Generalità sulle superfici algebriche

Definizione: Si definisce **superficie algebrica** di ordine n il luogo geometrico dei punti P dello spazio le cui coordinate cartesiane (x, y, z) verificano un'equazione algebrica di grado n rappresentata da: $F(x,y,z)=0$ [1] o da $z=f(x,y)$

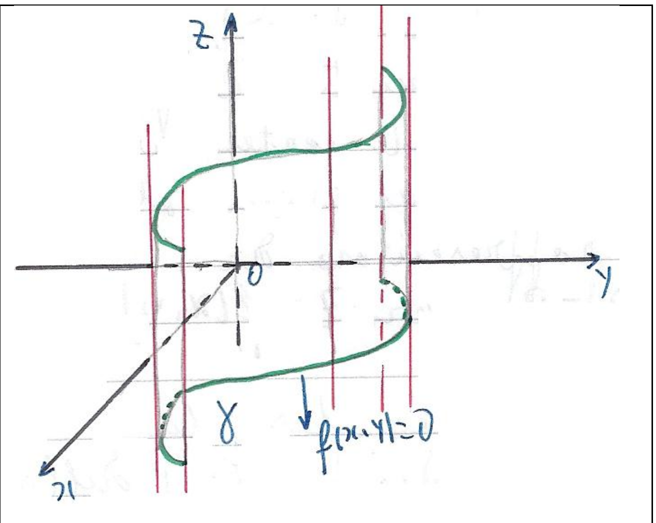
Talvolta si suole rappresentare la superficie quale luogo dei punti P dello spazio le cui coordinate (x, y, z) siano funzioni (continue e derivabili) di due parametri, ad esempio u e v, cioè:

$$\begin{cases} x=\varphi(u,\mathrm{v}) \\ y=\alpha(u,\mathrm{v}) \\ z=\beta(u,\mathrm{v}) \end{cases} \quad [2]$$

Se $P(x, y, z)$ è un generico punto variabile della superficie allora le coordinate (x, y, z) vengono dette **coordinate correnti**.

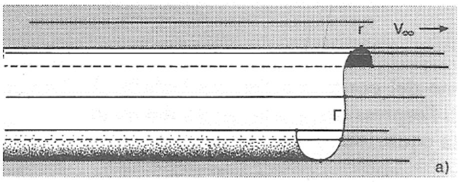
Superficie cilindrica

Definizione: Si chiama **superficie cilindrica** una qualsiasi superficie che possa pensarsi generata da una retta (detta **generatrice**) che si muove lungo una curva pian γ (detta **direttrice**) mantenendo costante la sua direzione.

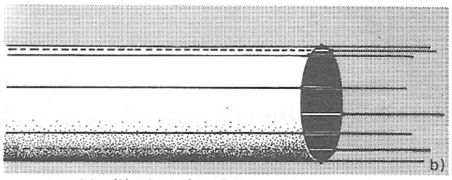


L'equazione $f(x,y)=0$ [3] rappresenta nella spazio R^3 una **superficie cilindrica** con le **generatrici** parallele all'asse z e con la **direttrice** coincidente con la curva piana γ avente equazione $f(x,y)=0$.

Analoga interpretazione sussiste per le superfici cilindriche aventi equazioni $f(x,z)=0$, $f(y,z)=0$. Dunque, nello spazio R^3 una equazione contenente due sole variabili rappresenta una superficie cilindrica le cui generatrici sono rette parallele all'asse della variabile mancante.



a) cilindro generico



b) cilindro circolare.

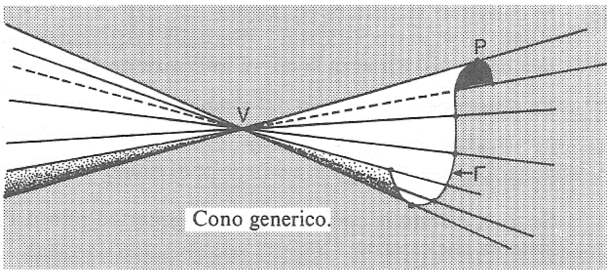
Teorema: L'equazione $f(x)=0$ $[4]$ rappresenta nello spazio R^3 un gruppo di piani paralleli al piano yz. In generale, nello spazio R^3 una equazione contenente una sola variabile rappresenta un gruppo di piani (tanti quanti sono le soluzioni dell'equazione $f(x)=0$) paralleli al piano coordinato delle variabili mancanti.

Conclusione: I cilindri con le **generatrici** parallele ad un asse sono rappresentati da una equazione contenente soltanto le altre due coordinate. Questa stessa equazione, se riferita ad uno dei piani coordinati rappresenta la sezione retta (cioè la **direttrice**) del cilindro.

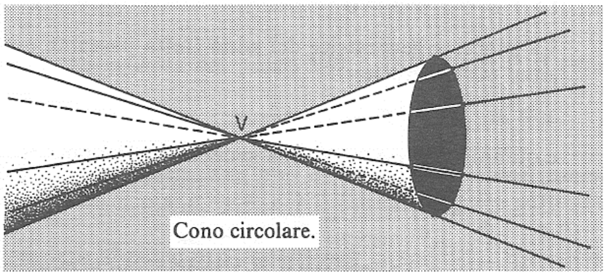
Una curva o linea è detta **sghemba** o **gobba** se i suoi punti non appartengono allo stesso piano.

Superficie conica

Definizione: Si chiama **superficie conica** ogni superficie costituita da tutte le rette, dette **generatrici**, proiettanti da un punto fisso, detto **vertice**, i punti di una curva, detta direttrice. I coni aventi il vertice coincidente con l'origine O degli assi cartesiani sono rappresentati un'equazione $f(x,y,z)=0$ omogenea rispetto alle tre coordinate. Più in generale un'equazione $f(x,y,z)=0$ che possa ridursi ad essere omogenea rispetto ai termini $(x-\alpha)$, $(y-\beta)$, $(z-\gamma)$ rappresenta un cono col vertice nel punto $V(\alpha,\beta,\gamma)$.



Cono generico.



Cono circolare.

Le infinite rette passanti per V e per ciascun punto della curva γ individuano una superficie detta **cono**. Se la curva γ è una circonferenza la superficie è detta **cono circolare**. La linea γ è la **direttrice**, il punto V è il **vertice**, una qualsiasi retta passante per V e per un qualsiasi punto di γ è la **generatrice** del cono.

Si chiama **cono del secondo ordine** una superficie definita da una equazione avente la seguente forma: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ [5]

Per capire quale sia la forma del cono del secondo ordine è sufficiente considerare la sezione con un qualsiasi piano non passante per l'origine degli assi coordinati (cioè non passante per il vertice del cono), ad esempio con un piano parallelo al piano xy ($z=c$). Si ottiene l'ellisse di equazione:

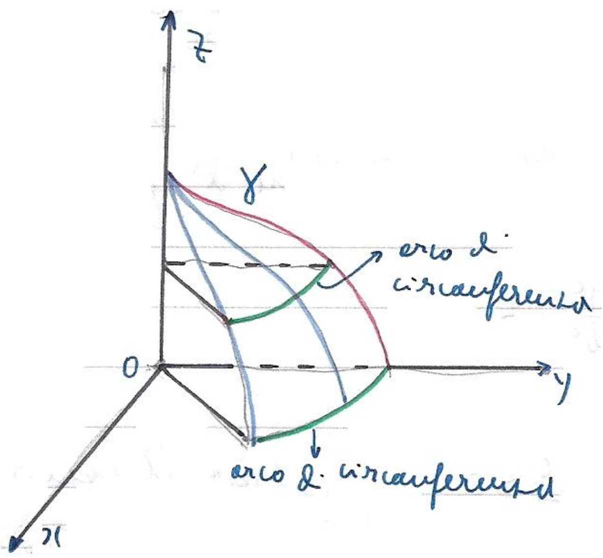
$$\begin{cases} z = c \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases} \qquad [6]$$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ [5] rappresenta il **cono circolare** del secondo ordine.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ cilindro ellittico $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ cilindro iperbolico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ cilindro immaginario

Le superfici di rotazione

Definizione: Si chiama **superficie rotonda** o di **rotazione** quella generata da una curva γ che ruota attorno ad una retta fissa detta **asse delle superficie**. Ne segue che ogni punto di γ descrive una circonferenza concentrica con l'asse e giacente su un piano perpendicolare all'asse.



I piani passante per l'asse tagliano la superficie rotonda lungo curve tutte uguali dette **meridiani della superficie**. Sia γ una curva piana giacente nel piano Oyz ed avente equazione $f(y,z)=0$. L'equazione della superficie di rotazione di asse z è: $f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$

Regola: L'equazione di una superficie di rotazione di asse z si può ottenere dall'equazione $f(y,z)=0$ della sua curva meridiana, giacente sul piano Oyz, ponendo al posto della variabile y l'espressione $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Con uno scambio opportuno di nomi si hanno le equazioni di superfici rotonde con asse di rotazione l'asse x o l'asse y e si ha anche la regola per ottenerle a partire dalla linea meridiana contenuta rispettivamente nel piano $y=0$ e $z=0$.

Conclusione: Una **superficie rotonda** con asse di rotazione l'asse z (x o y) è caratterizzata da un'equazione contenente le coordinate x ed y (y,z, x,z) soltanto nella combinazione x^2+y^2 (y^2+z^2, x^2+z^2)

Quadriche

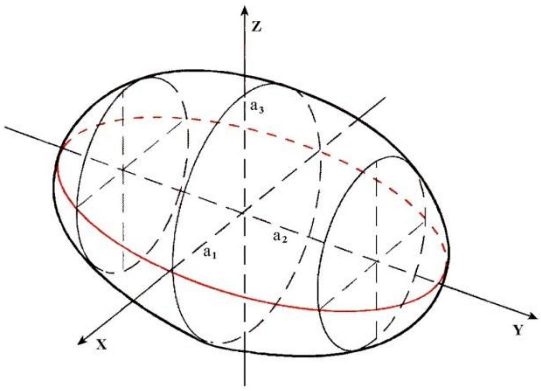
Le **quadriche** sono l'analogo nello spazio R^3 delle coniche nello spazio R^2. L'**equazione canonica di una quadrica a centro** è: $Ax^2+By^2+Cz^2+D=0$

Una quadrica può degenerare nel prodotto di due piani.

$C=0 \quad \wedge \quad D\neq 0 \quad \Rightarrow$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ cilindro ellittico $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ cilindro iperbolico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ cilindro immaginario

$$A\neq 0 \quad \wedge \quad B\neq 0 \quad \wedge \quad C\neq 0 \quad \wedge \quad D\neq 0$$



Ellissoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

- L'ellissoide è una quadrica a centro.
- L'ellissoide è una superficie simmetrica rispetto ai piani coordinati, rispetto agli assi cartesiani e rispetto all'origine degli assi cartesiani che è il centro della quadrica.
- Le coordinate (x, y, z) di ciascun punto dell'ellissoide verificano le seguenti limitazioni:

$$|x|\leq a \qquad |y|\leq b \qquad |z|\leq c$$

- I punti $A(a,0,0)$, $A'(-a,0,0)$, $B(b,0,0)$, $B'(-b,0,0)$, $C(c,0,0)$, $C'(-c,0,0)$ sono i vertici dell'ellissoide
- L'ellissoide interseca il pino Oxy secondo l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ed il piano $z=k$ secondo l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$
- I numeri a,b,c si chiamano **semiassi** dell'ellissoide.
- Quando uno dei tre semiassi a,b,c sono uguali abbiamo un **ellissoide di rotazione** e quando tutti e tre sono uguali abbiamo una **sfera** di centro $O(0,0,0)$.
- $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$ è l' **ellissoide** di centro $C(\alpha,\beta,\gamma)$ e semi assi paralleli agli assi coordinati

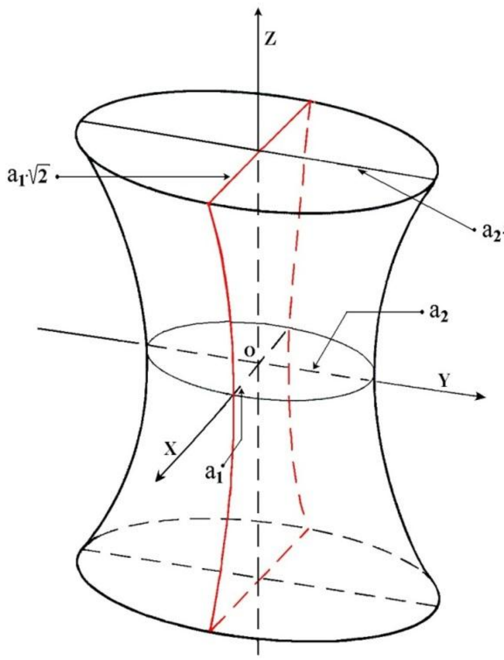
La sfera

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$ **sfera** di **centro** $C(\alpha,\beta,\gamma)$ e raggio $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-d}$

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ equazione generale della **sfera** di **centro** $C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$ e raggio $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-d}$

Iperboloide ad una falda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



L'**iperboloide ad una falda** presenta le simmetrie riscontrate a proposito dell'ellissoide. Pertanto esistono tra piani di simmetria, tre assi di simmetria ed un centro di simmetria.
Due assi soltanto intersecano l'iperboloide ad una falda ed i corrispondenti vertici sono i punti $A(a,0,0)$, $A'(-a,0,0)$, $B(b,0,0)$, $B'(-b,0,0)$.

Le sezioni principali sono:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \wedge \quad z=0 \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \wedge \quad y=0 \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \wedge \quad x=0$$

Sezionando l'iperboloide ad una falda con un piano parallelo al piano Oxy otteniamo una ellisse.

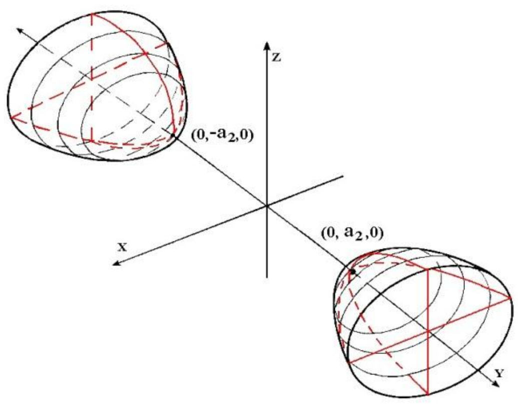
Le intersezioni dell'iperboloide ad una falda con i piani $x=\text{cost}$ oppure $y=\text{cost}$ sono iperboli.

Nel caso particolare in cui $a=b$, la superficie è un **iperboloide di rotazione ad una falda** la cui equazione è:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

L'**ellisse di gola** passante per l'origine degli assi cartesiani diventa la **circonferenza di gola** di raggio a. Le sezioni dell'iperboloide ad una falda con i piani passanti per l'asse longitudinale (asse z) sono iperboli tutte uguali. L' **iperboloide di rotazione ad una falda** si può definire come la superficie generata dalla rotazione di una iperbole attorno al sua asse immaginario (asse non trasverso).

Iperboloide a due falde

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



- E' simmetrico rispetto ai tre piani coordinati, rispetto all'origine egli assi coordinati e rispetto agli assi cartesiani Ox, Oy, Oz.

- Il piano $x=0$ non interseca l'iperboloide. Vuole dire che la quadrica considerata si compone di due parti distinte (le due falde) simmetriche rispetto a tale piano

- Le sezioni principali con i piani $y=0$ e $z=0$ sono due iperboli aventi rispettivamente equazioni:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \ \wedge \ y=0 \quad [A] \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ \wedge \ z=0$$

- I piani $z=h$ intersecano l'iperboloide a due falde secondo una iperbole il cui asse trasverso è sempre parallelo all'asse x

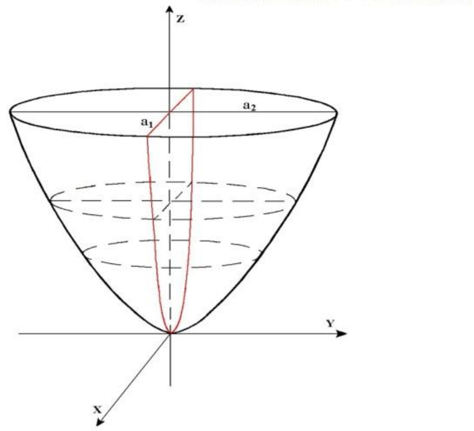
- L'intersezione col piano di equazione $x=k$ è data da: $\frac{k^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{a^2}-1$

Si tratta di un punto se $k=\pm a$ e di una ellisse σ se $|k|>0$ $(-a<k<a)$ I vertici di σ stanno sulle iperboli $[A]$.

Iperboloide di rotazione a due falde

Per $a=b$ l'equazione dell'iperboloide a due falde diventa: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ e prende il nome di **iperboloide di rotazione a due falde**. Si ottiene facendo ruotare attorno all'asse x l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \ \wedge \ y=0$.

Paraboloide ellittico



Superficie data dall'equazione ridotta

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Non esiste un centro di simmetria; solo l'asse z è asse di simmetria.

Le sezioni principali situate sui piani $y=0$, $x=0$ sono le parabole di equazioni:

$$x^2=2a^2z \qquad y^2=2b^2z$$

Il piano $z=0$ ha un solo punto in comune col **paraboloide ellittico**.

Sezionando il **paraboloide ellittico** con il piano $z=k>0$ si ottiene l'ellisse di equazione

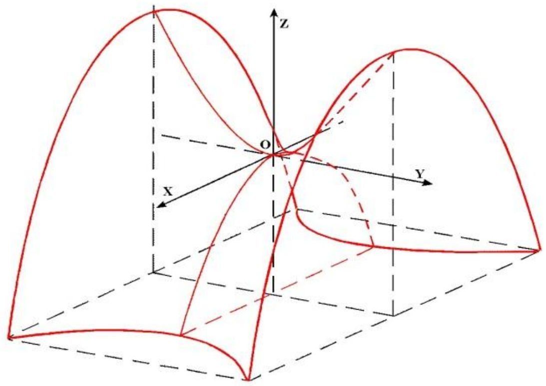
$$\frac{x^2}{2a^2z}+\frac{y^2}{2b^2z}=1$$

L'intersezione del **paraboloide ellittico** con i piani $x=h$ ($y=k$) sono parabole con l'asse parallelo all'asse z e vertici sulla parabola $\frac{x^2}{a^2}=2z \ \wedge \ y=0$ ($\frac{y^2}{b^2}=2z \ \wedge \ x=0$)

Se $a=b$ otteniamo il **paraboloide di rotazione** di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=2z$ che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la parabola di equazione $x^2=2a^2z \ \wedge \ x=0$.

Paraboloide iperbolico

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$



Per la sua forma particolare si chiama anche **paraboloide e sella**.

Gli elementi di simmetria sono gli stessi del paraboloide ellittico.

Le intersezioni del **paraboloide iperbolico** con i piani coordinati Oxy, Oyz sono date da:

$$x^2=2a^2z \quad (y=0) \qquad y^2=-2b^2z \quad (x=0)$$

Si tratta di **due parabole**, la prima con la concavità rivolta verso l'alto e la seconda con la concavità rivolta verso il basso.

Le intersezioni del **paraboloide iperbolico** con i piani $x=h$ ed $y=k$ sono parabole con asse parallelo all'asse z; le prime hanno la concavità rivolta verso il basso ed hanno il vertice sulla parabola $\frac{x^2}{a^2}=2z \ \wedge \ y=0$, le seconde hanno la concavità rivolta verso l'alto ed hanno il vertice sulla parabola $-\frac{y^2}{a^2}=2z \ \wedge \ x=0$.

Le intersezioni con i piani $z=h$ sono iperboli i cui assi trasversi sono paralleli all'asse x se $h>0$, all'asse y se $h<0$. Per $h=0$ l'iperbole sezione è spezzata (degenera) in due rette

$$(bx+ay)(bx-ay)=z=0$$

Il **paraboloide iperbolico** non è mai una superficie di rotazione.

Superfici cilindriche

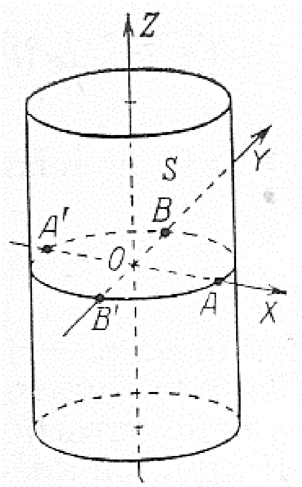
Una superficie S generata dal moto di una retta (detta **generatrice**) che durante il moto resta parallela ad una retta fissa (ad esempio ad uno degli assi coordinati) si chiama **superficie cilindrica**. Ogni linea intersecata in un solo punto dalla generatrice in qualunque sua posizione si chiama **direttrice** della **superficie cilindrica**.

Ogni equazione $f(x,y)=0$ che non contiene la coordinata z e che sul piano (spazio R^2) Oxy rappresenta una curva γ rappresenta nello spazio R^3 una **superficie cilindrica** la cui **generatrice** è parallela all'asse Oz e della quale la linea γ è una **direttrice**.

Quanto detto finora può essere esteso a superfici cilindriche con generatrici parallele agli altri assi coordinati ed il risultato può essere riassunto nei seguenti termini: un'equazione in coordinate cartesiane mancante di una variabile rappresenta una superficie cilindrica con generatrici parallele all'asse associato alla variabile mancante.

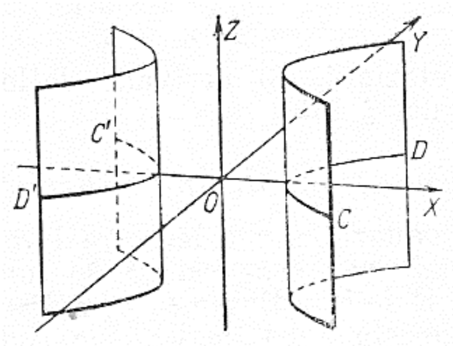
Cilindro ellittico

La curva γ di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ rappresenta sul piano Oxy un cilindro con le **generatrici** parallele all'asse z e **direttrice** la curva γ che è una ellisse. Le intersezioni con i piani $z=h$ sono ellissi uguali di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ giacenti sul piano di equazione $z=h$. Da qui il nome di **cilindro ellittico**.



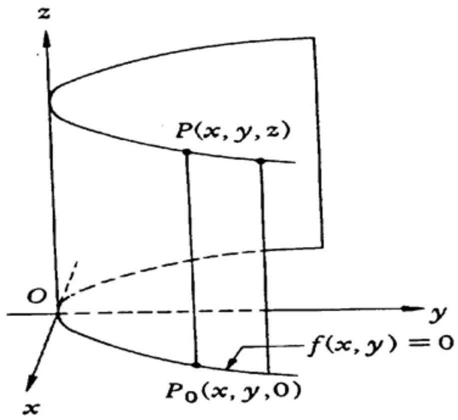
Cilindro iperbolico

L'equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ rappresenta un **cilindro iperbolico** con le **generatrici** parallele all'asse Oz ed una sua **direttrice** è l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.



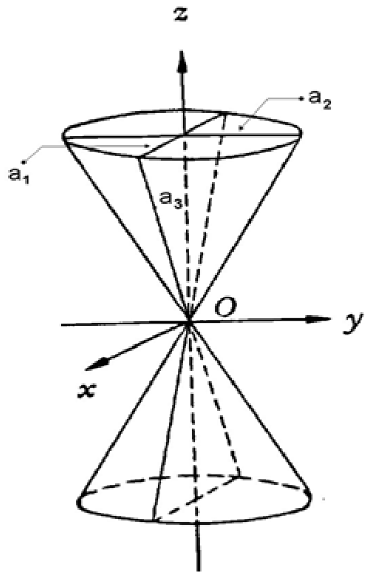
Cilindro parabolico

La curva γ di equazione $x^2 = 2pz$ rappresenta un **cilindro parabolico** con le **generatrici** parallele all'asse z e **direttrice** la curva γ che è una parabola. Le intersezioni con i piani $z = h$ sono parabole uguali di equazione $x^2 = 2pz$ giacenti sul piano di equazione $z = h$. Da qui il nome di **cilindro parabolico**.



Cono del secondo ordine

Si chiama **superficie conica** ogni superficie generata dal moto di un a retta (detta **generatrice**) che in ogni posizione passa per un punto fisso (detto vertice della superficie conica). Ogni curva piana non passante per il vertice e che interseca la generatrice in qualunque sua posizione si chiama **direttrice**. La superficie di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ si chiama **cono ellittico** o **cono del secondo ordine**. Tale cono è simmetrico rispetto a tutti e tre i piani coordinati.



La sezione del **cono ellittico** col piano di equazione $x = 0$ è costituita dalle due rette di equazioni $y = \pm \frac{b}{c} z$ giacenti sul piano Oyz.

La sezione del **cono ellittico** col piano di equazione $y = 0$ è costituita dalle due rette di equazioni $x = \pm \frac{a}{c} z$ giacenti sul piano Oxz.

La sezione del cono $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ col piano $z=h$ è l'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$ che degenera nel punto $O(0,0,0)$ per $h=0$

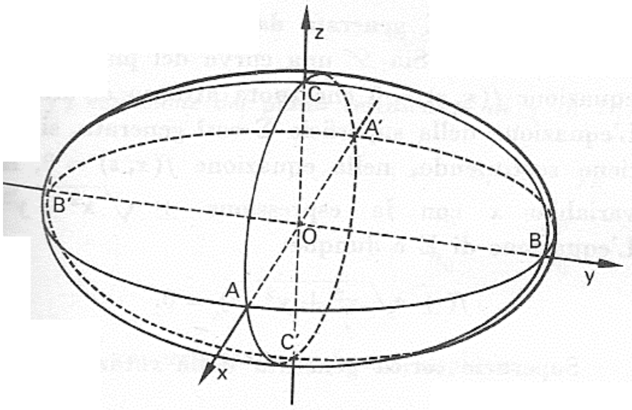
Per $a=b$ le ellissi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$ diventano circonferenze ed il cono del secondo ordine diventa un cono circolare di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}$

Le sezioni del cono $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ con piani paralleli al piano Oxz (o al piano Oyz) sono ierboli.

L'equazione omogenea di secondo grado $ax^2+by^2+cz^2=0$ con $a,b,c\neq 0$ rappresenta un cono avente il vertice coincidente con l'origine $O(0,0,0)$ degli assi cartesiani.

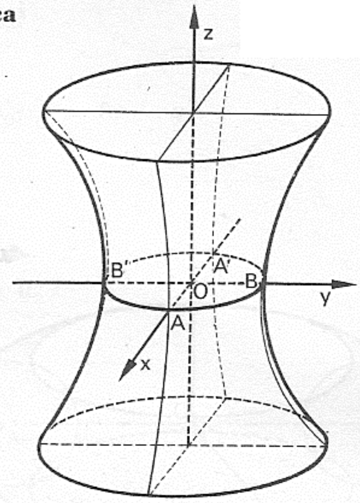
Osservazione: Le sezioni di ogni cono del secondo ordine con piani non passanti per il vertice sono circonferenze, ellissi, iperboli e parabole. Ognuna di queste curve può essere assulnta come direttrice del cono.

Quadriche in forma canonica



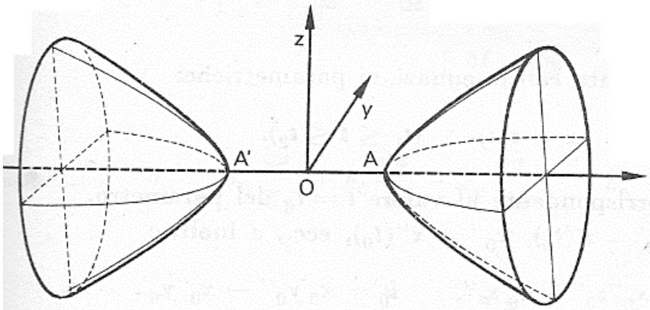
Ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$



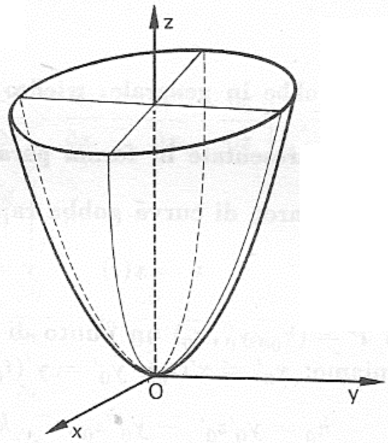
Iperboloide ad una falda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$



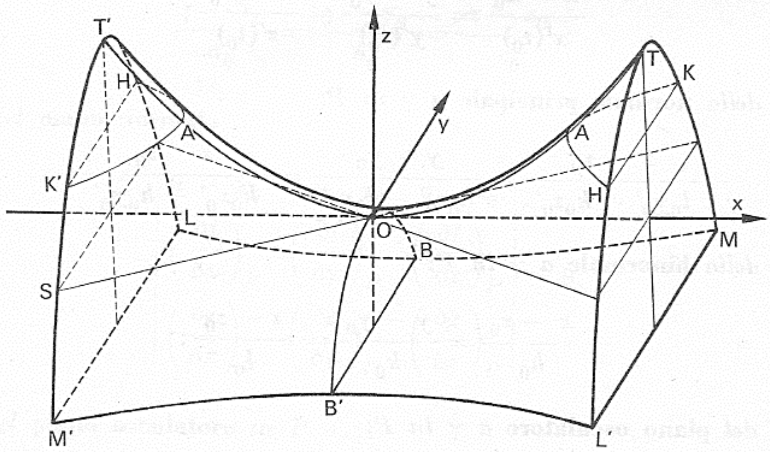
Iperboloide a due falde

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$



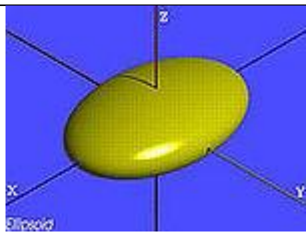
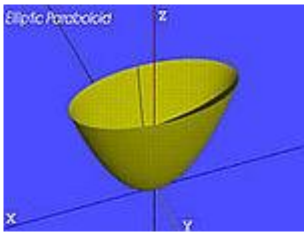
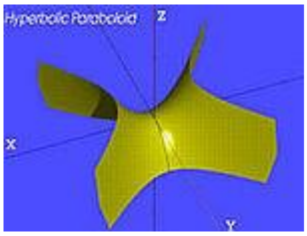
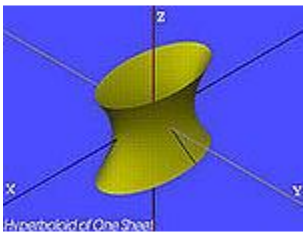
Paraboloide ellittico

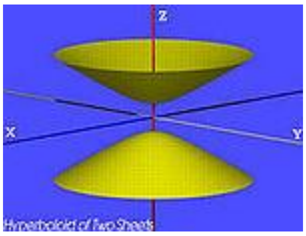
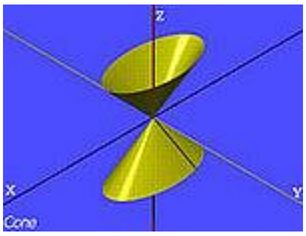
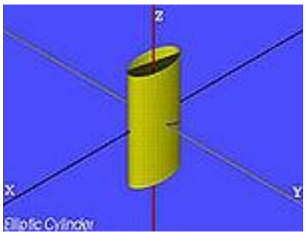
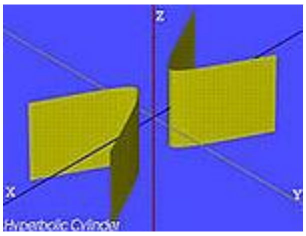
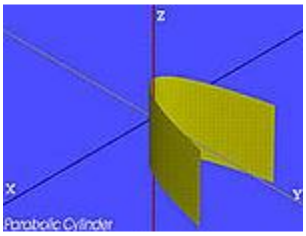
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz.$$



Paraboloide iperbolico

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz.$$

Quadriche non degeneri		
Ellissoide	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$	
Sferoide (caso particolare di ellissoide)	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$	
Sfera (caso particolare di sferoide)	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$	
Paraboloide ellittico	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$$	
Paraboloide circolare (caso particolare di paraboloide ellittico)	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-z=0$$	
Paraboloide iperbolico	$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$$	
Iperboloide ad una falda (iperboloide iperbolico)	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$	

Iperboloide a due falde (iperboloide ellittico)	$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$	
Quadriche degeneri		
Cono	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$	
Cilindro ellittico	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$	
Cilindro circolare (caso particolare di cilindro ellittico)	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$	
Cilindro iperbolico	$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$	
Cilindro parabolico	$$x^2+2ay=0$$	

Il piano nello spazio cartesiano

$ax+by+cz+d=0$ equazione generale del piano $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$ equazione segmentaria del piano

$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ d=0 \end{cases}$ equazione del piano passante per l'origine degli assi cartesiani

$\begin{cases} by+cz=0 \\ a=0 \wedge d=0 \end{cases}$ equazione del piano passante per l'asse x $\begin{cases} ay+cz=0 \\ b=0 \wedge d=0 \end{cases}$ equazione del piano passante per l'asse y $\begin{cases} ax+by=0 \\ c=0 \wedge d=0 \end{cases}$ equazione del piano passante per l'asse z $z=0$ equazione del piano Oxy $y=0$ equazione del piano Oxz $x=0$ equazione del piano Oyz $x=k$ equazione del piano parallelo al piano Oyz $y=h$ equazione del piano parallelo al piano Oxz

$z=p$ equazione del piano parallelo al piano Oxy

Equazione del piano tangente ad una superficie S di equazione $f(x,y,z)=0$ in un suo punto $P_o(x_o,y_o,z_o)$: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_o}(x-x_o)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_o}(y-x_o)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_o}(z-x_o)=0$

Equazione del piano tangente ad una superficie S di equazioni parametriche: $\begin{cases} x=\alpha(u,\mathrm{v}) \\ y=\beta(u,\mathrm{v}) \\ z=\gamma(u,\mathrm{v}) \end{cases}$

in un suo punto $P_o(x_o,y_o,z_o)$: $\begin{vmatrix} x-x_o & y-x_o & z-x_o \\ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_{P_o} & \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}\right)_{P_o} & \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u}\right)_{P_o} \\ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \mathrm{v}}\right)_{P_o} & \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathrm{v}}\right)_{P_o} & \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \mathrm{v}}\right)_{P_o} \end{vmatrix}=0$

L'equazione del piano tangente ad una quadrica in un suo punto $P_o(x_o,y_o,z_o)$ si ottiene applicando la regola degli sdoppiamenti: $x^2\to x_o x$ $x\to\frac{x_o+x}{2}$ $xy\to\frac{x_o y+y_o x}{2}$ $y^2\to y_o y$ $y\to\frac{y_o+y}{2}$ $yz\to\frac{y_o z+z_o y}{2}$ $z^2\to z_o z$ $z\to\frac{z_o+z}{2}$ $xz\to\frac{x_o z+z_o x}{2}$