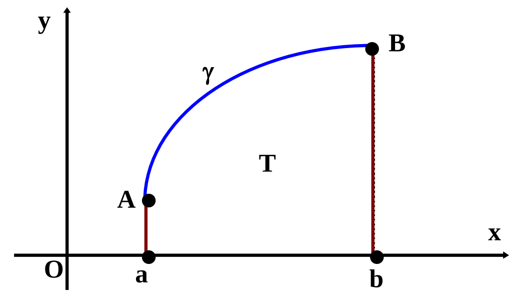
Area di una superficie piana

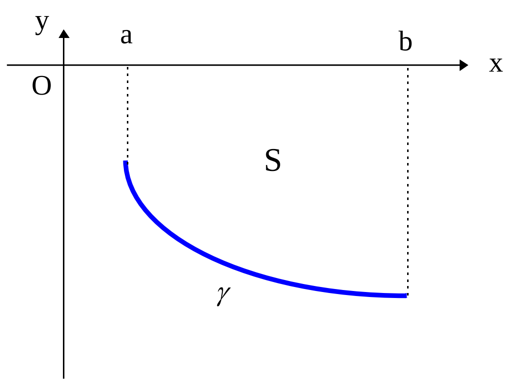
L'area **S** della superficie del trapezoide si ottiene applicando la seguente formula:

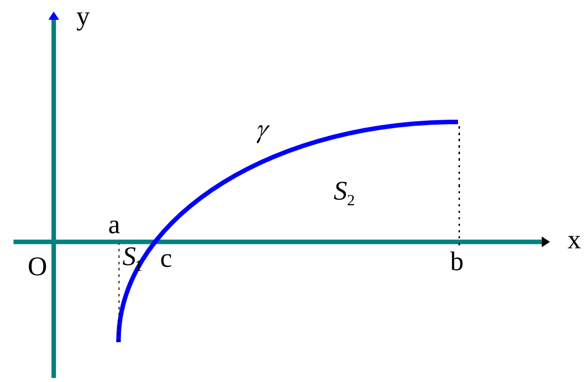
$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad [1]$$



Se risulta $f(x) \leq 0 \ \forall \ x \in [a,b]$ è $\int_a^b f(x)dx < 0$ e quindi :

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx = -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx \qquad [2]$$



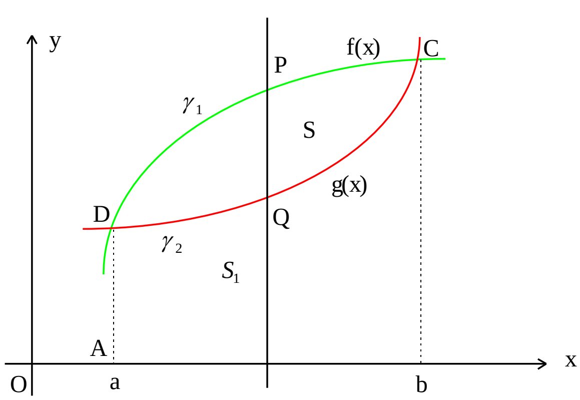


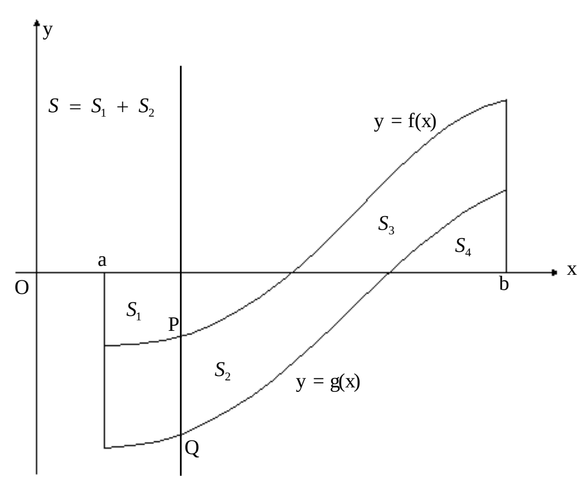
Nel caso della figura abbiamo:

$$S = S_1 + S_2 = \int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad [3]$$

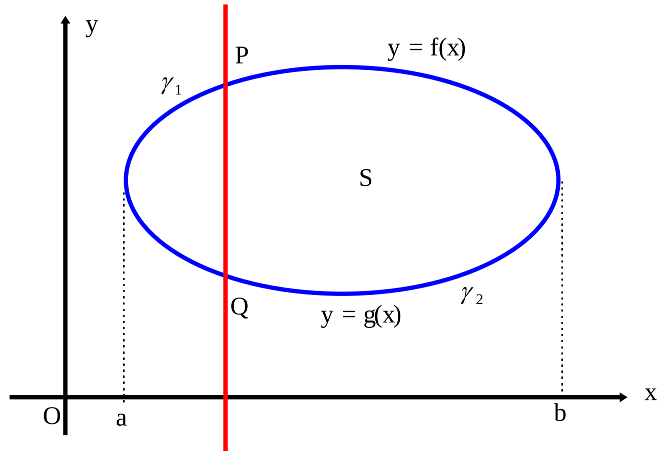
$y = f(x)$ e $y = g(x)$ con $f(x) \geq g(x) \ \forall \ x \in [a,b]$ allora :

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \qquad [4]$$



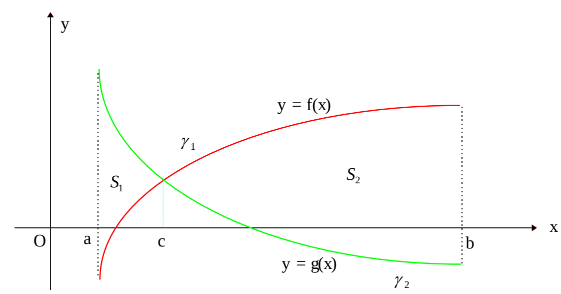


A volte la curva γ può essere assegnata mediante un'equazione del tipo $F(x,y) = 0$ la quale definisce implicitamente le funzioni $y = f(x)$ ed $y = g(x)$ corrispondenti ai due archi di curva γ_1 e γ_2 . Anche in questo caso continua a sussistere la formula **[4]** .



Se $c \in]a,b[$, se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,c]$, se $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [c,b]$, l'area S della regione finita di piano individuata dalle curve γ_1 e γ_2 , dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = a$, $x = b$ vale:

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c [g(x) - f(x)]dx + \int_c^b [f(x) - g(x)]dx$$

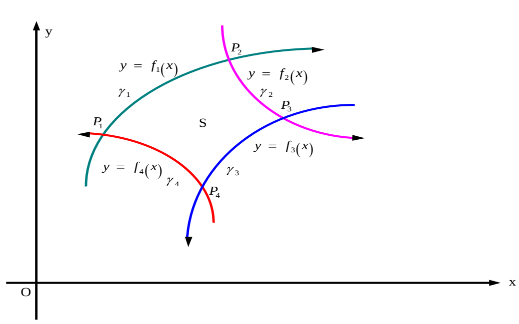


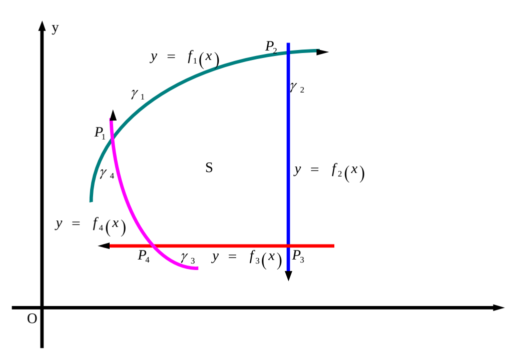
Calcolo dell'area S di una superficie avente come contorno i grafici di due o più funzioni: metodo della circuitazione

Sia **S** l'area della regione finita di piano individuata dai grafici $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ delle funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$. Fissato sul contorno di **S** come verso di percorrenza quello orario, calcoliamo le coordinate dei punti d'intersezione fra i vari grafici. Se troviamo:

$$P_1(x_1,y_1) = \gamma_1 \cap \gamma_4 \ , \ P_2(x_2,y_2) = \gamma_1 \cap \gamma_2 \ , \ P_3(x_3,y_3) = \gamma_2 \cap \gamma_3 \ , \ P_4(x_4,y_4) = \gamma_3 \cap \gamma_4$$

abbiamo: $S = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f_2(x)dx + \int_{x_3}^{x_4} f_3(x)dx + \int_{x_4}^{x_1} f_1(x)dx$





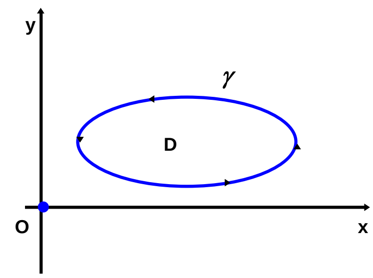
Se qualcuno dei grafici $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ è un **segmento verticale**, allora il corrispondente integrale definito è **nullo** sia per avere uguali gli estremi di integrazione sia per avere $dx = 0$. Pertanto tale integrale può essere trascurato . Nel caso della figura abbiamo :

$$S=\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)dx+\int_{x_2}^{x_3} f_2(x)dx+\int_{x_3}^{x_4} f_3(x)dx+\int_{x_4}^{x_1} f_1(x)dx=\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)dx+\int_{x_3}^{x_4} f_3(x)dx+\int_{x_4}^{x_1} f_1(x)dx$$

Area di un dominio piano mediante un integrale doppio

L'area S di un dominio piano D ci viene fornita dal seguente integrale doppio:

$$S=\iint_D dx\,dy$$



dove γ è la frontiera del dominio D.

Mediante le relazioni $\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta \end{cases}$ $\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \vartheta=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$ si passa dalle coordinate cartesiane a quelle polari e viceversa. Così facendo l'integrale doppio $\iint_D dx\,dy$ può essere calcolato utilizzando le coordinate polari. Si ottiene: $S=\iint_D dx\,dy=\iint_C \rho\cdot d\rho\cdot d\vartheta$

Utilizzando le formule di Green Gauss nel piano possiamo calcolare l'area S di un dominio piano D avente come frontiera la curva piana γ percorsa in senso antiorario (verso positivo) mediante uno dei tre seguenti integrali curvilinei: $S=\int_\gamma x\cdot dy=-\int_\gamma y\cdot dx=\frac{1}{2}\int_\gamma (x\cdot dy-y\cdot dx)$

Di solito la curva γ è assegnata mediante le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad t_1\le t\le t_2$$

In tal caso, se un suo generico punto, al variare del parametro t dal valore t_1 al valore t_2, la descrive in senso antiorario, abbiamo:

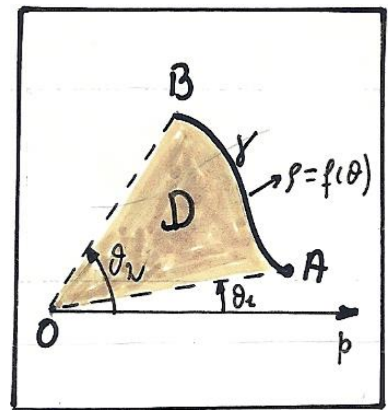
$$S=\int_{t_1}^{t_2} x(t)\cdot y'(t)\cdot dt=-\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)\cdot dt=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[x(t)\cdot y'(t)-y(t)\cdot x'(t)\right]\cdot dt$$

Quando γ è assegnata mediante un'equazione cartesiana, il calcolo dell'area S del dominio piano D avente come frontiera la curva piana γ non è sempre semplice.

Area di un dominio piano in coordinate polari

In un piano riferito ad un sistema di coordinate polari $O\vartheta\rho$, consideriamo una curva γ di equazione $\rho = f(\vartheta)$ essendo $f(\vartheta)$ una funzione definita, continua e non negativa in un intervallo $[\vartheta_1, \vartheta_2]$. Esaminiamo i tre seguenti casi:

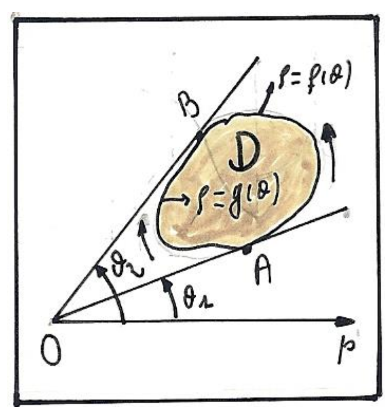
(1) La curva γ un arco



In questo caso l'area S del dominio D delimitato da γ e dai segmenti OA ed OD, rispettivamente di anomalie ϑ_1 e ϑ_2, è espressa da:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [f(\vartheta)]^2 \cdot d\vartheta$$

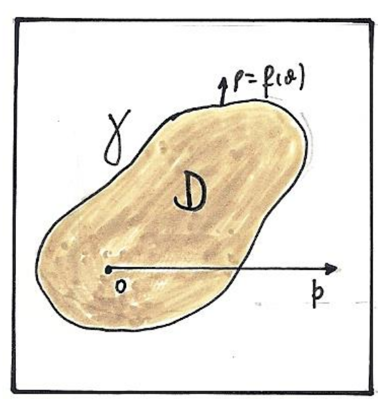
(2) La curva γ è semplice, chiusa e non contiene il polo al suo interno



In questo caso il dominio piano D individuato dalla curva γ è polarmente normale in quanto ogni raggio polare di anomalia $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$ incontra la frontiera in due soli punti detti, rispettivamente, punto di ingresso e punto di uscita. L'area del dominio D è espressa da: $S = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left\{[f(\vartheta)]^2 - [g(\vartheta)]^2\right\} \cdot d\vartheta$

Avendo indicato con $\rho = f(\vartheta)$ e $\rho = g(\vartheta)$ rispettivamente le equazioni polari delle curve piane luogo dei punti di ingresso e di uscita.

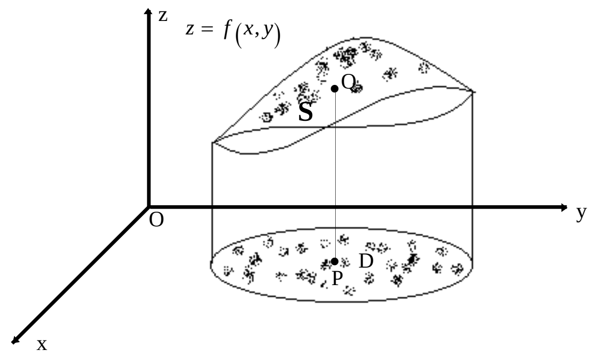
(3) La curva γ è semplice, chiusa, contiene il polo O al suo interno ed il dominio D delimitato da γ è descritto da un raggio vettore che compie un solo giro intero intorno al polo O.



Se $\rho = f(\vartheta)$ è l'equazione polare della curva piana γ, l'area S del dominio D è espressa da: $S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} [f(\vartheta)]^2 \cdot d\vartheta$

Calcolo dell'area di una superficie curva (gobba)

Nel caso in cui $\Phi(x,y,z)=1$ l'integrale superficiale $\iint_S \Phi(x,y,z)\,dS=\iint_S dS=S$ esprime l'area della superficie S. Se la funzione $\Phi(x,y,z)$ è identicamente uguale all'unità, allora la [21] ci fornisce l'area della superficie **S** di equazione $z=f(x,y)$:



$$S=\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\cdot dx\,dy \qquad [24]$$

dove D è la proiezione ortogonale della superficie S sul piano Oxy. Utilizzando le notazioni di Monge, $p=f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\quad q=f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}$ abbiamo: $S=\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dx\,dy$

La stessa area, in coordinate polari, è data da:

$$S=\iint_C \sqrt{\rho^2+\rho^2\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right)^2}\cdot d\rho\,d\vartheta=\iint_C \sqrt{\rho^2+\rho^2\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial\vartheta}\right)^2}\cdot d\rho\,d\vartheta \qquad [25]$$

dove le formule $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$ consentono il cambio delle variabili.

$$z=f(x,y)=f(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)=g(\rho,\vartheta)$$

ove **C** è il dominio del piano $O\rho\vartheta$ corrispondente al dominio **D** del piano Oxy. Quindi le equazioni parametriche della superficie S sono: $\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin s\,\vartheta \\ z=f(x,y)=f(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)=g(\rho,\vartheta) \end{cases}$

Se $F(x,y,z)=0$ è l'equazione della superficie S abbiamo

e quindi: $S=\iint_S 1\cdot dS=\iint_D \sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\cdot dx\,dy$ $\qquad [25]$

Se la superficie **S** è data in forma parametrica: $\begin{cases} x=x(u,\text{v}) \\ y=y(u,\text{v}) \\ z=z(u,\text{v}) \end{cases}$ $\quad [22]$

abbiamo: $\iint_S 1\cdot dS=\iint_C \sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}\cdot du\,d\text{v}=\iint_C \sqrt{EG-F^2}\cdot du\,d\text{v}$

ove **C** è il dominio del piano $Ou\text{v}$ corrispondente al dominio **D** del piano Oxy.

$EG-F^2=J_1^2+J_2^2+J_3^2$ J_1 , J_2 , J_3 sono i **minori del secondo ordine** della **matrice**

Jacobiana: $J(u,v) = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{matrix} \right\|$ sapendo che:

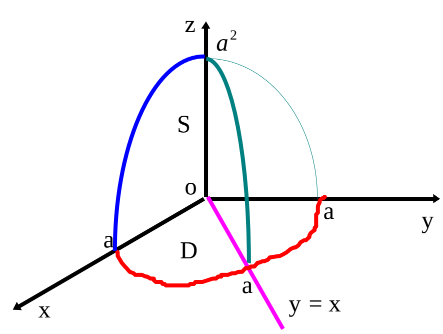
$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_u = x'(u), \quad \frac{\partial y}{\partial u} = y_u = y'(u), \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial v}=z_v=z'(v)$$

$$J_1(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad J_2(u,v) = -\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad J_3(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$ con:

$$\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2} = \sqrt{EG-F^2}$$ se:

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} \quad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

Calcolare l'area S della parte di superficie di paraboloide rotondo $z=a^2-(x^2+y^2)$ contenuta nel I ottante ed intercettata dai piani $y=0$ ed $y=x$.



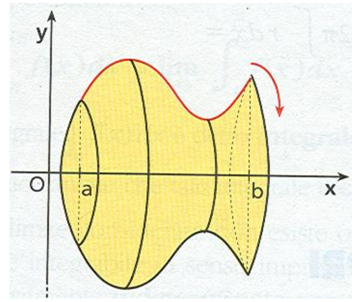
Posto $f(x,y)=a^2-(x^2+y^2)$ otteniamo: $f_x=-2x$, $f_y = -2y$

$$S=\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\cdot dx\,dy=\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\cdot dx\,dy$$

essendo **D** il settore circolare indicato in figura. Passando da coordinate cartesiane a coordinate polari otteniamo: $S=\iint_D \sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho\cdot d\rho\, d\vartheta=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta\int_0^a \rho\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho=\frac{\pi}{48}\left(\sqrt{\left(1+4a^2\right)^3}-1\right)$

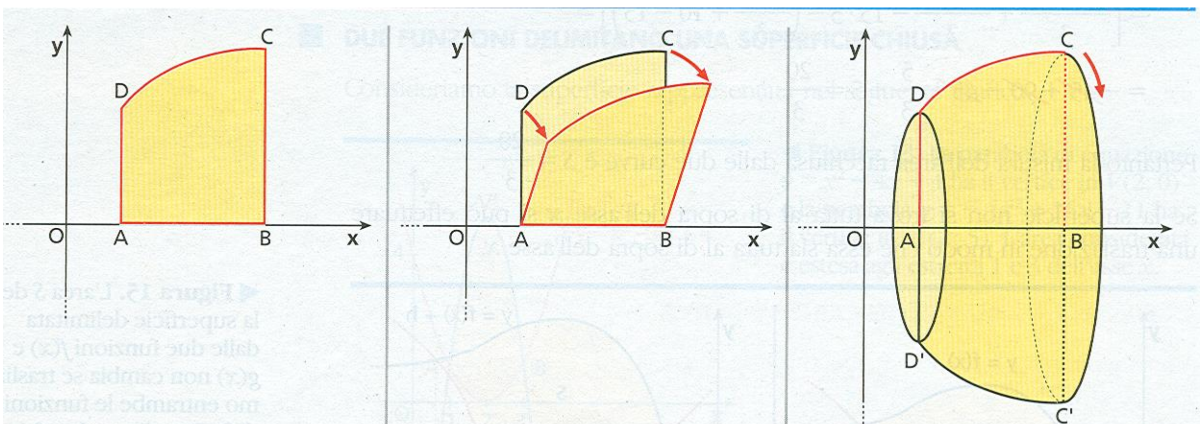
Superficie di rotazione

La superficie S è generata dalla rotazione completa attorno all'asse x di un arco di curva piana γ.



$$\gamma : y = f(x) \quad a \le x \le b \quad \Rightarrow \quad S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} \cdot dx$$

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \le t \le b \quad S = 2\pi \int_a^b y(t) \cdot \sqrt{\left[x'(t) \right]^2 + \left[y'(t) \right]^2} \cdot dt$$

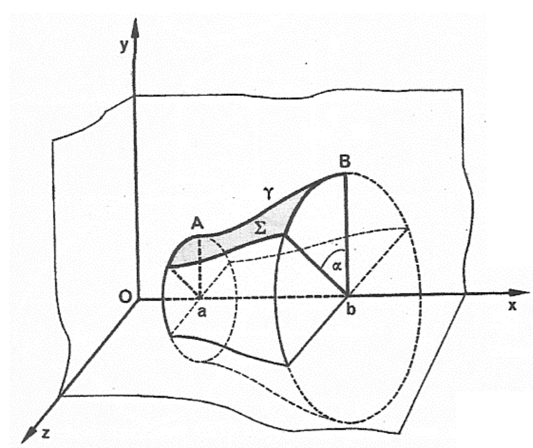


a. È dato il trapezoide *ABCD*. b. Ruotiamo il trapezoide attorno all'asse *x* (il lato *AB* rimane fisso). c. Abbiamo ottenuto il solido generato dalla rotazione di 360° del trapezoide attorno all'asse *x*.

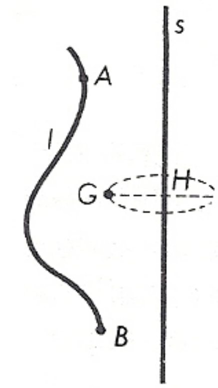
Se l'arco di curva piana γ compie una rotazione di ampiezza α (misurato in radianti) abbiamo:

$$S = \alpha \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} \cdot dx$$

$$S = \alpha \int_a^b y(t) \cdot \sqrt{\left[x'(t) \right]^2 + \left[y'(t) \right]^2} \cdot dt$$



Primo teorema di Pappo Guldino



L'**area della superficie** generata dalla rotazione completa di una linea piana limitata γ intorno ad una retta che non l'attraversi, è uguale al prodotto della misura ℓ di tale linea per la misura C della circonferenza descritta dal baricentro G della linea stessa.

$$S = \ell \cdot C = \ell \cdot 2\pi d$$

dove d è la distanza del baricentro G dall'asse di rotazione, cioè d è il raggio della circonferenza descritta dal punto G nella sua rotazione.

Nel caso di una rotazione di un angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$ abbiamo: $S = \ell \cdot C_\alpha = \ell \cdot \alpha d$ dove $C_\alpha = \alpha \cdot d$ rappresenta la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto dal baricentro nella rotazione dell'angolo α.

Secondo teorema di Pappo Guldino

Il **volume** del solido di rotazione generato dalla rotazione di una regione finita di piano intorno ad un asse che non l'attraversi è dato dal prodotto dell'area della regione per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro.