Generalità sulle funzioni di tre variabili

Consideriamo la funzione $t=\Phi(x,y,z)$ $[A]$ Si tratta di una funzione di tre variabili x,y,z in quanto ad ogni terna di valori assegnati ad x,y,z corrisponde un solo valore di t. Il dominio della funzione $[A]$ è, in generale un volume o una porzione i superficie gobba, proprio perché le terne x,y,z descrivono punti dello spazio R^3. Così, ad esempio, dire che la funzione $t=\Phi(x,y,z)$ è definita nei punti x,y,z tali che $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ vuole dire che tale funzione acquista valori determinati in tutti i punti interni o sulla superfice della sfera di raggio R col centro coincidente con l'origine degli assi cartesiani. Dire che la funzione $t=\Phi(x,y,z)$ è definita nei punti x,y,z tali che $x^2+y^2+z^2=R^2$ vuole dire che tale funzione acquista valori determinati in ogni punto della superfice della sfera di raggio R col centro coincidente con l'origine degli assi cartesiani.

Cosa dobbiamo intendere quando diciamo che la funzione $t=\Phi(x,y,z)$ è una funzione definita e continua nei punti della superficie S di equazione $F(x,y,z)=0$? Significa che per ogni terna di valori x,y,z che soddisfa l'equazione $F(x,y,z)=0$ (punti della superficie S) la funzione $\Phi(x,y,z)$ è funzione dei punti $P(x,y,z)$ della superficie S e si può scrivere:

$$t=\Phi(x,y,z)=\Phi(P)$$

Supponiamo che sia possibile esplicitare rispetto alla variabile z l'equazione $f(x,y,z)=0$ [1] cioè che l'equazione di S si possa scrivere: $z=f(x,y)$ $[B]$

La funzione $\Phi[x,y,f(x,y)]$ ottenuta sostituendo la $[B]$ nella $[A]$, diventa funzione delle sole variabili x,y ed il suo dominio coincide con quello della funzione $z=f(x,y)$, cioè col dominio D del piano Oxy che si ottiene proiettando la superficie S sul piano Oxy. In tal modo ad ogni coppia $(x,y)\in D$ corrisponde un valore di $z=f(x,y)$ (figura 3.1.2) ed alla terna $x,y,z=f(x,y)$ corrisponde un valore della funzione $t=\Phi(x,y,z)=\Phi[x,y,f(x,y)]$.

[1] Ciò vuole dire che la superficie S è incontrata in un solo punto da ogni retta parallela all'asse z

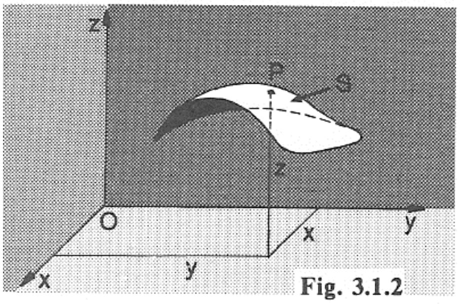


Fig. 3.1.2

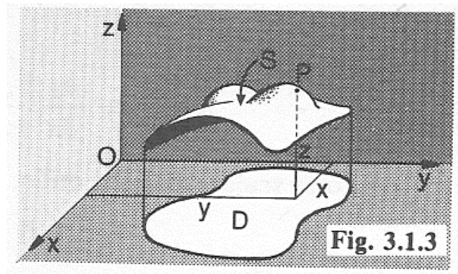


Fig. 3.1.3

Versore normale ad una superficie

La funzione di due variabili $z = f(x, y)$ $[3]$ rappresenta, geometricamente, una superficie **S** dello spazio R^3, cioè non giacente interamente su di un piano. Meglio se diciamo che il grafico della funzione $f(x,y)$ è una **superficie gobba** la cui equazione cartesiana è data dalla [3]. Qualche volta l'equazione di una superficie gobba è data in **forma implicita**: $F(x, y, y) = 0$ $[4]$

Un punto $P(x, y, z)$ di una superficie gobba **S** di equazione $F(x, y, z) = 0$ è detto **punto semplice** se in esso esistono continue e non tutte nulle le tre derivate prime parziali:

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} \quad , \; F_y = \frac{\partial F}{\partial y} \quad , \; F_z = \frac{\partial F}{\partial z}$$

Se le tre derivate parziali prime sono contemporaneamente nulle nello stesso punto o almeno una di esse non esiste, il punto **P** è detto **punto singolare**.

Una **retta è perpendicolare** in un punto P semplice della superficie S se è perpendicolare ad ogni curva passante per P e giacente su S.

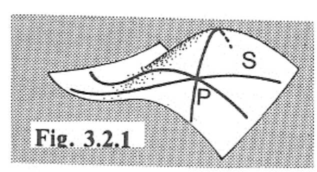


Fig. 3.2.1

Si può dimostrare che il vettore: $\vec{N} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \vec{k}$ $[5]$

è **perpendicolare** ad ogni curva passante per P e quindi perpendicolare ad S in $P(x, y, z)$.

Una retta, (e quindi anche un vettore) è **perpendicolare** ad **S** in **P**, se è perpendicolare in **P** ad ogni curva gobba passante per **P** e giacente su **S**.

Il vettore $\vec{N}$ (che dipende soltanto dal **punto semplice P** e non dalle infinite curve di **S** passanti per P) ha modulo:

$$N = \left|\vec{N}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \qquad [6]$$

e **coseni direttori** (coseni degli angoli formati da $\vec{N}$ e dai versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ dei tre assi cartesiani):

$$\cos\widehat{nx} = \frac{F_x}{N} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{N} \quad , \quad \cos\widehat{ny} = \frac{F_y}{N} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{N} \quad , \quad \cos\widehat{nz} = \frac{F_z}{N} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{N} \quad [7]$$

Il **versore** $\vec{n}$ in **P** (**versore normale**) vale: $\dfrac{\vec{N}}{N}$ cioè:

$$\vec{n} = \cos\widehat{nx} \cdot \vec{i} + \cos\widehat{ny} \cdot \vec{j} + \cos\widehat{nz} \cdot \vec{k} = \frac{F_x}{N} \cdot \vec{i} + \frac{F_y}{N} \cdot \vec{j} + \frac{F_z}{N} \cdot \vec{k} \quad \textbf{[8]}$$

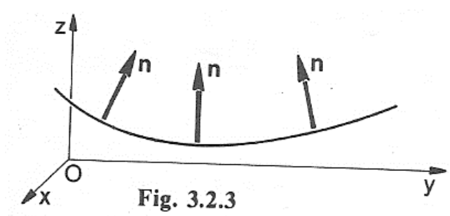


Fig. 3.2.3

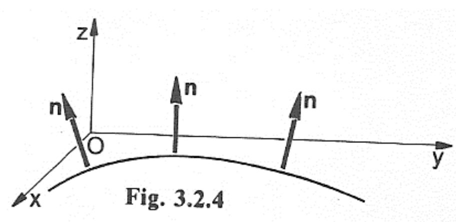


Fig. 3.2.4

Se l'equazione della superficie **S** è del tipo $z = f(x, y)$, allora la forma implicita $[4]$ assume una delle due espressioni:

$$[9] \qquad F(z,y,z) = z - f(x,y) = 0 \qquad\qquad F(z,y,z) = f(x,y) - z = 0 \quad [10]$$

Nel primo caso abbiamo:

$$[11] \qquad \vec{N} = -f_x \cdot \vec{i} - f_y \cdot \vec{j} + \vec{k} \qquad N = \left|\vec{N}\right| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \qquad [12]$$

$$\cos\widehat{nx} = \frac{-f_x}{N} \quad , \quad \cos\widehat{ny} = \frac{-f_y}{N} \quad , \quad \cos\widehat{nz} = \frac{1}{N} > 0 \quad [13]$$

Il $\cos\widehat{nz}$ è **sempre positivo**. Si parla in questo caso di **versore normale positivo**. Questo vuole dire che il **versore normale** $\vec{n}$ è **orientato** in modo da formare sempre un angolo acuto (al più retto) con l'asse **z**.

$$\vec{n} = \cos\widehat{nx} \cdot \vec{i} + \cos\widehat{ny} \cdot \vec{j} + \cos\widehat{nz} \cdot \vec{k} = -\frac{f_x}{N} \cdot \vec{i} - \frac{f_y}{N} \cdot \vec{j} + \frac{1}{N} \cdot \vec{k} \quad \text{Fig. } 3.2.3$$

Nel secondo caso ($[10]$) abbiamo:

$$[14] \qquad \vec{N} = f_x \cdot \vec{i} + f_y \cdot \vec{j} - \vec{k} \qquad N = \left|\vec{N}\right| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \qquad [15]$$

$$\cos\widehat{nx} = \frac{f_x}{N} \quad , \quad \cos\widehat{ny} = \frac{f_y}{N} \quad , \quad \cos\widehat{nz} = -\frac{1}{N} < 0 \quad [16]$$

Il $\cos\widehat{nz}$ è **sempre negativo**. Si parla in questo caso di **versore normale negativo**.

Ciò vuole dire che il versore normale $\vec{n}$ è orientato in modo da formare sempre un angolo ottuso (al più retto) col versore $\vec{k}$ dell'asse **z**.

$$\vec{n}=\cos\widehat{nx}\cdot\vec{i}+\cos\widehat{ny}\cdot\vec{j}+\cos\widehat{nz}\cdot\vec{k}=\frac{f_x}{N}\cdot\vec{i}+\frac{f_y}{N}\cdot\vec{j}-\frac{1}{N}\cdot\vec{k} \qquad [17] \qquad 3.2.4$$

Integrale superficiale di una funzione continua

Sia **S** una porzione di superficie regolare e sia:

- $P=P(u,v)=O+x(u,v)\cdot\vec{i}+y(u,v)\cdot\vec{j}+z(u,v)\cdot\vec{k}$ cioè $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$ [1]

una sua rappresentazione parametrica regolare, il cui dominio base **D** supporremo regolare.

- $F(x,y,z)=0$ la sua equazione cartesiana sotto forma implicita
- $z=f(x,y)$ la sua equazione cartesiana sotto forma esplicita

Sia inoltre $\Phi(x,y,z)$ una funzione continua in ogni punto $P(x,y,z)$ di **S**. Dividiamo la superficie **S** in **n** parti ognuna delle quali ha area ΔS_i ($i=1,2,\cdots\cdots,n$) e consideriamo la somma integrale :

$$\sum_{i=1}^{n}\Phi(P_i)\cdot\Delta S_i$$

Il limite di questa somma integrale quando $n\to+\infty$ in modo che il diametro massimo di ciascuna parte elementare tenda a zero è detto **integrale superficiale** della funzione $\Phi(x,y,z)$ esteso alla porzione di superficie **S** e si denota con uno dei seguenti simboli:

$$\iint_S \Phi(x,y,z)\cdot dS=\iint_S \Phi(P)\cdot dS=\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \delta_{\max}\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\Phi(P_i)\cdot\Delta S_i \qquad [2]$$

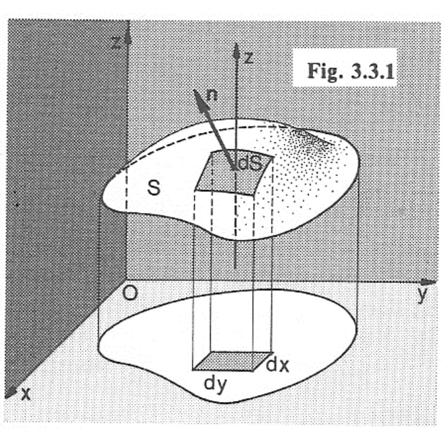
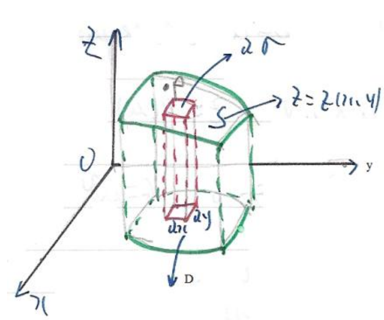


Fig. 3.3.1



Vediamo adesso come è possibile calcolare un **integrale superficiale**. Supponiamo che la superficie **S** abbia equazione $z = f(x,y)$ [3] e questa funzione sia definita e continua in tutti i punti del dominio normale **D**, proiezione ortogonale di **S** sul piano Oxy.

Consideriamo nel piano Oxy e nel dominio **D** un elemento infinitesimo di superficie $d\sigma = dx\,dy$

Questa superficie infinitesima $d\sigma$, proiettata ortogonalmente su **S**, dà l'elemento infinitesimo di superficie dS. Se $\vec{n}$ è il **versore normale positivo** a dS in un suo punto interno $P(x,y,z)$, la relazione che intercorre tra dS e $d\sigma$ è: $d\sigma = dx\,dy = dS \cdot \cos\widehat{nz}$ [18]

Se $\vec{n}$ fosse il **versore normale negativo** avremmo: [19] $d\sigma = dx\,dy = -dS \cdot \cos\widehat{nz}$

In ogni caso, comunque sia orientata la normale a dS è: $d\sigma = dx\,dy = dS \cdot \left|\cos\widehat{nz}\right|$ [20]

Tutto questo perché $dx\,dy$ e dS sono quantità sempre positive. Sia $\Phi(x,y,z)$ una funzione (di tre variabili) **continua** in tutti i punti della superficie **S**. Risulta:

$$\iint_S \Phi(x,y,z)\,dS = \iint_D \Phi(x,y,z) \cdot \frac{dx\,dy}{\left|\cos\widehat{nz}\right|} = \iint_D \Phi(x,y,z)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2} \cdot dx\,dy \qquad [21]$$

cioè l'**integrale superficiale** si riduce ad un **integrale doppio**. Formule simili si ottengono se **S** ha equazione $y = g(x,z)$ oppure $x = p(y,z)$.

Se la superficie **S** è data in forma parametrica:
$$\begin{cases} x = x(u,\mathrm{v}) \\ y = y(u,\mathrm{v}) \\ z = z(u,\mathrm{v}) \end{cases} \qquad [22]$$

la formula [21] diventa:
$$\iint_S \Phi(x,y,z)\,dS = \iint_C \Phi[x(u,\mathrm{v}), y(u,\mathrm{v}), z(u,\mathrm{v})]\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2} \cdot du\,d\mathrm{v} \qquad [23]$$

ove **C** è il dominio del piano $Ou\mathrm{v}$ corrispondente al dominio **D** del piano Oxy.

$EG - F^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ $\quad J_1$, J_2 , J_3 sono i **minori del secondo ordine** della **matrice Jacobiana**:

$$J(u,v) = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{v}} & \dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{v}} & \dfrac{\partial z}{\partial \mathrm{v}} \end{matrix} \right\| \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = x_u = x'(u)\ ,\ \frac{\partial y}{\partial u} = y_u = y'(u), \ldots\ldots, \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}} = z_{\mathrm{v}} = z'(\mathrm{v})$$

$$J_1(u,\mathrm{v}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}} \end{vmatrix} \qquad J_2(u,v) = -\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}} \end{vmatrix} \qquad J_3(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}} \end{vmatrix}$$ con:

$$\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2} = \sqrt{EG-F^2}$$ se:

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}} \quad G=\left(\frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\right)^2$$

Le equazioni parametriche della superficie S potrebbero essere espresse mediante coordinate polari. In questo caso avremmo: $\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho \operatorname{sins}\vartheta \\ z=f(x,y)=f(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)=g(\rho,\vartheta) \end{cases}$

Se la superficie S è rotonda allora una sua rappresentazione parametrica è la seguente:

$$\begin{cases} x = u\cdot\cos\mathrm{v} \\ y = u\cdot\sin\mathrm{v} \\ z = g(u) \end{cases}$$

Risulta: $E=1+\left[g'(u)\right]^2 \quad F=0 \quad G=u^2$

$$\iint_S \Phi(x,y,z)\,dS=\iint_C \Phi[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\cdot u\sqrt{1+\left[g'(u)\right]^2}\cdot du\,d\mathrm{v} \qquad [24]$$

Se $F(x,y,z)=0$ è l'equazione della superficie S abbiamo

$$N=\left|\vec{N}\right|=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \qquad [6]$$

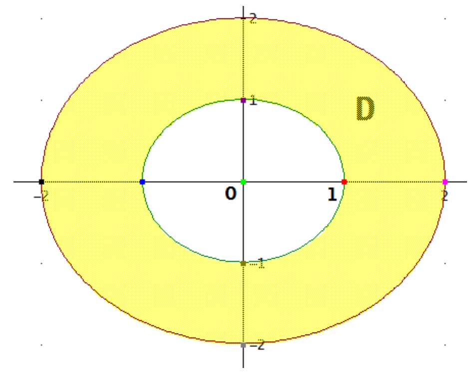
e quindi: $\iint_S \Phi(x,y,z)\,dS=\iint_D \Phi(x,y,z)\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\cdot dx\,dy$ $\quad [25]$

Calcolare il seguente integrale superficiale $\mathcal{J}=\iint_S\left(x^2+y^2\right)dS$ dove S è la parte di superficie del cono $z^2=4\left(x^2+y^2\right)$ limitata dai piani $z=2$ e $z=4$.

$S: z=f(x,y)=2\sqrt{x^2+y^2} \qquad 2\le z\le 4 \qquad \mathcal{J}=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\cdot dx\,dy$

$$f_x=2\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f_y=2\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$1+f_x^2+f_y^2=1+\frac{4x^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^2}{x^2+y^2}=1+\frac{4\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=5$$

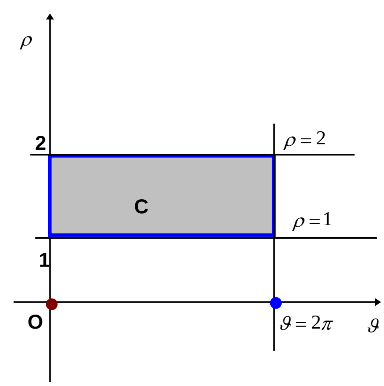


$$2\le z\le 4 \;\Rightarrow\; 2\le 2\sqrt{x^2+y^2}\le 4 \;\Rightarrow\; 1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2$$

$$\Rightarrow\; 1\le x^2+y^2\le 4 \qquad D=\left\{(x,y)\in R^2 : 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$$

$$\mathcal{J}=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\cdot dx\,dy=\iint_D\sqrt{5}\left(x^2+y^2\right)\cdot dx\,dy$$

Questo integrale doppio può essere facilmente risolto utilizzando le coordinate polari: $\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\,\text{sins}\,\vartheta \end{cases}$



$$x^2+y^2=1 \;\Rightarrow\; \rho=1 \qquad x^2+y^2=4 \;\Rightarrow\; \rho=2$$

$$1\le x^2+y^2\le 4 \;\Rightarrow\; 1\le\rho\le 2 \;\wedge\; 0\le\vartheta\le 2\pi$$

Al dominio D del piano Oxy corrisponde il dominio C del piano $O\vartheta\rho$

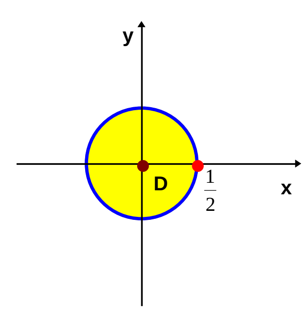
$$C=\left\{(\rho,\vartheta)\in R^2 : 1\le\rho\le 2 \;\wedge\; 0\le\vartheta\le 2\pi\right\}$$

$$\mathcal{J}=\iint_D\sqrt{5}\left(x^2+y^2\right)\cdot dx\,dy=\sqrt{5}\iint\left(\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta\right)\cdot\rho\cdot d\rho\,d\vartheta=\sqrt{5}\iint_C\rho^3\cdot d\rho\,d\vartheta$$

$$\mathcal{J}=\sqrt{5}\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_1^2\rho^3\cdot d\rho=\sqrt{5}\left[\vartheta\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_1^2=\sqrt{5}\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right]=2\sqrt{5}\pi\left[4-\frac{1}{4}\right]=\frac{15}{2}\sqrt{5}\pi$$

Determinare il valore del seguente integrale di superficie $\iint_S z\cdot dS$ dove S è la parte di ellissoide di equazione $4x^2+4y^2+z^2=1$ situata nel semipiano $z\ge 0$.

$$S: 4x^2+4y^2+z^2=1 \;\wedge\; z\ge 0 \;\Rightarrow\; z=\sqrt{1-4x^2-4y^2}$$

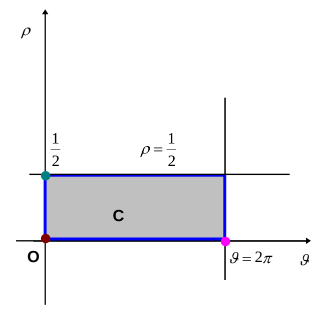


La parte considerata di ellissoide è rappresentata dalla funzione:

$z=\sqrt{1-4x^2-4y^2}$ il cui dominio si ricava risolvendo la disequazione: $1-4x^2-4y^2\ge 0 \;\Rightarrow\; x^2+y^2\le\frac{1}{4}$

$$D=\left\{(x,y)\in R^2 : 4\left(x^2+y^2\right)\le 1\right\}$$

La parte considerata di ellissoide può essere rappresentata, utilizzando le coordinate polari, dalle seguenti equazioni parametriche: $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho \sin s\,\vartheta \\ z = \sqrt{1-4\rho^2} \end{cases}$ $\quad 1-4x^2-4y^2 = 1-4\left(\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\cos^2\vartheta\right) = 1-4\rho^2$



$$x^2+y^2 \le \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \rho^2 \le \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; 0 \le \rho \le \frac{1}{2} \wedge \wedge 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

Al dominio D del piano Oxy corrisponde il dominio C del piano $O\vartheta\rho$ $\quad C = \left\{(\rho,\vartheta) \in R^2 : 0 \le \rho \le \frac{1}{2} \wedge 0 \le \vartheta \le 2\pi\right\}$

$$J(\rho,\vartheta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & \frac{-4\rho}{\sqrt{1-4\rho^2}} \\ -\rho\cdot\sin\vartheta & \rho\cdot\cos\vartheta & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_1(\rho,\vartheta) = \begin{vmatrix} \sin\vartheta & \frac{-4\rho}{\sqrt{1-4\rho^2}} \\ \rho\cdot\cos\vartheta & 0 \end{vmatrix} = \frac{4\rho^2\cdot\cos\vartheta}{\sqrt{1-4\rho^2}} \qquad J_2(\rho,\vartheta) = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & \frac{-4\rho}{\sqrt{1-4\rho^2}} \\ -\rho\cdot\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} = \frac{4\rho^2\cdot\sin\vartheta}{\sqrt{1-4\rho^2}}$$

$$J_3(\rho,\vartheta) = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\rho\cdot\sin\vartheta & \rho\cdot\cos\vartheta \end{vmatrix} = \rho\cdot\cos^2\vartheta + \rho\cdot\sin^2\vartheta = \rho \qquad \vec{N} = \frac{4\rho^2\cdot\cos\vartheta}{\sqrt{1-4\rho^2}}\cdot\vec{i} + \frac{4\rho^2\cdot\sin\vartheta}{\sqrt{1-4\rho^2}}\cdot\vec{j} + \rho\cdot\vec{k}$$

$$\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2} = \sqrt{\frac{16\rho^4\cdot\cos^2\vartheta}{1-4\rho^2} + \frac{16\rho^4\cdot\sin^2\vartheta}{1-4\rho^2} + \rho^2} = \sqrt{\frac{16\rho^4\cdot\cos^2\vartheta + 16\rho^4\cdot\sin^2\vartheta}{1-4\rho^2} + \rho^2}$$

$$\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2} = \sqrt{\frac{16\rho^4\cdot\left(\cos^2\vartheta + \mathrm{in}^2\,\vartheta\right)}{1-4\rho^2} + \rho^2} = \sqrt{\frac{16\rho^4}{1-4\rho^2} + \rho^2} = \rho\sqrt{\frac{16\rho^2}{1-4\rho^2} + \rho^2} = \rho\sqrt{\frac{12\rho^2+1}{1-4\rho^2}}$$

$$\mathcal{J} = \iint_S z\cdot dS = \iint_D \sqrt{1-4x^2-4y^2}\cdot dx\cdot dy = \iint_C \cancel{\sqrt{1-4\rho^2}}\cdot\rho\sqrt{\frac{12\rho^2+1}{\cancel{1-4\rho^2}}}\cdot d\rho\cdot d\vartheta$$

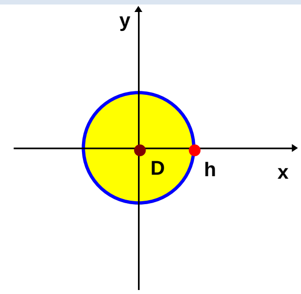
$$\mathcal{J} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{1}{2}} \rho\sqrt{12\rho^2+1}\cdot d\rho = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{1}{2}} \rho\left(12\rho^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot d\rho = \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{1}{24}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(12\rho^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot d\left(12\rho^2+1\right)$$

$$\mathcal{J} = [\vartheta]_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{24}\left[\frac{\left(12\rho^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\pi\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(12\rho^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{18}\cdot\pi\left[\left(12\frac{1}{4}+1\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{\pi}{18}\left[(3+1)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

$$\mathcal{J} = \frac{\pi}{18}\left[\sqrt{2^6} - 1\right] = \frac{\pi}{18}[8-1] = \frac{7}{18}\pi$$

Calcolare l'integrale superficiale $\iint\limits_S \Phi(x,y,z)\,dS = \iint\limits_S z\,dS$ esteso alla superficie di equazione $z^2 = x^2 + y^2$ con $0 \le z \le h$ ed $h > 0$.

$\mathcal{J} = \iint\limits_S z\,dS \quad z^2 = x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$



$$0 \le z \le h \;\Rightarrow\; 0 \le \sqrt{x^2+y^2} \le h$$

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : 0 \le \sqrt{x^2+y^2} \le h\right\}$$

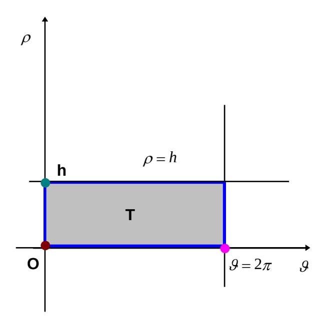
$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

L'integrale superficiale si risolve come un integrale doppio: al posto di dS si pone $\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\cdot dx\,dy$, al posto di **z** si pone la sua espressione, cioè: $\sqrt{x^2+y^2}$.

Il dominio **D** di integrazione è la regione del piano Oxy in cui si proietta la superficie sulla quale è definito l'integrale superficiale. Nel caso in esame la superficie è una superficie conica, con il vertice nell'origine degli assi cartesiani, che si proietta nella circonferenza di equazione: $x^2+y^2=h^2$ in virtù della limitazione $0 \le z \le h$ e ricordando che risulta $h > 0$.

$$\iint\limits_S z\,dS = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \sqrt{2}\cdot\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot dx\,dy$$

Passando a coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sins}\,\vartheta \end{cases}$ otteniamo:



$$0 \le \sqrt{x^2+y^2} \le h \quad\Rightarrow\quad 0 \le \rho \le h \;\wedge\; 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

Al dominio D del piano Oxy corrisponde il dominio C del piano $O\vartheta\rho$

$$T = \left\{(\rho,\vartheta) \in R^2 : 0 \le \rho \le h \;\wedge\; 0 \le \vartheta \le 2\pi\right\}$$

$$\mathcal{J} = \iint\limits_S z\,dS = \sqrt{2}\cdot\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot dx\,dy = \iint\limits_T \sqrt{2}\cdot\rho^2\,d\rho\,d\vartheta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^h \rho^2\,d\rho = \sqrt{2}\cdot[\vartheta]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^h$$

$$\mathcal{J} = \sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}h^3 = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}h^3$$

Calcolo dell'area di una superficie curva (gobba)

Nel caso in cui $\Phi(x,y,z)=1$ l'integrale superficiale $\iint_S \Phi(x,y,z)\,dS = \iint_S dS = S$ esprime l'area della superficie S. Se la funzione $\Phi(x,y,z)$ è identicamente uguale all'unità, allora la [21] ci fornisce l'area della superficie **S** di equazione $z=f(x,y)$:

$$S=\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\cdot dx\,dy \qquad \textbf{[24]}$$

La stessa area, in coordinate polari, è data da:

$$S=\iint_C \sqrt{\rho^2+\rho^2\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right)^2}\cdot d\rho\, d\vartheta=\iint_C \sqrt{\rho^2+\rho^2\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial \vartheta}\right)^2}\cdot d\rho\, d\vartheta \qquad [25]$$

dove le formule $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$ consentono il cambio delle variabili.

$$z=f(x,y)=f(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)=g(\rho,\vartheta)$$

ove **C** è il dominio del piano $O\rho\vartheta$ corrispondente al dominio **D** del piano Oxy. Quindi le equazioni parametriche della superficie S sono: $\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\,\text{sins}\,\vartheta \\ z=f(x,y)=f(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)=g(\rho,\vartheta)\end{cases}$

Se $F(x,y,z)=0$ è l'equazione della superficie S abbiamo

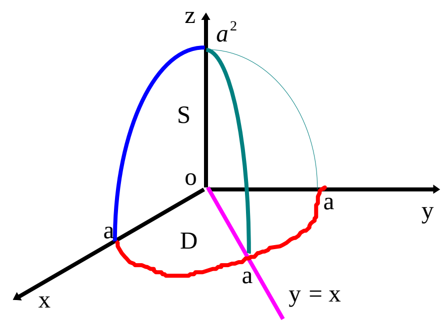
e quindi: $S=\iint_S 1\cdot dS=\iint_D \sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\cdot dx\,dy \qquad [25]$

Se la superficie **S** è data in forma parametrica: $\begin{cases} x=x(u,\text{v}) \\ y=y(u,\text{v}) \\ z=z(u,\text{v})\end{cases} \quad [22]$

abbiamo: $\iint_S 1\cdot dS=\iint_C \sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}\cdot du\,d\text{v}$

ove **C** è il dominio del piano $Ou\text{v}$ corrispondente al dominio **D** del piano Oxy.

Calcolare l'area S della parte di superficie di paraboloide rotondo $z = a^2 - (x^2 + y^2)$ contenuta nel I ottante ed intercettata dai piani $y = 0$ ed $y = x$.



Posto $f(x, y) = a^2 - (x^2 + y^2)$ otteniamo: $f_x = -2x$, $f_y = -2y$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot dx\,dy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \cdot dx\,dy$$

essendo **D** il settore circolare indicato in figura. Passando da coordinate cartesiane a coordinate polari otteniamo: $S = \iint_D \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho\, d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_0^a \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho = \frac{\pi}{48}\left(\sqrt{\left(1 + 4a^2\right)^3} - 1\right)$