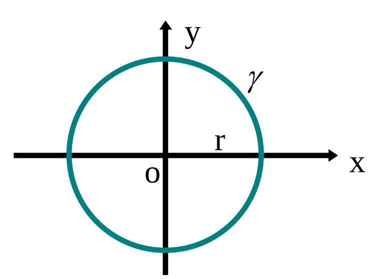
$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \le t \le b$ **[4]**

$$\lambda = L = \ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \cdot dt \qquad [15]$$

$dx = x'(t) \cdot dt \quad , \quad dy = y'(t) \cdot dt$

$$\lambda = L = \ell(\gamma) = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Calcolare la lunghezza della circonferenza di raggio r



$\gamma : \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi \quad \begin{cases} x' = -r\sin t \\ y = r\cos t \end{cases}$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} \cdot dt = \int_0^{2\pi} r \cdot dt = r[t]_0^{2\pi} = 2\pi r$$

$\gamma : y = f(x) \quad a \le x \le b$

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx \qquad [16]$$

Se la curva γ è assegnata in **coordinate polari** mediante l'equazione $\rho = \rho(\vartheta)$ con $\rho(\vartheta)$ e la sua derivata prima funzioni continue per $\vartheta_1 \le \vartheta \le \vartheta_2$, abbiamo:

$$\ell(\gamma) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{[\rho(\vartheta)]^2 + [\rho'(\vartheta)]^2} \cdot d\vartheta \qquad [17]$$

$\gamma\ :\ \rho\ =\ \rho(\vartheta)\ ,\ \vartheta_1\ \le\ \vartheta\ \le\ \vartheta_2\quad \begin{cases} x\ =\ \rho\cos\vartheta \\ y\ =\ \rho\sin\vartheta \end{cases}$ per il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari

$$dt\ =\ d\vartheta\ \ ,\ x'(\vartheta)\ =\ \rho'(\vartheta)\cdot\cos\vartheta\ -\ \rho(\vartheta)\cdot\sin\vartheta\ ,\ y'(\vartheta)\ =\ \rho'(\vartheta)\cdot\cos\vartheta\ +\ \rho(\vartheta)\cdot\cos\vartheta$$

$$[x'(\vartheta)]^2\ +\ [y'(\vartheta)]^2\ =\ [\rho(\vartheta)]^2\ +\ [\rho'(\vartheta)]^2$$

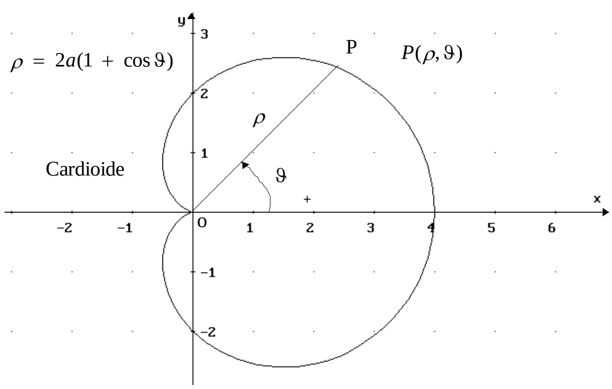
Calcolare la lunghezza della cardioide assegnata mediante l'equazione polare

$$\rho=2a(1+\cos\vartheta)\qquad \text{con}\qquad 0\ \le\ \vartheta\ \le\ 2\pi\qquad a\ >\ 0$$

Osservato che la curva è simmetrica rispetto all'asse polare, ricordato che $\rho'(\vartheta)=-2a\sin\vartheta$

abbiamo: $\ell=2\cdot\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2(1+\cos\vartheta)^2+4a^2\sin^2\vartheta}\cdot d\vartheta=8a\cdot\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}\cdot d\vartheta=8a\cdot\int_0^{\pi}\cos\frac{\vartheta}{2}\cdot d\vartheta$

$$\ell=16a\cdot\int_0^{\pi}\cos\frac{\vartheta}{2}\cdot d\frac{\vartheta}{2}=16a\left[\sin\frac{\vartheta}{2}\right]_0^{\pi}=16a$$



- Se la curva γ è assegnata mediante l'equazione $F(x,y)\ =\ 0$ e sono soddisfatte le condizioni del **teorema del Dini**, per cui esiste una funzione $y\ =\ f(x)$ tale che risulti $y'(x)\ =\ -\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

abbiamo: $$\lambda=L=\ell(\gamma)=\int_a^b\sqrt{1+\left[-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\right]^2}\cdot dx=\int_a^b\frac{\sqrt{F_x^2+F_x^2}}{F_y}\cdot dx\qquad[18]$$

Lunghezza di un arco di curva sghemba dello spazio $\mathbb{R}^3$

$\gamma\ :\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}\quad a\ \le\ t\ \le\ b$ **[4]** $\quad\lambda=L=\ell(\gamma)=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\cdot dt\qquad[14]$

$$dx=x'(t)\cdot dt\quad,\quad dy=y'(t)\cdot dt\quad,\quad dz=z'(t)\cdot dt$$

$$\lambda = L = \ell(\gamma) = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

- Se la curva γ di $\mathbb{R}^3$ è assegnata mediante le equazioni: $\begin{cases} y = p(x) \\ z = g(x) \end{cases}$ $\quad a \le x \le b$

con $p(x)$ e $g(x)$ funzioni definite e continue nell'intervallo $[a, b]$, assieme alle loro derivate prime $p'(x)$ e $g'(x)$, allora la lunghezza $\lambda = L = \ell$ della curva sghemba γ di estremi A e B è data da:

$$\lambda = L = \ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [p'(x)]^2 + [g'(x)]^2} \cdot dx \qquad [19]$$

Dire che la curva gobba γ è assegnata mediante le equazioni $y = p(x)$, $z = g(x)$ significa affermare che la curva sghemba γ è assegnata come intersezione dei cilindri di equazione $y = p(x)$, $z = g(x)$.

La curva sghemba γ è assegnata mediante le sue **equazioni polari** nello spazio $\mathbb{R}^3$

$$\gamma : \begin{cases} x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\vartheta \end{cases} \quad \begin{cases} \rho \ge 0 \\ 0 \le \vartheta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \quad \lambda = L = \ell(\gamma) = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

$$\begin{cases} dx = (\sin\vartheta \cdot \cos\varphi) \cdot d\rho - \rho(\sin\vartheta \cdot \sin\varphi) \cdot d\varphi + \rho(\cos\vartheta \cdot \cos\varphi) \cdot d\vartheta \\ dy = (\sin\vartheta \cdot \sin\varphi) \cdot d\rho + \rho(\sin\vartheta \cdot \cos\varphi) \cdot d\varphi + \rho(\cos\vartheta \cdot \sin\varphi) \cdot d\vartheta \\ dz = (\cos\vartheta) \cdot d\rho - \rho(\sin\vartheta) \cdot d\vartheta \end{cases}$$

Elevando al quadrato, sommando e semplificando, otteniamo:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 \cdot (d\vartheta)^2 + \rho^2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot (d\varphi)^2$$

$$\lambda = L = \ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2 \cdot (d\vartheta)^2 + \rho^2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot (d\varphi)^2}$$

Se poi risulta: $\rho = \rho(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ abbiamo:

$d\rho = \rho'(t) \cdot dt$, $d\vartheta = \vartheta'(t) \cdot dt$, $d\varphi = \varphi'(t) \cdot dt$ e quindi:

$$\lambda = L = \ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[\rho'(t)]^2 + [\rho(t)]^2 \cdot [\vartheta'(t)]^2 + [\rho(t)]^2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot [\varphi'(t)]^2} \cdot dt$$

ρ =raggio vettore $\quad \vartheta$ =longitudine $\quad \varphi$ =colatitudine

La curva sghemba γ è assegnata mediante le sue **equazioni cilindriche** nello spazio $\mathbb{R}^3$

$$\gamma:\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\vartheta \\ y=\rho\cdot\sin\vartheta \\ z\ =\ z \end{cases} \quad \begin{cases} \rho\geq 0 \\ 0\leq\vartheta\leq 2\pi \\ t\in\mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} \rho=\rho(t) \\ \vartheta=\vartheta(t) \\ \varphi=\varphi(t) \\ z=z(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}=\dot{\rho}\cdot\cos\vartheta-\rho\cdot\dot{\vartheta}\cdot\sin\vartheta \\ \dot{y}=\dot{\rho}\cdot\sin\vartheta+\rho\cdot\dot{\vartheta}\cdot\cos\vartheta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}=x'(t) \\ \dot{y}=y'(t) \\ \dot{z}=z'(t) \\ \dot{\rho}=\rho'(t) \\ \dot{\vartheta}=\vartheta'(t) \end{cases}$$

$$\lambda=L=\ell(\gamma)=\int_a^b\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\int_a^b\sqrt{(\dot{z})^2+(\dot{\rho})^2+\rho^2\cdot\left(\dot{\vartheta}\right)^2}d$$

Esempio: $\begin{cases} \rho=1 \\ \vartheta=t \\ z=t \end{cases} \quad 0\leq t\leq 2\pi \quad \begin{cases} \rho'=0 \\ \vartheta'=1 \\ z'=1 \end{cases} \quad \lambda=L=\ell(\gamma)=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+0+1}dt=\sqrt{2}\,[t]_0^{2\pi}=2\sqrt{2}\pi$

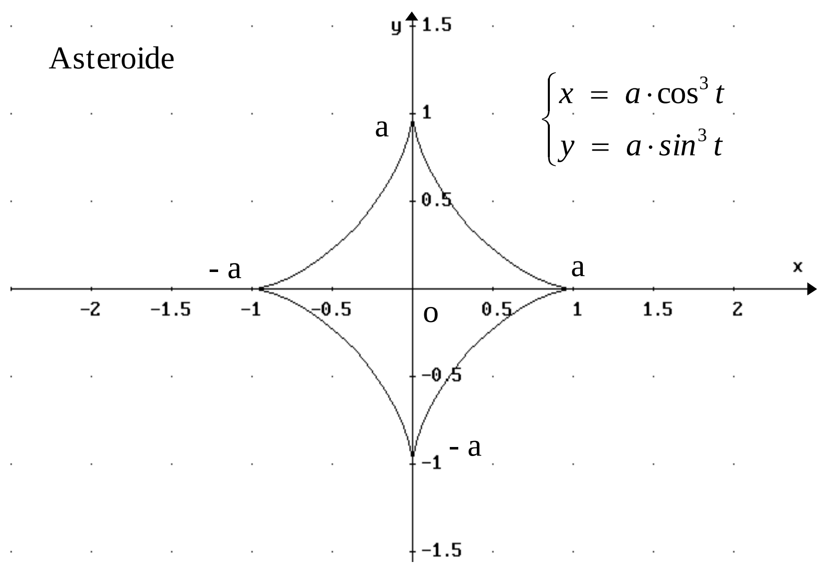
Calcolare la lunghezza dell'asteroide di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos^3 t \\ y = a\cdot sin^3 t \end{cases} \quad \cos \quad 0 \le t \le 2\pi \qquad \begin{cases} x'(t) = -3a\cdot sin\,t\cdot\cos^2 t \\ y'(t) = 3a\cdot\cos t\cdot sin^2 t \end{cases}$$

L'asteroide è una curva formata da 4 archi uguali e quindi abbiamo :

$$\ell = 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cdot\sin^2 t\cdot\cos^4 t + 9a^2\cdot\cos^2 t\cdot\sin^4 t}\cdot d\,t = 12a\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot\cos t\cdot dt =$$

$$= 3a\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\,2t\cdot d\,2t = 3a\left[-\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3a(1+1) = 6a$$



Calcolare la lunghezza di un ramo di cicloide avente equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = a(t - sin\,t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi \qquad \begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos t) \\ y'(t) = a\cdot sin\,t \end{cases}$$

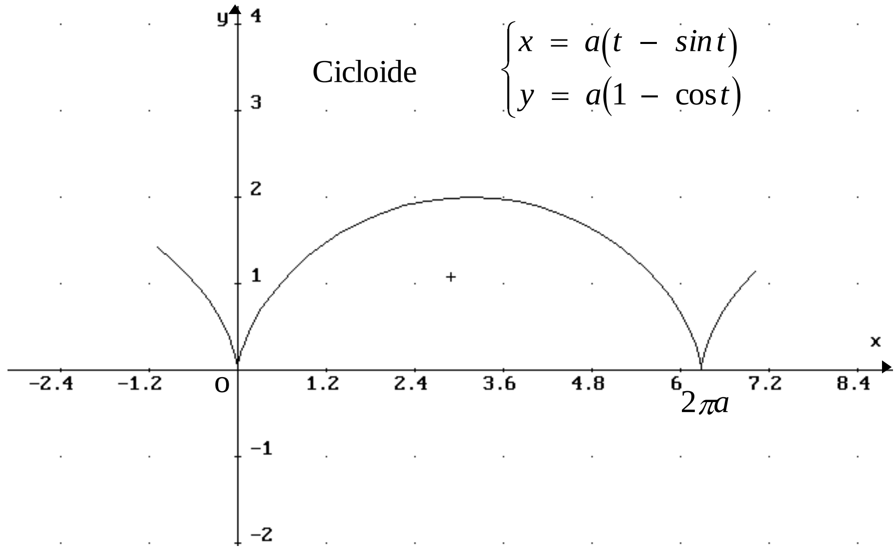
$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = a^2(1 + \cos^2 t - 2\cos t + sin^2 t) = 2a^2(1 - \cos t)$$

$$\ell = a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\cdot dt = a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\cdot dt = 2a\cdot\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|\cdot dt = 2a\cdot\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\cdot dt = =$$

$$= \ell = 4a\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4a(1+1) = 8a$$

$t \in [0,2\pi] \Rightarrow sin\frac{t}{2} > 0$ e quindi possiamo eliminare il valore assoluto presente nell'integrale.

a =raggio della circonferenza che genera la cicloide



Data nello spazio R^3 la curva γ di equazione $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ z = \frac{1}{8}\ln x \end{cases}$ determinare la lunghezza dell'arco avente per estremi i punti $A(1,1,0)$ e $B\left(e, \sqrt{e}, \frac{1}{8}\right)$.

Le equazioni parametriche della curva γ sono: $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \\ z = \frac{1}{8}\ln t \end{cases}$ $\begin{cases} 1 = t \\ 1 = \sqrt{t} \\ 0 = \frac{1}{8}\ln t \end{cases}$ $\begin{cases} 1 = t \\ 1 = t \\ 1 = t \end{cases}$ Il punto **A** della curva γ si ottiene per $t = 1$

$\begin{cases} e = t \\ \sqrt{e} = \sqrt{t} \\ \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\ln t \end{cases}$ $\begin{cases} e = t \\ e = t \\ e = t \end{cases}$ Il punto **B** della curva γ si ottiene per $t = e$ $\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ z'(t) = \frac{1}{8t} \end{cases}$

$$\ell = AB = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4t} + \frac{1}{64t^2}} \cdot dt = \int_1^e \sqrt{\left(1 + \frac{1}{8t}\right)^2} \cdot dt = \int_1^e \left(1 + \frac{1}{8t}\right) \cdot dt =$$

$$= \left[t + \frac{1}{8}\ln t\right]_1^e = e + \frac{1}{8}\ln e - 1 - \frac{1}{8}\ln 1 = e + \frac{1}{8} - 1 = e - \frac{7}{8}$$

Se non vogliamo utilizzare, per la nostra curva γ, una rappresentazione parametrica allora dobbiamo seguire un procedimento che è sostanzialmente identico a quello già effettuato. Infatti:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} , z = \frac{1}{8}\ln x \Rightarrow z'(x) = \frac{1}{8x}$$

$$\ell = AB = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{64x^2}} \cdot dx = \int_1^e \sqrt{\left(1 + \frac{1}{8x}\right)^2} \cdot dx = \int_1^e \left(1 + \frac{1}{8x}\right) \cdot dx =$$

$$= \left[x + \frac{1}{8}\ln x\right]_1^e = e + \frac{1}{8}\ln e - 1 - \frac{1}{8}\ln 1 = e + \frac{1}{8} - 1 = e - \frac{7}{8}$$

Ascissa curvilinea

Fissiamo un qualunque valore $t_o \in [a,b]$ e sia P_o il corrispondente punto su γ. Al variare di $t \in [a,b]$ varierà su γ il punto **P** e corrispondentemente varierà la lunghezza dell'arco P_oP di γ, lunghezza che indicheremo col simbolo $s(t)$ e che chiameremo **ascissa curvilinea**. Avremo:

$$s(t)=\int_{t_o}^{t} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t_o)]^2} \cdot dt \qquad [20]$$

La funzione $s(t)$ è **continua** e **crescente** perché:

$$s'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} > 0 \qquad \forall\, t \in [t_o, t] \qquad [21]$$

e quindi $s(t)$ ammette la funzione inversa: $\boxed{t = t(s)}$ che è pure **continua** e **strettamente crescente** in quanto risulta $t'(s) > 0$.

Sostituendo nelle equazioni parametriche della curva γ otteniamo : $\begin{cases} x = x[t(s)] = x(s) \\ y = x[t(s)] = y(s) \\ z = z[t(s)] = z(s) \end{cases}$ [22]

Si ottengono nuove equazioni parametriche di γ e questa volta il parametro è l'ascissa curvilinea. Per questa particolare rappresentazione parametrica vale:

$$[x'(s)]^2+[y'(s)]^2+[z'(s)]^2=1 \qquad [23]$$

cioè $x'(s)$, $y'(s)$, $z'(s)$ sono i **coseni direttori** della retta tangente (**orientata positivamente**) alla curva γ nel punto considerato. Essi sono, pertanto, le componenti del **versore tangente positivo** di $\vec{u}$, cioè: $\vec{u}=x'(s)\cdot\vec{i}+y'(s)\cdot\vec{j}+z'(s)\cdot\vec{k}$ [24]

Moltiplicando ambo i membri della [21] per dt otteniamo:

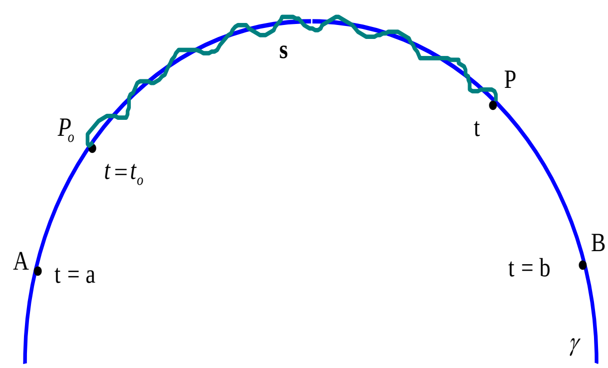
$$s'(t)\cdot dt=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\cdot dt=\sqrt{[x'(t)dt]^2+[y'(t)dt]^2+[z'(t)dt]^2}$$

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} \quad \text{e quindi: } (ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$$

che esprime il **Teorema di Pitagora** nell'infinitamente piccolo.

Se γ ha come equazioni parametriche le $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ allora le derivate $x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$, $y'(t) = \dfrac{dy}{dt}$, $z'(t) = \dfrac{dz}{dt}$ sono soltanto **parametri direttori** della retta tangente a gamma in **P**.

Se invece γ ha come equazioni parametriche le $\begin{cases} x = x[t(s)] = x(s) \\ y = x[t(s)] = y(s) \\ z = z[t(s)] = z(s) \end{cases}$ allora le derivate $x'(s) = \dfrac{dx}{ds}$, $y'(s) = \dfrac{dy}{ds}$, $z'(s) = \dfrac{dz}{ds}$ sono



proprio i **coseni direttori** della **tangente positiva** a γ in P_o cioè sono le componenti del versore positivo di t.

Trovare la rappresentazione parametrica riferita al sistema di ascisse curvilinee di origine $P_o(2,3,3)$ della curva γ avente equazione vettoriale $P(t)=O+(t-1)\cdot\vec{i}+3t\cdot\vec{j}+(4t-1)\cdot\vec{k}$ sapendo che $t \in [-1,2]$.

Le **equazioni parametriche** della curva γ sono: $\begin{cases} x(t) = t + 1 \\ y(t) = 3t \\ z(t) = 4t - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 3 \\ z'(t) = 4 \end{cases}$

Il punto P_o si ottiene quando attribuiamo al parametro **t** il valore **1** . $P_o \longleftrightarrow t = 1$

$$s = \int_{P_o}^{P} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t_o)]^2} \cdot dt = \int_1^t \sqrt{1 + 9 + 16} \cdot dt = \int_1^t \sqrt{26} \cdot dt =$$

$$= \sqrt{26}[t]_1^t = \sqrt{26}(t - 1)$$

$s(t) = \sqrt{26}\cdot(t - 1)$, $s'(t) = \sqrt{26} > 0 \Rightarrow s(t)$ **funzione strettamente crescente** e quindi **invertibile**

$$\frac{s}{\sqrt{26}} = t - 1, \qquad t = 1 + \frac{s}{\sqrt{26}} \qquad \begin{cases} x(t) = t + 1 & = 2 + \dfrac{s}{\sqrt{26}} \\ y(t) = 3t & = 3 + \dfrac{3s}{\sqrt{26}} \\ z(t) = 4t - 1 & = 3 + \dfrac{4s}{\sqrt{26}} \end{cases}$$