Volume del cilindroide

Consideriamo una funzione $f(x,y)=f(P)$ definita in un dominio limitato **A** nel quale risulta **non negativa**, cioè: $f(P)\geq 0 \quad \forall (x,y)\in A$

Definiamo cilindroide di base **A** relativo alla funzione $f(x,y)$ il luogo geometrico dei punti (x,y,z) dello spazio che verificano le seguenti relazioni: $(x,y)\in A \quad 0\leq z\leq f(x,y)$ [1]

Quindi il cilindroide è un solido limitato superiormente dalla superficie gobba di equazione $z=f(x,y)$, inferiormente dal dominio **A** del piano xy e lateralmente dalla superficie cilindrica retta che traccia sul piano xy il dominio **A** (cioè dalla superficie cilindrica le cui **generatrici** sono le rette parallele all'asse Oz e la cui **direttrice** è la frontiera del dominio **A**).

Se il dominio **A** è misurabile, allora tale dominio ammette come area il numero δ. Se $f(x,y)$ è una **funzione continua** in **A**, detta $D=D(A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots,A_n)$ una sua qualsiasi partizione [1], cioè una qualsiasi decomposizione in n domini misurabili $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots,A_n$ aventi rispettivamente area $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_i,\cdots,\delta_n$, indichiamo con m_i ed M_i rispettivamente il **minimo assoluto** ed il **massimo assoluto** di $f(x,y)$ in A_i.

[2] $s_D=m_1\delta_1+m_2\delta_2+\cdots+m_i\delta_i+\cdots+m_n\delta_n=\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_i$ = volume del **pluricilindro inscritto nel cilindroide relativo alla partizione D**

[3] $S_D=M_1\delta_1+M_2\delta_2+\cdots+M_i\delta_i+\cdots+M_n\delta_n=\sum_{i=1}^{n}M_i\delta_i$ = volume del **pluricilindro circoscritto al** cilindroide **relativo alla partizione D**

Se indichiamo con **V** il **volume del** cilindroide abbiamo: $s_D\leq V\leq S_D$

Si definisce **volume del** cilindroide l'estremo superiore (**inferiore**) dell'insieme numerico descritto dalle somme s_D (S_D) al variare della partizione **D**, cioè: $V=\sup s_D=\inf S_D$ [4]

---

[1] L'insieme $\{A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots,A_n\}$ costituisce una partizione dell'insieme **A** se i suoi elementi sono a due a due disgiunti e la loro unione è l'insieme **A**. Due insiemi sono disgiunti se la loro unione è l'insieme vuoto.

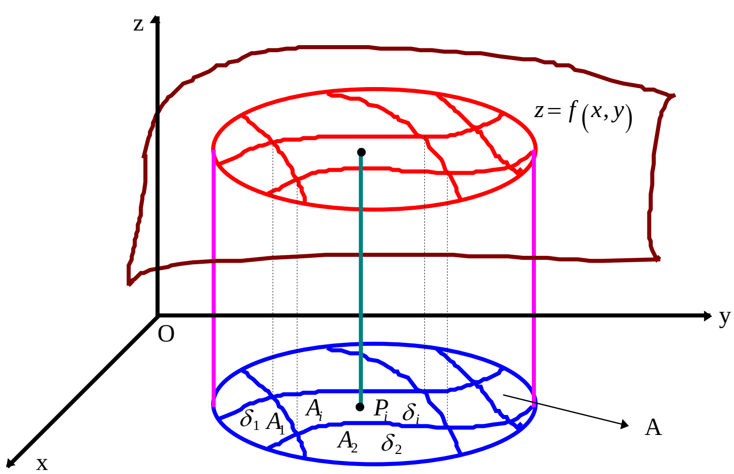
Invece di considerare le somme [2] e [3] possiamo considerare la somma σ_D di tutti i cilindri aventi come basi i domini A_i e per altezza un valore qualunque $f(P_i)=f(x_i,y_i)$ della funzione calcolato in un punto qualsiasi di A_i, cioè: $\sigma_D=\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\delta_i$ [5]

$$m_i \leq f(P_i) \leq M_i \quad \Rightarrow \quad s_D \leq \sigma_D \leq S_D \qquad [6]$$

In questo caso definiamo **volume V del** cilindroide il limite della somma σ_D quando **il massimo diametro** [($)] della partizione **D** tende a zero quando n tende a $+\infty$.

$$V=\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \rho_i\to 0}} \sigma_D=\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \rho_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\delta_i \qquad [8]$$

(**N.B.** Diametro di un dominio limitato e chiuso è la massima distanza ρ tra due punti qualsiasi della sua frontiera). Dire che esiste il limite [8] significa affermare che, scelto un numero ε positivo ed arbitrario (e come tale piccolo a piacere), è possibile determinare in corrispondenza un numero positivo ρ_ε tale che, per ogni partizione **D** di **A** di diametro $\rho<\rho_\varepsilon$ e qualunque sia il punto $P_i\in A_i$, si abbia: $|\sigma_D-V|<\varepsilon$ [9]



Definizione di integrale doppio

Se $f(x,y)$ è una funzione continua in un dominio **A** limitato e chiuso allora il limite [8], quando esiste finito, dicesi integrale doppio della funzione $f(x,y)$ esteso al dominio A e si scrive:

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \rho_i\to 0}} \sigma_D=\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\iint_A f(x,y)\,dA=\iint_A f(P)\,dA \qquad [9]$$

[($)] cioè il massimo diametro dei domini A_i in cui il dominio di partenza A viene diviso

L'integrale doppio è un numero dipendente soltanto dalla funzione integranda $f(x,y)$ e dal dominio di integrazione **A** mentre è completamente indipendente dalla notazione delle variabili indipendenti per cui possiamo scrivere indifferentemente:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f(u,v)\,du\,dv \qquad [10]$$

Come vedremo in seguito, il calcolo di un integrale doppio può essere ricondotto al calcolo di due ordinari integrali indefiniti.

Osservazione: Se risulta $f(x,y) = h =$ costante abbiamo:

$\iint_A h\,dx\,dy = h \cdot \delta$ = **volume del cilindro** avente come base A ed altezza h $[11]$

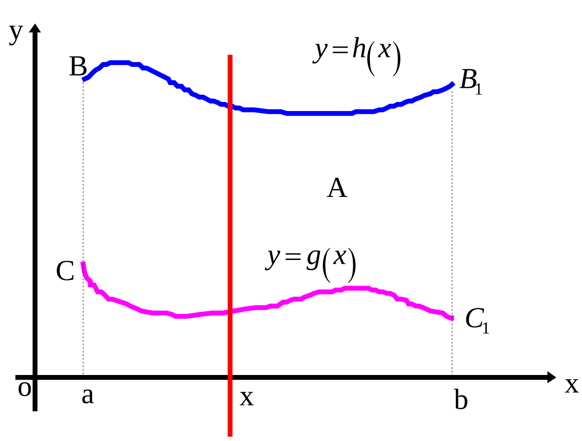
Se poi risulta $h = 1$ abbiamo: $\iint_A dx\,dy = \delta =$ area del dominio piano A $[12]$

L'integrale doppio $[9]$ rappresenta il volume del cilindroide di base **A** individuato dalla funzione $z = f(x,y)$, cioè: $V = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ $[13]$

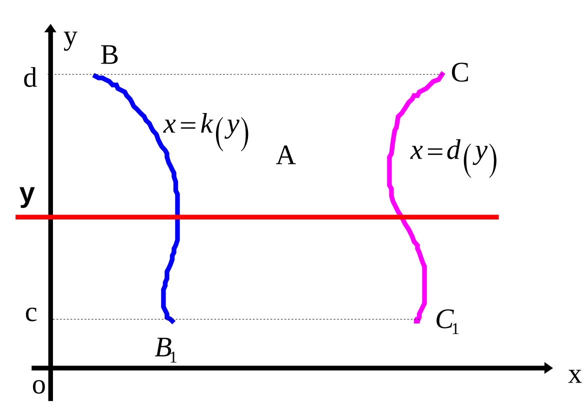
Domini normali del piano

Se $g(x)$ ed $h(x)$ sono due funzioni definite e continue nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ dove risulta $g(x) \leq h(x)$ allora l'insieme **A** dei punti del piano le cui coordinate (x,y) verificano le relazioni: $a \leq x \leq b \quad , \quad g(x) \leq y \leq h(x)$ dicesi dominio normale rispetto all'asse x.

In questo caso una generica retta parallela all'asse delle **y** incontra la curva di equazione $y = g(x)$ in un solo punto e la curva di equazione $y = h(x)$ in un solo punto.



Dominio normale rispetto all'asse delle ordinate



Dominio normale rispetto all'asse delle ascisse

Se $k(y)$ ed $d(y)$ sono due funzioni definite e continue nell'intervallo limitato e chiuso $[c,d]$ dove risulta $k(y) \leq d(y)$ allora l'insieme **A** dei punti del piano le cui coordinate (x,y) verificano le relazioni: $c \leq y \leq d \quad , \quad k(y) \leq x \leq d(y)$ dicesi dominio normale rispetto all'asse y.

In questo caso una generica retta parallela all'asse delle **x** incontra in un solo punto tanto la curva di equazione $x = k(y)$ quanto la curva di equazione $x = d(y)$.

In particolare, in entrambi i casi, i segmenti BC e B_1C_1 possono ridursi ad un solo punto.

Formule di riduzione per gli integrali doppi

Se $f(x,y)$ è una funzione definita e continua nel dominio **A** rispetto all'asse delle x con $a \leq x \leq b \quad e \quad g(x) \leq y \leq h(x)$, risulta:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \qquad [14]$$

La $[14]$ costituisce una **formula di riduzione** per gli integrali doppi poiché riconduce il calcolo dell'integrale doppio all'esecuzione di due integrazioni ordinarie, una rispetto ad y fra limiti dipendenti da x ed un'altra successiva rispetto ad y fra limiti costanti. Essa è applicabile solo a **domini normali rispetto all'asse x**. La [14] è detta anche **formula d'integrazione per verticali**.

Se poi il dominio **A** è normale rispetto all'asse y con $c \leq y \leq d \quad e \quad k(y) \leq x \leq d(y)$ allora la formula di riduzione assume la seguente forma:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{k(y)}^{d(y)} f(x,y)\,dx \right] dy = \int_c^d dy \int_{k(y)}^{d(y)} f(x,y)\,dx \qquad [15]$$

La [15] è detta formula di integrazione per orizzontali.

Se il dominio **A** è normale rispetto ad entrambi gli assi abbiamo:

$$\int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_{k(y)}^{d(y)} f(x,y)\,dx \qquad [16]$$

La [16] prende il nome di formula d'inversione dell'ordine delle integrazioni.

Se il dominio **A** è un rettangolo, $A = [a,b] \times [c,d]$ la [16] diventa:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx \qquad [17]$$

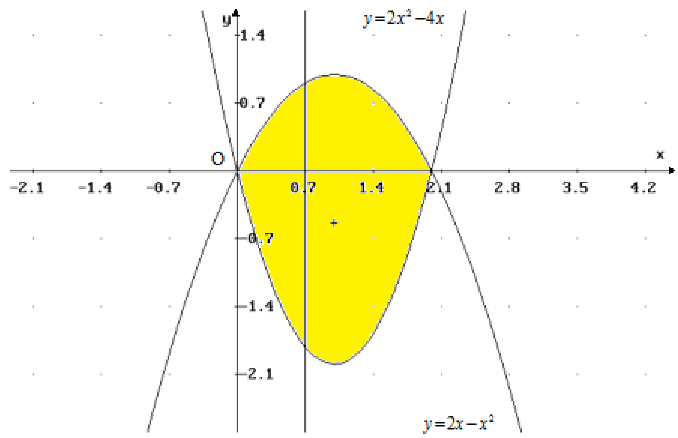
Se **A** è un rettangolo e se $f(x,y) = B(x) \cdot C(y)$ la [17] diventa:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A B(x)\cdot C(y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d B(x)\cdot C(y)\,dy = \int_a^b B(x)\,dx \int_c^d C(y)\,dy \quad [18]$$

Se il dominio **A** non è normale né rispetto all'asse delle x, né rispetto all'asse delle y bisogna cercare di decomporlo in opportuni domini normali rispetto all'asse x o rispetto all'asse y. In questo caso l'integrale doppio esteso al dominio **A** si scinde nella somma di due o più integrali doppi estesi a due o più domini A_i che determinano una opportuna partizione di A. Ad ognuno di questi nuovi integrali doppi è applicabile una delle formule d'integrazione per verticali o per orizzontali.

Calcolare l'integrale doppio $\iint_A xy\,dx\,dy$ esteso al dominio **A** delimitato dalle parabole $y=2x^2-4x$ e $y = 2x - x^2$.

$$A=\left\{(x,y)\in R^2 : y\le 2x-x^2 \wedge y\ge 2x^2-4x\right\}$$



Le due parabole si incontrano nei punti $O(0,0)$ e $B(2,0)$

$$\iint_A xy\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_{2x^2-4x}^{2x-x^2} xy\,dy = \int_0^2 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{2x^2-4x}^{2x-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(-3x^5 + 12x^4 - 12x^3\right)dx =$$

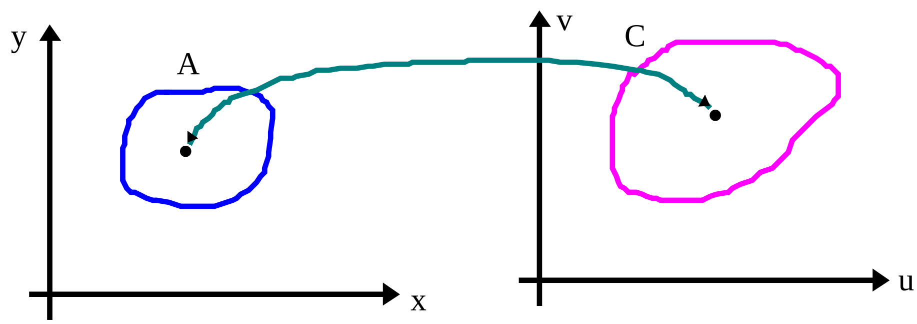
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{x^6}{2} + \frac{12}{5}x^5 - 3x^4\right]_0^2 = -\frac{8}{5}$$

Cambiamento di variabili in un integrale doppio

Si consideri l'integrale doppio esteso al dominio **A** $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ nelle variabili **x** ed **y**.

Vogliamo esprimere questo integrale mediante altre variabili **u** e **v** (ad esempio coordinate polari), da interpretare ancora come coordinate cartesiane del piano (u,v) legate alle precedenti coordinate dalle relazioni: $x=x(u,\mathrm{v}) \quad y=y(u,\mathrm{v})$ $[19]$

Questo significa che le equazioni $[19]$ definiscono una corrispondenza biunivoca fra i punti del **dominio regolare** **C** del piano (u,v) ed i punti del **dominio regolare** **A** del piano (x,y).



Inoltre supponiamo che:

1) siano **continue** nel dominio **C** le funzioni $x(u,\mathrm{v})$ ed $y(u,\mathrm{v})$, assieme alle loro derivate prime e seconde

2) quando il punto (u,v) descrive la frontiera del dominio **C** il corrispondente punto (x,y) descrive una sola volta la frontiera del dominio **A**

3) sia diverso da zero il determinante jacobiano o **determinante funzionale**

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{v}}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}-\frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\neq 0 \qquad [20]$$

Sotto tali ipotesi vale la seguente formula di trasformazione:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\iint_C f\left[x(u,\mathrm{v}),y(u,\mathrm{v})\right]\cdot|J|\,du\,d\mathrm{v} \qquad [21]$$

Se le coordinate (u,v) sono coordinate polari (ρ,ϑ) allora la [21] assume la forma :

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\iint_C f(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)\cdot\rho\,d\rho\,d\vartheta \qquad [22]$$

Infatti le formule che legano le coordinate cartesiane e quelle polari sono le seguenti:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\vartheta\end{cases} \qquad 0\le\vartheta<2\pi \qquad J=\begin{vmatrix}\cos\vartheta & -\rho\cdot\sin\vartheta\\ \sin\vartheta & \rho\cdot\cos\vartheta\end{vmatrix}=\rho\left(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\right)=\rho \qquad [23]$$

$dx\,dy=|J|\cdot du\cdot d\mathrm{v}=d\sigma$ = **elemento infinitesimo di area** in coordinate curvilinee (u,v)

$d\sigma=dx\,dy=|J|\,d\rho\,d\vartheta$ = **elemento infinitesimo di area** in coordinate polari (ρ,ϑ)

$u=\rho,\ \mathrm{v}=\vartheta$ $\quad \dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{\partial x}{\partial \rho}=\cos\vartheta$ $\quad \dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{v}}=\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}=-\rho\cdot\sin\vartheta$ $\quad \dfrac{\partial y}{\partial u}=\dfrac{\partial y}{\partial \rho}=\sin\vartheta$ $\quad \dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}=\dfrac{\partial y}{\partial \vartheta}=\rho\cdot\cos\vartheta$

Formule di riduzione in coordinate polari

Se il polo **O** è esterno al dominio di integrazione **A** (FIG. 1) abbiamo:

$$\iint_A F(\rho,\vartheta)\,d\rho\,d\vartheta = \int_{\vartheta_i}^{\vartheta_f} d\vartheta \int_{\alpha(\vartheta)}^{\beta(\vartheta)} F(\rho,\vartheta)\,d\rho \qquad [24]$$

dove $\rho = \alpha(\vartheta)$ e $\rho = \beta(\vartheta)$ sono le equazioni polari delle due curve piane che esprimono la frontiera del dominio **A**.

Se invece il polo **O** è interno al dominio di integrazione **A** (FIG 2) abbiamo:

$$\iint_A F(\rho,\vartheta)\,d\rho\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\rho(\vartheta)} F(\rho,\vartheta)\,d\rho \qquad [25]$$

dove $\rho = \rho(\vartheta)$ è l'equazione polare della frontiera del dominio **A**.

FIG 1

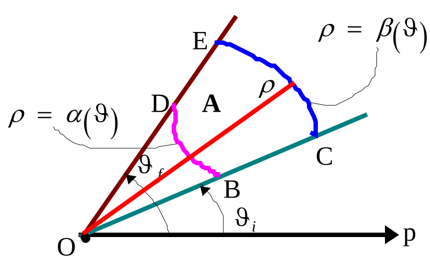
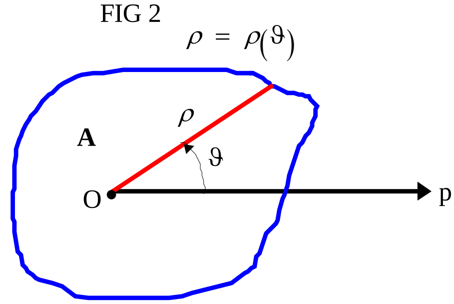
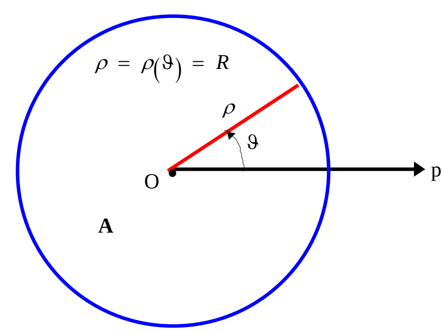


FIG 2



In particolare per: $\rho = \rho(\vartheta) = R =$ costante (circonferenza di centro O e raggio R) abbiamo:

$$\iint_A F(\rho,\vartheta)\,d\rho\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{R} F(\rho,\vartheta)\,d\rho \qquad [26]$$



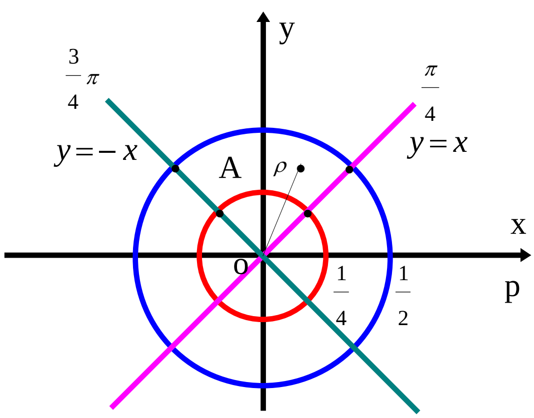
I segmenti BC e DE possono ridursi a punti, mentre gli archi BD e CE debbono essere incontrati al più in un punto dalle semirette uscenti dal polo.

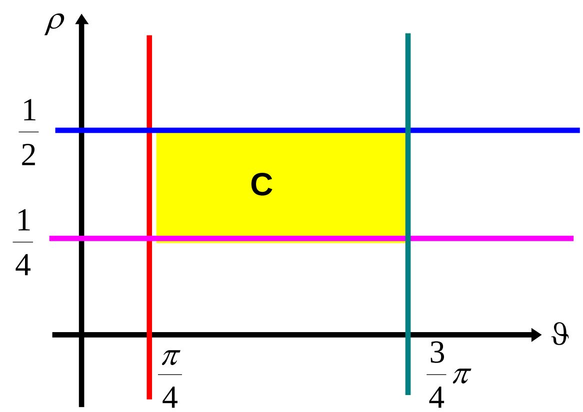
Calcolare $\displaystyle\iint_A \frac{1}{\left(tg\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\cdot\frac{1}{\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ dove **A** è il dominio del semipiano delle y positive compreso tra le circonferenze di centro l'origine degli assi cartesiani e raggi rispettivamente $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{2}$ e le due bisettrici degli assi cartesiani.

$$\iint_A \frac{1}{\left(tg\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\cdot\frac{1}{\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy=\iint_C \frac{1}{tg^3\rho}\cdot\frac{1}{\cos^2\rho}\cdot\frac{\cancel{\rho}\cos\vartheta}{\cancel{\rho^2}}\cdot\cancel{\rho}\,d\rho\,d\vartheta=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\cos\vartheta\int_{\frac14}^{\frac12}\frac{1}{tg^3\rho}\,d\,tg\,\rho=-\frac12\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\cos\vartheta\left[\frac{1}{tg^2\vartheta}\right]_{\frac14}^{\frac12}d\vartheta= \; =-\frac12\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\cos\vartheta\left[\frac{1}{tg^2\vartheta}\right]_{\frac14}^{\frac12}d\vartheta\;=$$

$$-\frac12\cdot\left(\frac{1}{tg^2\frac12}-\frac{1}{tg^2\frac14}\right)\cdot[sin\,\vartheta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac34\pi}\;=\;-\frac12\cdot\left(\frac{1}{tg^2\frac12}-\frac{1}{tg^2\frac14}\right)\cdot\left(\sin\frac44\pi-\sin\frac{\pi}{4}\right)=-\frac12\cdot\left(\frac{1}{tg^2\frac12}-\frac{1}{tg^2\frac14}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\right)=0$$





$$x^2+y^2=\frac{1}{16}\quad\Rightarrow\quad\rho^2\cdot\cos^2\vartheta+\rho^2\cdot\sin^2\vartheta=\frac{1}{16}\quad\Rightarrow\quad\rho^2=\frac{1}{16}\quad\Rightarrow\quad\rho=\frac14$$

$$x^2+y^2=\frac14\quad\Rightarrow\quad\rho^2\cdot\cos^2\vartheta+\rho^2\cdot\sin^2\vartheta=\frac14\quad\Rightarrow\quad\rho^2=\frac14\quad\Rightarrow\quad\rho=\frac12\quad\Rightarrow\quad\frac14\le\rho\le\frac12$$