Principio di Identità dei polinomi

• Considero un polinomio di grado n (con n numero naturale assoluto) di una variabile reale o complessa x:

$$\boxed{A_n(x) = a_0 x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n = \sum_{0}^{n} {}_i \, a_i \, x^{n-i}} \quad (1) \quad a_0 \neq 0$$

Le costanti a_i sono i COEFFICIENTI del polinomio

Teorema

« Un polinomio di grado n che si annulli per $n+1$ valori distinti della variabile x è IDENTICAMENTE NULLO ».

Dimostrazione

Supponiamo che il polinomio si annulli quando x assuma i valori distinti x_k ($k = 0, 1, 2, \dots n$).
Si avrà il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n = 0 \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_1 + a_n = 0 \\ \dots \qquad \dots \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_n + a_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Si tratta di un sistema omogeneo di $n+1$ equazioni lineari nelle $n+1$ incognite a_i. Il determinante del sistema (determinante dei coefficienti delle incognite) è:

$$D = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots\dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & & x_1 & 1 \\ \dots & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & & x_n & 1 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_3-x_0)\dots\dots(x_n-x_0)\,\cdot \\ &\cdot(x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots\dots(x_n-x_1)\,\cdot \\ &\cdot\qquad(x_3-x_2)\dots\dots(x_n-x_{n-1}) \end{aligned}$$

(3

che è il determinante di Cauchy-Vandermonde o determinante delle differenze, il quale non si annulla quando i valori $x_0, x_1, \dots, x_n$ sono distinti.
Pertanto il sistema ammette l'unica soluzione:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots\ a_{n-1} = a_n = 0$$

cioè il polinomio è identicamente nullo.

... Un polinomio si dice Identicamente Nullo quando ha tutti i coefficienti

... Per i polinomi i concetti di uguaglianza e di identità coincidono

Principio d'identità dei polinomi

« Due polinomi, entrambi di grado non superiore ad n, che assumono gli stessi valori per $n+1$ valori distinti della variabile, sono IDENTICI, cioè hanno lo stesso grado e gli stessi coefficienti nei termini simili »

Dimostrazione:

$$A_n(x) = \sum_{0}^{n} {}_i\, a_i\, x^{n-i}$$

$$B_n(x) = \sum_{0}^{n} {}_i\, b_i\, x^{n-i}$$

Considero il polinomio differenza (di grado n)

$$A_n(x) - B_n(x) = (a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})x + (a_n - b_n) =$$

$$= \sum_{0}^{n} {}_i\, (a_i - b_i)\, x^{n-i}$$

Tale polinomio si annulla per $n+1$ valori distinti della variabile, quindi è identicamente nullo, cioè: $a_i - b_i = 0$ cioè

$a_0 - b_0 = 0$; $a_1 - b_1 = 0$; ..... ; $a_{n-1} - b_{n-1} = 0$; $a_n - b_n = 0$

quindi:

$a_0 = b_0$; $a_1 = b_1$; .... ; $a_{n-1} = b_{n-1}$; $a_n = b_n$

C.V.D.

Divisione di due polinomi

Dati due polinomi $A_n(x)$ [di grado n] e $B_m(x)$ [di grado $m \leq n$] è sempre possibile determinare in un solo modo due polinomi in x $Q_{n-m}(x)$ [di grado $n-m$] ed $R_{m-1}(x)$ [di grado al massimo uguale ad $m-1$] tale da aversi identicamente:

$$\boxed{\begin{gathered} A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x) \\ \text{o ciò che è la stessa cosa} \\ \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)} \end{gathered}} \qquad (4)$$

Scriviamo per esteso i polinomi considerati: (5)

$$\left.\begin{aligned} A_n(x) &= a_0 x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1} \cdot x + a_n = \sum_0^n {}_i\, a_i \cdot x^{n-i} \\ B_m(x) &= b_0 x^m + b_1 \cdot x^{m-1} + \qquad + b_{m-1} x + b_m = \sum_0^m {}_i\, b_i \cdot x^{m-i} \end{aligned}\right\} \text{i cui coefficienti sono noti}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_{n-m}(x) &= q_0 \cdot x^{n-m} + q_1 \cdot x^{n-m-1} + \dots + q_{n-m-1} \cdot x + q_{n-m} = \sum_0^{n-m} {}_k\, q_k \cdot x^{n-m-k} \\ R_{m-1}(x) &= r_0 x^{m-1} + r_1 x^{m-2} + \dots\dots + r_{m-2} x + r_{m-1} = \sum_0^{m-1} {}_k\, r_k\, x^{m-1-k} \end{aligned}\right\} \text{i cui coefficienti sono da determinare}$$

Es.

polinomi dati

$$\boxed{a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5} = \boxed{(b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3)} \cdot (q_0 x^2 + q_1 x + q_2) +$$
$$+ (r_0 x^2 + r_1 x + r_2) =$$
$$= b_0 q_0 x^5 + (b_1 q_0 + b_0 q_1) x^4 + (b_2 q_0 + b_1 q_1 + b_0 q_2) x^3 + (b_3 q_0 + b_2 q_1 + b_1 q_2 + r_0) x^2 +$$
$$+ (b_3 q_1 + b_2 q_2 + r_1) x + b_3 q_2 + r_2$$

Si tratta adesso di fare vedere che applicando alle (4) il principio d'identità dei polinomi, è possibile determinare in modo unico i coefficienti incogniti dei polinomi $Q(x)$, $R(x)$.
Si ottiene:

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \underline{q_0} \\ a_1 = b_1 q_0 + b_0 \underline{q_1} \\ a_2 = b_2 q_0 + b_1 q_1 + b_0 \underline{q_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-m} = b_{n-m} q_0 + b_{n-m-1} q_1 + \cdots\cdots + b_0 q_{n-m} \end{cases} \qquad n-m+1 \text{ equazioni}$$

$$\begin{cases} a_{n-m+1} = b_{n-m+1} q_0 + b_{n-m} q_1 + \cdots\cdots + b_1 q_{n-m} + r_0 \\ a_{n-m+2} = b_{n-m+2} q_0 + b_{n-m+1} q_1 + \cdots\cdots + b_2 q_{n-m} + r_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n = b_{\cancel{m}} q_{n-m} + \cancel{r_{m-1}} \qquad b_m q_{n-m} + r_{m-1} \end{cases} \qquad m \text{ equazioni}$$

che è un sistema formato da $n+1$ equazioni nelle $n+1$ incognite [$n-m+1$ incognite q ed m incognite r].
La soluzione di questo sistema esiste ed è unica.
Infatti dalla prima equazione si ricava in modo unico q_0, dalla seconda (noto già il valore di q_0) si ricava in modo unico q_1 ecc...

$A(x)$ = DIVIDENDO $\qquad$ $B(x)$ = DIVISORE

$Q(x)$ = quoziente
$R(x)$ = resto

della divisione del polinomio $A(x)$ per il polinomio $B(x)$

... Per chiarire le idee facciamo:

$$A_5(x) = a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$$

$$B_2(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$$

Risulta

$$Q(x) = q_0x^3 + q_1x^2 + q_2x + q_3$$

$$R(x) = r_0x + r_1$$

con:

$$\begin{cases} q_0 = \dfrac{a_0}{b_0} \quad ; \quad q_1 = \dfrac{(a_1 - b_1q_0)}{b_0} \quad ; \quad q_2 = \dfrac{(a_2 - b_2q_0 - b_1q_1)}{b_0} \\[2ex] q_3 = \dfrac{(a_3 - b_2q_1 - b_1q_2)}{b_0} \quad ; \quad r_0 = a_4 - b_2q_2 - b_1q_3 \quad ; \quad r_1 = a_5 - b_2q_3 \end{cases}$$

Nella pratica il calcolo si dispone nel seguente modo:

$$\begin{array}{l|l}
a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 & b_0x^2 + b_1x + b_2 \\
\hline
-a_0x^5 - b_1q_0x^4 - b_2q_0x^3 & q_0x^3 + q_1x^2 + q_2x + q_3 \\
\hline
\divideontimes \; (a_1 - b_1q_0)x^4 + (a_2 - b_2q_0)x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 & \\
\quad -(a_1 - b_1q_0)x^4 - b_1q_1x^3 - b_2q_1x^2 & q_0 = \dfrac{a_0}{b_0} \\
\hline
\quad \divideontimes \; (a_2 - b_2q_0 - b_1)x^3 + (a_3 - b_2q_1)x^2 + a_4x + a_5 & \\
\quad\quad -(a_2 - b_2q_0 - b_1)x^3 - b_1q_2x^2 - b_2q_2x & \\
\hline
\quad\quad \divideontimes \; (a_3 - b_2q_1 - b_1q_2)x^2 + (a_4 - b_2q_2)x + a_5 & \\
\quad\quad\quad -(a_3 - b_2q_1 - b_1q_2)x^2 - b_1q_3x - b_2q_3 & \\
\hline
\quad\quad\quad \divideontimes \; (a_4 - b_2q_2 - b_1q_3)x + (a_5 - b_2q_3) &
\end{array}$$

• • • Un polinomio $A(x)$ si dice **DIVISIBILE** o multiplo di $B(x)$ [e questo si dice **DIVISORE**, fattore o sottomultiplo di $A(x)$] se il resto della divisione di $A(x)$ per $B(x)$ è nullo, se esiste cioè un polinomio Q tale che si abbia:

$$\boxed{A(x) = B(x) \cdot Q(x)} \qquad (6)$$

• • • Ogni polinomio $A(x)$, non identicamente nullo, è divisibile per se stesso e per una qualsiasi costante non nulla:

$$A(x) = A(x) \cdot 1 \quad ; \quad A(x) = C \cdot \left[\frac{1}{C} \cdot A(x) \right]$$

• • • Se due polinomi $A(x)$ e $B(x)$ sono divisibili per un terzo $D(x)$, anche la loro somma (differenza) è divisibile per questo terzo:

se $A(x) = D(x) \cdot Q_1(x) \quad ; \quad B(x) = D(x) \cdot Q_2(x)$

allora è:

$$A(x) \pm B(x) = D(x) \cdot \left[Q_1(x) \pm Q_2(x) \right]$$

• • • Se $A(x)$ è divisibile per $B(x)$ e questo per $C(x)$, anche $A(x)$ è divisibile per $C(x)$:

se $A(x) = B(x) \cdot Q_1(x)$ e $B(x) = C(x) \cdot Q_2(x)$

allora è:

$$A(x) = C(x) \cdot \left[Q_1(x) \cdot Q_2(x) \right]$$

REGOLA DI RUFFINI

Se $B(x) = x - \alpha$ (polinomio di primo grado) si avrà:

$m = 1$; $b_0 = 1$; $b_1 = -\alpha$ e la (4) diventa:

$$\boxed{A(x) = (x-\alpha)\cdot Q(x) + R} \quad (7) \quad \text{con: } \frac{A(x)}{x-\alpha} = Q(x) + \frac{R}{x-\alpha}$$

$$\begin{cases} Q(x) = q_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \dots + q_{n-2} x + q_{n-1} \\ R = \text{costante} \end{cases}$$

$q_0 = a_0$; $q_1 = \alpha q_0 + a_1$; $q_2 = \alpha q_1 + a_2$; ... ; $q_{n-1} = \alpha q_{n-2} + a_{n-1}$

$R = \alpha q_{n-1} + a_n = A(\alpha)$

Nella pratica il calcolo si dispone nel seguente modo:

	a_0	a_1	a_2	a_{n-1}	a_n
α		$q_0\alpha$	$q_1\alpha$	$q_{n-2}\cdot\alpha$	$q_{n-1}\cdot\alpha$
	$q_0 = a_0$	$q_1 = q_0\alpha + a_1$	$q_2 = q_1\alpha + a_2$	$q_{n-1} = q_{n-2}\cdot\alpha + a_{n-1}$	$R = q_{n-1}\alpha + a_n$

Teorema di Descartes

«C.N.S. perché un polinomio $A(x)$ sia divisibile per il binomio $x-\alpha$ è che esso si annulli per $x=\alpha$ cioè $A(\alpha)=0$».

Hp: $\{ A(\alpha) = 0$

Ts $\{$ $A(x)$ divisibile per $x-\alpha$ cioè $R = 0$

$x = \alpha$; $A(\alpha) = 0$ per ifatti $(x-\alpha) = \alpha - \alpha = 0$ $R = 0$ (*)

Hp $\{$ $A(x)$ divisibile per $x-\alpha$, $R = 0$

Th $\{ A(\alpha) = 0$

se $A(x)$ è divisibile per $x-\alpha$ si ha: $A(x) = (x-\alpha)\cdot Q(x)$ e quindi $R = 0$ cioè $A(\alpha) = 0$

Se per $x = \alpha$ è $A(\alpha) = 0$ il numero α dicesi <u>ZERO</u> del polinomio $A(x)$ o <u>RADICE</u> dell'equazione algebrica:

$$A(x) = 0$$

(*) Hp $\{ A(\alpha) = 0$ Th $\{ R = 0$

$$A(\alpha) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \cdot Q(\alpha) + R \Rightarrow R = 0$$

Hp $\{ R = 0$ Th $\{ A(\alpha) = 0$

$R = 0 \Rightarrow A(x) = (x - \alpha)\, Q(x)$ ma per $x = \alpha$, è:

$$A(\alpha) = 0 \cdot Q(\alpha) = 0$$

Massimo Comune Divisore di due polinomi in una variabile

Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, se essi sono entrambi divisibili per un polinomio $D(x)$ di grado ≥ 1, si dice che essi hanno il fattore o divisore $D(x)$ od anche che non sono primi fra loro.

Se poi $D(x)$ è, tra tutti i divisori comuni, quello di grado più elevato, si dice che è il loro Massimo Comune Divisore.

Due polinomi che non abbiano altri fattori comuni che le costanti si dicono **PRIMI** tra loro.

Teorema

« Se un polinomio $D(x)$ divide simultaneamente il dividendo $A(x)$ e il divisore $B(x)$ di una divisione, esso divide anche il resto $R(x)$ della loro divisione; e inversamente se esso divide $R(x)$ e $B(x)$ esso divide anche $A(x)$ ».

Sia $$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A(x) = Q(x)\cdot B(x) + R(x) = Q(x)\cdot D(x)\cdot B'(x) + D(x)\cdot \\ A(x) = D(x)\cdot\left[Q(x)\cdot B'(x) + R'(x)\right] \quad c.v. \end{array}}$$

Se: $\begin{cases} A(x) = D(x)\cdot A'(x) \\ B(x) = D(x)\cdot B'(x) \end{cases}$ allora $R(x) = D(x)\cdot R'(x)$

Se $\begin{cases} R(x) = D(x)\cdot R'(x) \\ B(x) = D(x)\cdot B'(x) \end{cases}$ allora $A(x) = D(x)\cdot A'(x)$

Dimostrazione: $A(x) = Q(x)\cdot B(x) + R(x)$; $R(x) = A(x) - Q(x)\cdot B(x)$

$R(x) = D(x)\cdot A'(x) - Q(x)\cdot D(x)\cdot B'(x) = D(x)\cdot\left[A'(x) - Q(x)\cdot B'(x)\right] =$

$= D(x)\cdot R'(x)$

... segue che le due coppie di polinomi:

$$\begin{cases} A(x)\,,\ B(x) \\ B(x)\,,\ R(x) \end{cases}$$

... hanno gli stessi divisori comuni, cioè: ⓐ

• <u>Algoritmo DELLE DIVISIONI SUCCESSIVE o di Euclide per trovare il M.C.D. di due polinomi $A(x)$ e $B(x)$</u>

Per trovare il M.C.D. di due polinomi $A(x)$, $B(x)$ non nulli, si divide $A(x)$ per $B(x)$, $B(x)$ per il resto ~~con~~ ottenuto e così di seguito finché non si abbia un resto nullo. L'ultimo divisore è il M.C.D. dei due polinomi.

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}\ ;\quad \begin{array}{l|l} B(x) & R(x) \\ \hline R_1(x) & Q_1(x) \end{array}\ ;\quad \begin{array}{l|l} R(x) & R_1(x) \\ \hline R_2(x) & Q_2(x) \end{array}\ ;\ \ldots\ldots\ ;$$

$$\begin{array}{l|l} R_{K-2}(x) & R_{K-1}(x) \\ \hline R_K(x) & Q_K(x) \end{array}\ ;\quad \begin{array}{l|l} R_{K-1}(x) & R_K(x) \\ \hline R_{K+1}=0 & Q_{K+1}(x) \end{array}$$

$R_K(x)$ è il M.C.D. fra $A(x)$ e $B(x)$

<u>Teorema</u>

C.N.S. perché due polinomi siano primi fra di loro è che l'ultimo divisore ~~dell~~ R_K del quadro delle divisioni successive dei due polinomi sia una costante non nulla.

ⓐ I divisori comuni di due polinomi $A(x)$ e $B(x)$ sono tutti e soli i divisori comuni di $B(x)$ ed $R(x)$

• • • MOLTIPLICANDO (dividendo) il dividendo $A(x)$ e il divisore $B(x)$ per un polinomio $D(x)$ non nullo [che sia un loro divisore comune] il quoziente non varia e il resto si MOLTIPLICA (divide) per questo polinomio

Se: $\begin{cases} A(x) = D(x) \cdot A'(x) \quad ; \quad B(x) = D(x) \cdot B'(x) \\ A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \end{cases}$

allora:

$A = B \cdot Q + R$ cioè $\underline{A \cdot D} = \underline{B \cdot D} \cdot Q + \underline{R\,D}$

$$\underbrace{A(x) \cdot D(x)} = \underbrace{B(x) \cdot D(x)} \cdot Q(x) + R(x) \cdot D(x)$$

$$\underbrace{A(x) : D(x)} = \underbrace{B(x) : D(x)} \cdot Q(x) + R(x) : D(x)$$

• • • MOLTIPLICANDO (dividendo) il dividendo $A(x)$ e il divisore $B(x)$ per un polinomio $M(x)$ non nullo [che sia un loro divisore comune] il loro M.C.D. $D(x)$ resta MOLTIPLICATO (Diviso) per $M(x)$

Esempi

M.C.D. fra: $\begin{cases} A(x) = x^5 - x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 8x \\ B(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4 \end{cases}$

$$D(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)^2(x+1)$$

$$A(x) \quad x^5 - x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 8x \quad \Big| \quad x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4 \quad B(x)$$

$$-x^5 + 3x^4 + x^3 - 7x^2 + 4 \quad \Big| \quad 1 \quad Q(x)$$

$$R(x) \quad \cancel{//} \quad 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$$

$$2B(x) \quad 2x^5 - 6x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 8 \quad \Big| \quad 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4 \quad R(x)$$

$$-2x^5 + 5x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 4x \quad \Big| \quad x - \frac{1}{2} \quad Q_1(x)$$

$$\cancel{/} \quad -x^4 + x^3 + 6x^2 - 4x - 8 \qquad \downarrow \quad \frac{2x-1}{2}$$

$$x^4 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 2$$

$$R_1(x) \quad \frac{1}{2}\left[-3x^3 + 9x^2 - 12\right]$$

$$R(x) \quad 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4 \quad \Big| \quad x^3 - 3x^2 + 4 \qquad \frac{R_1(x)}{-3}$$

$$-2x^4 + 6x^3 - 8x \quad \Big| \quad 2x + 1$$

$$\cancel{//} \quad x^3 - 3x^2 + 4$$

$$-x^3 + 3x^2 - 4$$

$$0$$

i noti che nel corso del calcolo i polinomi sono moltiplicati o divisi per quantità costanti, senza che ciò alteri il risultato, per evitare l'introduzione di numeri troppo randi o di frazioni.

Risultante di due equazioni in una variabile

Siano date due equazioni algebriche di grado n ed m:

$$\underset{n}{A}(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (8)$$
$$\underset{m}{B}(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_{m-1} x + b_m = 0$$

e si voglia decidere, senza risolverle, se esse abbiano o no delle radici comuni.

Sia $D(x) = (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdots(x-x_k)$ il M.C.D. di $A(x)$ e $B(x)$. Ciascun numero x_k è una radice di $A(x)=0$ e di $B(x)=0$. Quindi basta determinare il M.C.D. $D(x)$ di $A(x)$ e $B(x)$; il suo grado esprime il numero delle radici comuni di $A(x)=0$ e $B(x)=0$ e le sue radici sono le radici comuni!

Nella pratica si usa un metodo diverso.

C.N.S. perché due polinomi $A(x)$ e $B(x)$ abbiano un divisore comune almeno di grado p in x, è che si possano determinare due polinomi $A_1(x)$, $B_1(x)$ di grado $n-p$, $m-p$ rispettivamente, per i quali si abbia identicamente:

$$(9) \qquad \underbrace{\underset{n}{A(x)} \cdot \underset{m-p}{B_1(x)}}_{n+m-p} = \underbrace{\underset{m}{B(x)} \cdot \underset{n-p}{A_1(x)}}_{n+m-p} \qquad \begin{cases} A(x) = \underset{p}{\varphi(x)} \cdot A_1(x) \\ \underset{m}{B(x)} = \underset{p}{\varphi(x)} \cdot \underset{m-p}{B_1(x)} \end{cases}$$

Adesso si possono trovare le relazioni tra i coefficienti di $A(x)$ e $B(x)$ che ci esprima la C.N.S. perché i polinomi dati non siano primi tra di loro. [Es. $p = 1$]

Applicando il principio d'identità dei polinomi si ottengono $m+n$ equazioni nelle $m+n$ incognite che sono gli n coefficienti di $A_1(x)$ e gli m coefficienti di $B_1(x)$.

$$\begin{cases} A_1(x) = \alpha_0 x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \dots\dots + \alpha_{n-2} x + \alpha_{n-1} \\ B_1(x) = \beta_0 x^{m-1} + \beta_1 x^{m-2} + \qquad + \beta_{m-2} x + \beta_{m-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 \beta_0 = b_0 \alpha_0 \\ a_1 \beta_0 + a_0 \beta_1 = b_1 \alpha_0 + b_0 \alpha_1 \\ a_2 \beta_0 + a_1 \beta_1 + a_0 \beta_2 = b_2 \alpha_0 + b_1 \alpha_1 + b_0 \alpha_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n \beta_{m-1} = b_m \alpha_{n-1} \end{cases} \qquad (10)$$

Il sistema (10) è un sistema lineare omogeneo di $n+m$ equazioni in $n+m$ incognite; esso ha quindi una soluzione (non nulla) allora ed allora soltanto che sia nullo il determinante dei coefficienti delle incognite.

$$R_{A,B} = \begin{array}{c|ccccc ccccc|c} & & & m & & & & & n & & & \\ & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & \\ n+1 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 & m+1 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \\ & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_0 & \\ & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & \\ & 0 & 0 & a_n & \cdots & a_2 & 0 & 0 & b_m & \cdots & b_2 & \\ m-1 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_m & \\ & & & n+1 & & & & & & & & \end{array} \qquad (11)$$

$R_{A,B}$ = RISULTANTE dei polinomi A e B opp.
Determinante di Sylvester dei due polinomi A e B.

Esempio:

$$A(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$
$$B(x) = b_0 x^5 + b_1 x^4 + b_2 x^3 + b_3 x^2 + b_4 x + b_5 = 0$$

$$\begin{cases} A_1(x) = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2 \\ B_1(x) = \beta_0 x^4 + \beta_1 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x + \beta_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
a_0\beta_0 = b_0\alpha_0 \\
a_1\beta_0 + a_0\beta_1 = b_1\alpha_0 + b_0\alpha_1 \\
a_2\beta_0 + a_1\beta_1 + a_0\beta_2 + \quad = b_2\alpha_0 + b_1\alpha_1 + b_0\alpha_2 \\
a_3\beta_0 + a_2\beta_1 + a_1\beta_2 + a_0\beta_3 + \quad = b_3\alpha_0 + b_2\alpha_1 + b_1\alpha_2 \\
a_3\beta_1 + a_2\beta_2 + a_1\beta_3 + a_0\beta_4 = b_4\alpha_0 + b_3\alpha_1 + b_2\alpha_2 \\
a_3\beta_2 + a_2\beta_3 + a_1\beta_4 = b_5\alpha_0 + b_4\alpha_1 + b_3\alpha_2 \\
a_3\beta_3 + a_2\beta_4 = b_5\alpha_1 + b_4\alpha_2 \\
a_3\beta_4 = b_5\alpha_2
\end{cases}$$

$$\begin{array}{c c} & \overbrace{\qquad\qquad m \qquad\qquad}\quad \overbrace{\qquad n \qquad} \\ \begin{array}{c} m+1 \\ 4 \\ \\ R_{A,B} = \\ \\ \\ n-1 \\ \\ \end{array} & \begin{vmatrix}
a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\
a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_0 & 0 \\
a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \\
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 \\
0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & b_4 & b_3 & b_2 \\
0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & \underline{b_5} & b_4 & b_3 \\
0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & 0 & b_5 & b_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & b_5
\end{vmatrix} \end{array}$$

Se è $R_{A,B} = 0$ allora $A(x)$ e $B(x)$ hanno almeno una radice in comune

$$\begin{cases} A(x) = x^2 - 1 = 0 \\ B(x) = x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$R_{AB} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$A(x)$ e $B(x)$ hanno almeno una radice comune.
Essendo $x-1$ il M.C.D. la radice comune è $x=1$

$$\begin{cases} A(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = 0 \\ B(x) = x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$R_{A,B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 35 & 10 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 50 & 35 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 24 & 50 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

1 radice comune

$x = -1$

Concludendo possiamo affermare che il RISULTANTE di due equazi $A(x)=0$ e $B(x)=0$ è un polinomio nei coefficienti delle due equazioni (a meno di un fattore costante non nullo) il cui annullarsi fornisce la condizione NECESSARIA e SUFFICIENT perché le equazioni date abbiano almeno una radice in comune.

In generale il Risultante è un determinante di ordine $n+m$ formato da m COLONNE coi coefficienti dell equazione $A(x)=0$ e da n COLONNE coi coefficienti

...lla equazione $B(x)=0$ [Metodo dialitico di Silvester]

Esempio:

$$A(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

$$B(x)=b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

Il risultante è un determinante di ordine $n+m=3+2=5$

$$R(A,B)=\begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_3 & a_2 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & b_2 \end{vmatrix}$$

Se è $R(A,B)=0$ allora le equazioni $A(x)=0$ e $B(x)=0$ ammetteranno almeno uno zero in comune.

N.B.

Spesso si ricorre al risultante quando si voglia eliminare un parametro comune a due equazioni algebriche.
Ad esempio siano:

$$x=\frac{t}{t^2+1} \quad ; \quad y=\frac{t}{t^3+1} \qquad (\beta)$$

le equazioni parametriche di una curva.
Volendo trovare l'equazione cartesiana della curva si ordinano le equazioni (β) rispetto a t e si annulli, quindi, il loro risultante:

$$\begin{cases} t^2 x - t + x = 0 \\ t^3 x - t + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & x & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & x \\ x & -1 & x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 & y & -1 \\ 0 & 0 & x & 0 & y \end{vmatrix} = 0$$

$$2x^3y^2 + x^2y(2x-3y) + x^2(x-y) + y(y-x) = 0$$

Metodo dialitico di Silvester (Aprile.. pag. 375)
vedere pag. 35

$$\begin{cases} a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \\ b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0 \end{cases}$$

se queste equazioni ammettono la soluzione comune α sarà

$$\begin{cases} A(\alpha) & a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 = 0 \\ B(\alpha) & b_0\alpha^2 + b_1\alpha + b_2 = 0 \end{cases}$$

a queste uguaglianze aggiungiamo $\alpha A(\alpha) = 0$; $\alpha^2 B(\alpha) = 0$; $\alpha B(\alpha) = 0$ ottenendo

$$\begin{cases} a_0\alpha^4 + a_1\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_3\alpha = 0 \\ a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 = 0 \\ b_0\alpha^4 + b_1\alpha^3 + b_2\alpha^2 = 0 \\ b_0\alpha^3 + b_1\alpha^2 + b_2\alpha = 0 \\ b_0\alpha^2 + b_1\alpha + b_2 = 0 \end{cases}$$

queste uguaglianze ci dicono che il sistema di 5 equazioni omogenee ammette il sistema di soluzioni non tutte nulle:
$x_1 = \alpha^4$; $x_2 = \alpha^3$, $x_3 = \alpha^2$, $x_4 = \alpha$; $x_5 = 1$

$$\begin{cases} a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x = 0 \\ a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \\ b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 = 0 \\ b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x = 0 \\ b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|} & m+1 \quad\quad m-1 \\ m & \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \\ n & \begin{matrix} b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{matrix} \end{array} = 0$$

e pertanto il determinante dei coefficienti deve essere nullo cioè

Teorema fondamentale dell'algebra (teorema di D'ALEMBERT)

Ogni equazione algebrica in un'incognita, a coefficienti reali o complessi e di grado n:

$$\boxed{f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n = 0} \qquad a_0 \neq 0$$

ammette sempre almeno una radice reale o complessa.

Teorema

Ogni equazione algebrica di grado n ammette sempre soltanto n radici distinte o coincidenti, reali o complesse.

Per il teorema ~~gen~~ fondamentale dell'algebra ed applicando il criterio di divisibilità dei polinomi si avrà;

$f(x) = (x - x_1) \cdot f_1(x)$ $\qquad$ $f_1(x)$ di grado $n-1$

$f_1(x) = (x - x_2) \cdot f(x_2)$ $\qquad$ $f_2(x)$ " $n-2$

. . . . $\qquad$ . . . . per cui

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)} \qquad (12)$$

Il numero dei fattori uguali ad $(x - x_n)$ dicesi molteplicità della radice; se r è tale numero x_n dicesi RADICE MULTIPLA di ordine r o radice r-pla.

$$\boxed{f(x) = a\cdot(x-x_1)^{r_1}\cdot(x-x_2)^{r_2}\cdot(x-x_3)^{r_3}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{r_k} = 0} \qquad (13)$$

con $r_1+r_2+\ldots+r_k = n$ e $x_1, x_2, \ldots x_k$ costanti diverse fra loro e due

Teorema

« C.N.S. perchè la radice α sia radice multipla di ordine r per l'equazione $f(x)=0$ è che essa annulli $f(x)$ e le sue derivate fino a quella di ordine $r-1$ e non annulli la derivata di ordine r ».

Dimostrazione

$$f(x) = f_{n-r}(x)\cdot(x-\alpha)^r \qquad \text{con } f_{n-r}(\alpha) \neq 0$$

$$f'(x) = f'_{n-r}(x)\cdot(x-\alpha)^r + r\cdot(x-\alpha)^{r-1}\cdot f_{n-r}(x)$$

$$f''(x) = f''_{n-r}(x)\cdot(x-\alpha)^r + 2r\,f'_{n-r}(x)\cdot(x-\alpha)^{r-1} + r(r-1)\,f_{n-r}(x)\cdot(x-\alpha)^{r-2}$$

$\ldots\ldots$

$$f^{(r-1)}(x) = f^{(r-1)}_{n-r}(x)\cdot(x-\alpha)^r + \ldots + r!\,f_{n-r}(x)\cdot(x-\alpha)$$

$$f^{(r)}(x) = f^{(r)}_{n-r}(x)\cdot(x-\alpha)^r + \ldots + r!\,f_{n-r}(x)$$

da cui per $x=\alpha$

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0 \qquad f^{(r)}(x) = r!\,f_{n-r}(\alpha) \neq 0$$

Esempio particolare

$$\begin{cases} f(x) = a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0 \\ f(x) = (Ax^2 + Bx + C)(x-\alpha)^3 \end{cases} \qquad r = 3$$

$$Th \begin{cases} f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0 \qquad f'''(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = (2Ax + B)(x-\alpha)^3 + 3(Ax^2 + Bx + C)(x-\alpha)^2$$

$$f''(x) = 2A(x-\alpha)^3 + 3(2Ax + B)(x-\alpha)^2 + \left(6Ax + 3B\right)(x-\alpha)^2 + 6(x-\alpha)(Ax^2 + Bx + C)$$

$$f'''(x) =$$

• Equazione a coefficienti reali

« Se un'equazione a coefficienti reali ammette la radice complessa $a+ib$, essa ammette la radice complessa e coniugata $a-ib$ con lo stesso ordine di molteplicità r ».

Pertanto il numero delle radici complesse di un'equazione a coefficienti reali è pari, mentre un'equazione a coefficienti reali di grado dispari ha almeno una radice reale!

Se $x_1 = a+ib$ sarà: $x = a-ib$ per cui:

$$(x-x_1)\cdot(x-x_2) = [x-(a+ib)]\cdot[x-(a-ib)] = [(x-a)-ib]\cdot[(x-a)+ib] =$$

$$= (x-a)^2+b^2 = x^2-2ax+a^2+b^2 = x^2+px+q$$

Pertanto un polinomio $f(x)$ a coefficienti reali si può sempre decomporre nel prodotto di fattori tutti reali di 1° o di 2° grado.

Relazioni tra i coefficienti e le radici di una equazione algebrica

Suppongo che l'equazione sia di 4° grado:

$$f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

$$f(x) = a_0 \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$$

$$f(x) = a_0 \left[x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) x^3 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) x^2 - (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4) x + x_1 x_2 x_3 x_4 \right] = 0$$

Per il principio d'identità dei polinomi si ha:

$$\boxed{\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = \dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -\dfrac{a_3}{a_0} \\ x_1 x_2 x_3 x_4 = \dfrac{a_4}{a_0} \end{cases}} \qquad (20)$$

Somme delle potenze simili delle radici

Si voglia esprimere la somma delle potenze simili delle radici $x_1, x_2, \dots, x_n$ dell'equazione (1) in funzione dei coefficienti dell'equazione stessa, cioè si voglia determinare le somme:

(21) $$\boxed{S_K = x_1^K + x_2^K + \dots + x_n^K}$$ con K intero positivo.

Si ottengono le formule di Girard-Newton:

(22)
$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 S_1 + a_1 = 0 \\ a_0 S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0 \\ a_0 S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 S_K + a_1 S_{K-1} + a_2 S_{K-2} + \dots\dots + a_{K-1} S_1 + K a_K = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 S_{n-1} + a_1 S_{n-2} + a_2 S_{n-3} + \dots + a_{n-2} S_1 + (n-1) a_{n-1} = 0 \end{array}}$$

che permettono di ricavare $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$

(23) $$\boxed{a_0 S_{n+K} + a_1 S_{n+K-1} + \dots + a_{n-1} S_{K+1} + a_n S_K = 0}$$ $K \geq 0$, $S_0 = n$

permette di ricavare $S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \dots$

.... Il discriminante di un'equazione può essere calcolato col metodo euclideo delle divisioni successive.

$$\begin{array}{c|c} A(x) & A'(x) \\ \hline R(x) & \end{array} \; ; \quad \begin{array}{c|c} A'(x) & R(x) \\ \hline R_1(x) & \end{array} \; ; \quad \begin{array}{c|c} R(x) & R_1(x) \\ \hline R_2(x) & \end{array} \; , \quad \begin{array}{c|c} R_1(x) & R_2(x) \\ \hline R_3 & \end{array} \ldots$$

Se è $R_K(x) =$ costante allora R_K è il discriminante.

$$A(x) = x^3 + px + q \; ; \quad A'(x) = 3x^2 + p \; ; \quad \begin{array}{c|c} A(x) & A'(x) \\ \hline \frac{2}{3}px + q & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} A'(x) & \frac{2}{3}px + q \\ \hline \frac{27 q^2}{4p^2} + p & \end{array} \qquad R_K = \frac{27 q^2}{4p^2} + p = \frac{p^2}{27}\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$$

.... $D = R(A, A')$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ p & 0 & p & 0 & 3 \\ q & p & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & p \end{vmatrix} = 4 \cdot 27 \cdot \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$$

$$\begin{cases} a_0 S_1 + a_1 = 0 \\ a_0 S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0 \\ a_0 S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 0 \\ a_0 S_4 + a_1 S_3 + a_2 S_2 + a_3 S_1 + 4a_4 = 0 \\ a_0 S_5 + a_1 S_4 + a_2 S_3 + a_3 S_2 + a_4 S_1 + 5a_5 = 0 \\ a_0 S_6 + a_1 S_5 + a_2 S_4 + a_3 S_3 + a_4 S_2 + a_5 S_1 + 6a_6 = 0 \end{cases}$$

Discriminante di una equazione algebrica

[S]i chiama **DISCRIMINANTE** di un'equazione algebrica un [p]olinomio intero dei coefficienti il cui annullarsi esprime la [C].N.S. affinchè l'equazione abbia almeno una radice [d]oppia.

Esso risulta uguale a:

$$D = a_0^{2n-2} \cdot \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix} \qquad (24)$$

determinante di ordine n

[A m]eno di un fattore numerico, il discriminante è [i]l Risultante fra $f(x)$ ed $f'(x)$.

Esempio

$a_0 = 1$

$[f(]x) = x^3 + px + q = 0 \;;\; n = 3 \;;\; s_0 = n = 3 \quad s_1 = -a_1 = 0 \;,\; s_2 = -2a_2 = -2p$

$[s_]3 = -a_1 s_2 - a_2 s_1 - 3a_3 = -3q \;;\; s_4 = 2p^2$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{vmatrix} = -4 \cdot 27 \cdot \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)$$

Radici razionali delle equazioni a coefficienti razionali – Radici Intere

Considero l'equazione:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad a_0 \neq 0$$

a coefficienti razionali.

Pongo: $x = y / a_0$ ottenendo

$$y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_{n-1} y + p_n = 0$$

con $p_1, p_2, \dots p_n$ numeri interi.

Se un'equazione a coefficienti interi ha il primo coefficiente uguale all'unità e il termine noto non nullo, le sue eventuali RADICI RAZIONALI sono numeri interi divisori del termine noto.

Se $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono coefficienti interi allora le radici intere vanno ricercate fra i sottomultipli del termine noto.

• • Tenendo presente l'equazione (1) e ponendo:

$$\boxed{x = y - \frac{a_1}{n a_0}} \qquad (25)$$

poichè:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n \qquad \binom{n}{1} = n$$

si ha:

$$f(x) = a_0 \left(y - \frac{a_1}{n a_0}\right)^n + a_1 \left(y - \frac{a_1}{n a_0}\right)^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$$f(x) = a_0 \left[y^n - \binom{n}{1} y^{n-1} \cdot \frac{a_1}{n a_0} + \dots\right] + a_1 \left[y^{n-1} + \dots\right] + \dots + a_n = 0$$

$$f(x) = a_0 y^n - \cancel{a_0 n} \cdot \frac{a_1}{\cancel{n a_0}} \cdot y^{n-1} + \dots + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$$f(x) = a_0 y^n + A \cdot y^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

equazione priva del termine di grado $n-1$ e posta sotto forma ridotta.

$$
\begin{cases}
a_0 x^{m+n-1} + a_1 x^{m+n-2} + \dots + a_{n-1} x^{m} + a_n x^{m-1} = 0 & i = m \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_0 x^{n+2} + a_1 x^{n+1} + \dots + a_{n-1} x^{3} + a_n x^{2} = 0 & i = 2 \\
a_0 x^{n+1} + a_1 x^{n} + \dots + a_{n-1} x^{2} + a_n x = 0 & i = 1 \\
a_0 x^{n} + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 & i = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
b_0 x^{m+n-1} + b_1 x^{m+n-2} + \dots + b_{m-1} x^{n} + b_m x^{n-1} = 0 & \nu = n \dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_0 x^{m+2} + b_1 x^{m+1} + \dots + b_{m-1} x^{3} + b_m x^{2} = 0 & \nu = 2 \\
b_0 x^{m+1} + b_1 x^{m} + \dots + b_{m-1} x^{2} + b_m x = 0 & \nu = 1 \\
b_0 x^{m} + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m = 0 & \nu = 0
\end{cases}
$$

Metodo Dialitico di Silvester

~~Accanto~~ Assieme ai polinomi $A_n(x)$ e $B_m(x)$ consideriamo i polinomi:

$$x^i A_n(x) = \sum_{0}^{n}{}_r\, a_r\, x^{n+i-r} \qquad (i=0,1,2,\dots\dots,m-1)$$

$$x^\nu B_m(x) = \sum_{0}^{m}{}_r\, b_r\, x^{m+\nu-r} \qquad (\nu=0,1,2,\dots, n-1)$$

Se i due polinomi $A_n(x)$ e $B_m(x)$ non sono primi fra loro ammettono uno zero comune $x=\alpha$ e pertanto:

$$\alpha^i A_n(\alpha) = 0 \quad ; \quad \alpha^\nu B_m(\alpha) = 0 \qquad \text{cioè:}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_0\alpha^{m+n-1} + a_1\alpha^{m+n-2} + \dots\dots + a_n\alpha^{m-1} = 0 \\ \qquad\qquad a_0\alpha^{m+n-2} + \dots\dots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0 \end{array}\right\} m$$

$$\left.\begin{array}{l} b_0\alpha^{m+n-1} + b_1\alpha^{m+n-2} + \dots\dots = 0 \\ \qquad\qquad b_0\alpha^{m+n-2} + \dots\dots = 0 \end{array}\right\} n$$

che costituiscono un sistema di $m+n$ ~~incognite~~ equazioni lineari nelle $m+n-1$ incognite α^r ($r=1,2,3,\dots, m+n-1$) e la C.N.S. perché il sistema ammetta soluzione è (Teorema di Rouché-Capelli) è che sia nullo il determinante:

$$
\begin{array}{l}
\qquad\overbrace{\hphantom{a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n}}^{n+1}\quad\overbrace{\hphantom{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}}^{m-1} \\
\left|\begin{array}{cccccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_0 & b_1 & b_2 & & & & & & & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & & & & & & & 0 \\
0 & 0 & b_0 & & & & & & & b_n
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} m \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}b\\b\\b\end{array}}\right\} n
\end{array}
\end{array}
$$

Questo determinante può differire dal determinante del Sylvester solo per il segn

Metodo per una prima risoluzione approssimata di una equazione numerica:

$P(x) = x^5 - 3x - 8 = 0$

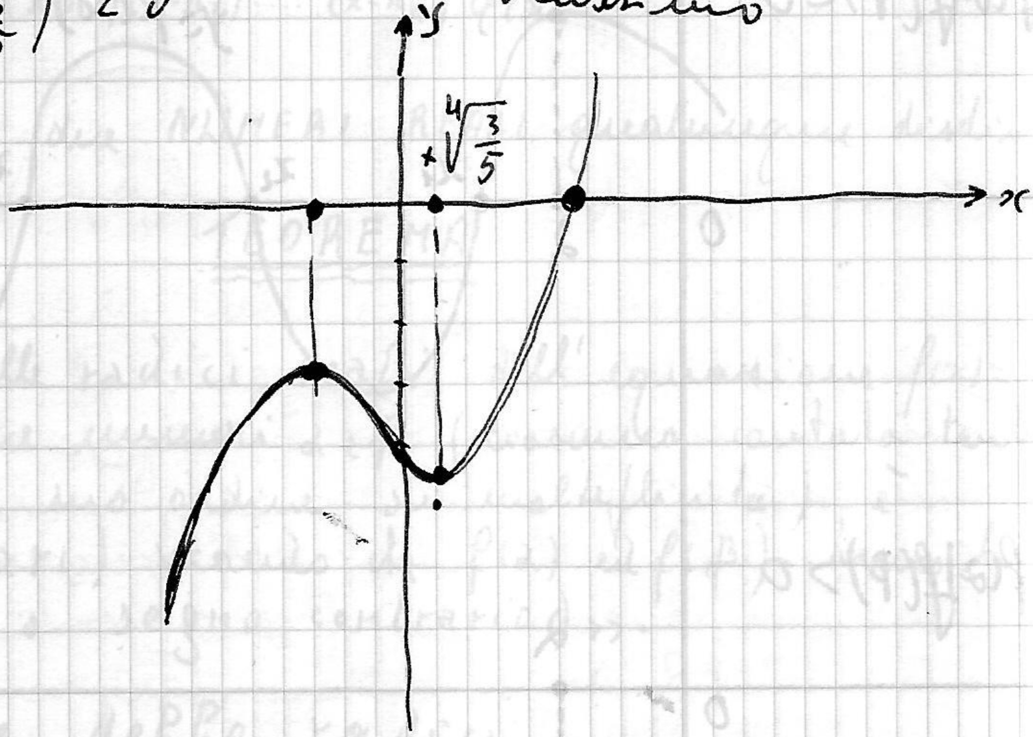
Si rappresenta graficamente la funzione $y = x^5 - 3x - 8$

$y' = 5x^4 - 3 \qquad 5x^4 - 3 = 0 \qquad x^4 = \frac{3}{5}\,;\ x = \pm\sqrt[4]{\frac{3}{5}}$

$y'' = 20x^3 \qquad y''\left(+\sqrt[4]{\frac{3}{5}}\right) = 20\sqrt[4]{\frac{3^3}{5^3}} > 0$ Minimo

$y''\left(-\sqrt[4]{\frac{3}{5}}\right) < 0$ Massimo

$x = 0\ ;\ y = -8$



...iste una
...la soluzione
...ale

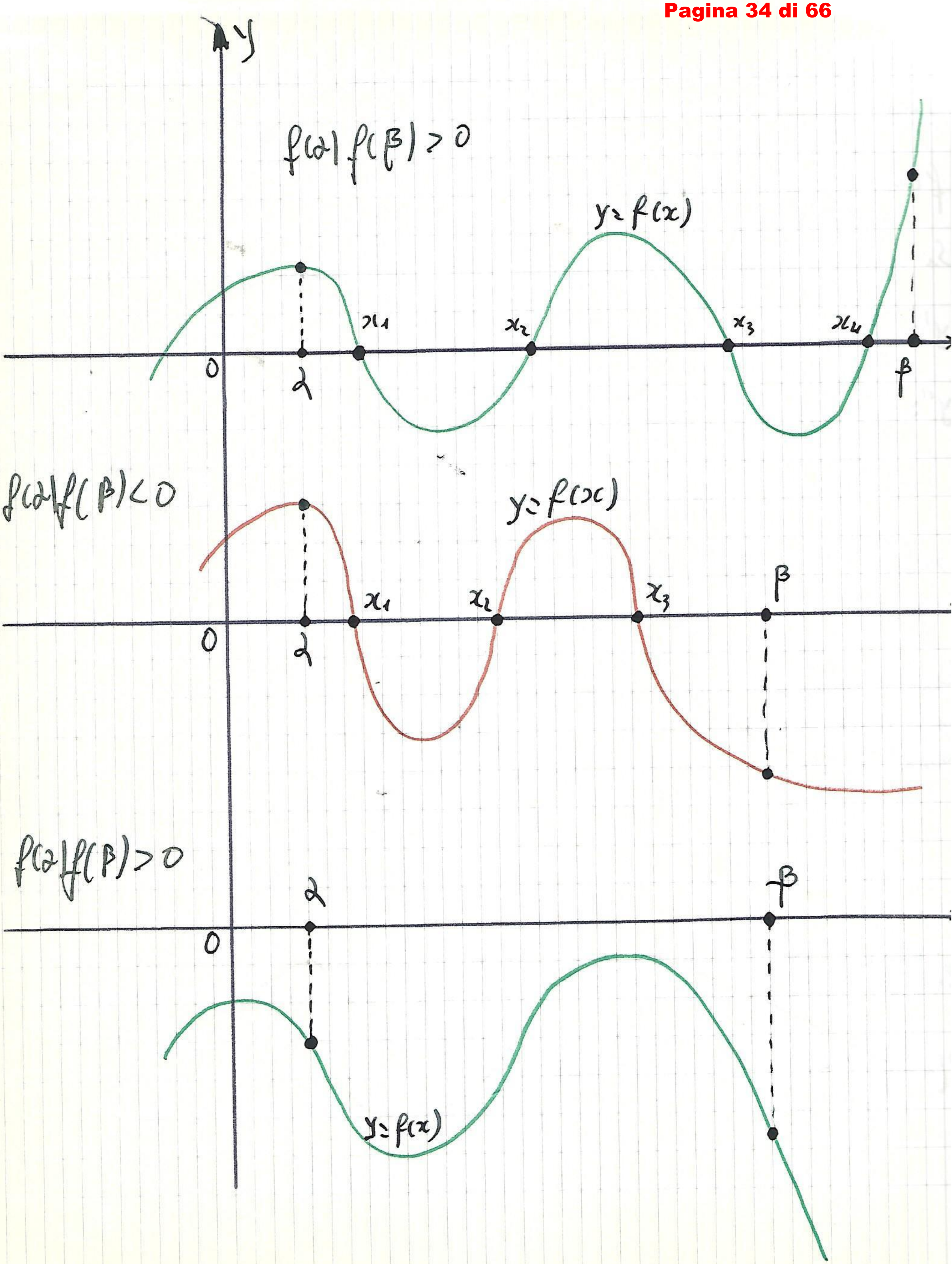
$f\left(\sqrt[4]{\frac{3}{5}}\right) = \frac{3}{5}\sqrt[4]{\frac{3}{5}} - 3\sqrt[4]{\frac{3}{5}} - 8 < 0$; $f(2) = 32 - 6 - 8 > 0$ per cui

$\sqrt[4]{\frac{3}{5}} < \alpha < 2$ ma

$f\left(-\sqrt[4]{\frac{3}{5}}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt[4]{\frac{3}{5}} + 3\sqrt[4]{\frac{3}{5}} - 8 < 0$

$f(1) = 1 - 3 - 8 < 0$; la

$1 < \alpha < 2$


y
f(α) f(β) > 0
y = f(x)
0
α
β
x1
x2
x3
x4
f(α) f(β) < 0
y = f(x)
0
α
β
x1
x2
x3
f(α) f(β) > 0
0
α
β
y = f(x)

Confronto delle radici di un'equazione algebrica con un numero reale

Sia:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad a_0 \neq 0$$

un'equazione algebrica di grado n a coefficienti REALI.
Siano $x_1, x_2, \ldots, x_k$ le sue RADICI REALI, distinte o coincidenti.
Sarà:

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k)\, \varphi(x)$$

Siano α e β $(\alpha < \beta)$ due NUMERI REALI qualunque distinti da $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

TEOREMA

«Il numero delle radici reali dell'equazione $f(x) = 0$ comprese fra i due numeri α e β (ciascuna contata tante volte quanto è il suo ordine di molteplicità) è PARI (o dispari) secondo che $f(\alpha)$ ed $f(\beta)$ hanno lo STESSO SEGNO (o segno contrario)».

Enumerazione delle radici

Enumerare le radici reali della $f(x) = 0$ significa determinare il numero delle radici che appartengono ad un intervallo assegnato.
Per fare questo ci si serve del teorema di STURM, del teorema di ~~B~~ Budan - Fourier o anche della regola di Cartesio.

TEOREMA di ~~B~~udan Fourier

«« Sia $f(x)$ un'equazione algebrica di grado n a coeffi[cienti] reali, e consideriamo la SUCCESSIONE di FOURIER de[lle] $n+1$ funzioni:

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

formata con la funzione $f(x)$ e le sue n derivate.
Siano poi α e β due numeri reali, $\alpha<\beta$.
Allora le due successioni di numeri:

$$f(\alpha),\ f'(\alpha),\ f''(\alpha) \dots f^{(n)}(\alpha)$$

$$f(\beta)\quad f'(\beta)\quad f''(\beta) \dots f^{(n)}(\beta)$$

godono la seguente proprietà: il NUMERO delle vari[azioni] della prima successione è maggiore o uguale al nume[ro] delle variazioni della seconda successione, e l'ECC[EDENZA] è il numero delle radici dell'equazione $>\alpha$ e $<\beta$ (ciascuna contata con il suo ordine di molteplicità) o lo SUPERA di un numero pari ».

• Il teorema di Budan - Fourier per un'equazione a radici tutte reali

Se un'equazione ha tutte le radici reali, il numero delle radici comprese in un intervallo (α, β) $[\alpha < \beta]$ è uguale al numero delle variazioni perdute dalla successione di Fourier nel passaggio dal valore α al valore β ».

• Regola dei segni di Cartesio

Il numero delle radici reali e positive di un'equazione a coefficienti reali non supera il numero delle variazioni dei suoi coefficienti o gli è eventualmente inferiore di un numero pari ».

Il numero delle radici reali e negative coincide col numero delle radici reali e positive dell'equazione trasformata a radici opposte ottenuta facendo: $x = -y$ ».

N. B.

Nel valutare il numero delle variazioni dei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ si intendano soppressi in questa successione i coefficienti ~~negativi~~ nulli. nulli.

Tali teoremi diventano precisi quando l'equazione $f(x) = 0$ ha tutte le radici reali

TEOREMA di STURM

Questo teorema ci permette calcolare il numero esatto delle radici comprese tra α e β. Esso dice:

« Sia $f(x)=0$ un'equazione algebrica di grado n a coeffi[cienti] reali, priva di radici multiple.
Allora il numero delle radici reali dell'equazione $f(x)=0$ maggiori di α e minori od uguali a β è uguale al numero delle variazioni perdute dalla successione di Sturm nel passare dal valore α al valore β, cioè le variazioni della succ[essione]

$$f(\alpha),\ F_1(\alpha),\ F_2(\alpha),\ \ldots,\ F_{k-1}(\alpha),\ F_k(\alpha)$$

non sono inferiori alle variazioni della successione

$$f(\beta),\ F_1(\beta),\ F_2(\beta),\ \ldots,\ F_{k-1}(\beta),\ F_k(\beta)$$

e l'ECCESSO delle variazioni della prima successione rispetto alla seconda dà il numero delle radici richie[ste].

$$\begin{array}{l|l} f(x) & f'(x)=F_1(x) \\ \hline f_2(x) & Q_1(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} F_1(x) & F_2(x)=-f_2(x) \\ \hline f_3(x) & Q_2(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} F_2(x) & F_3(x)=-f_3(x) \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} F_{k-3}(x) & F_{k-2}(x)=-f_{k-2}(x) \\ \hline f_{k-1}(x) & Q_{k-2}(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} F_{k-2}(x) & F_{k-1}(x)=-f_{k-1}(x) \\ \hline f_k(x) & Q_{k-1}(x) \end{array} \quad ; \quad F_k(x)=-f_k(x)$$

costante diverso

e successione:

$$f(x)\ ;\ F_1(x)=f'(x)\ ;\ F_2(x)\ ,\ \ldots\ ,\ F_{k-1}(x)\ ,\ F_k(x)$$

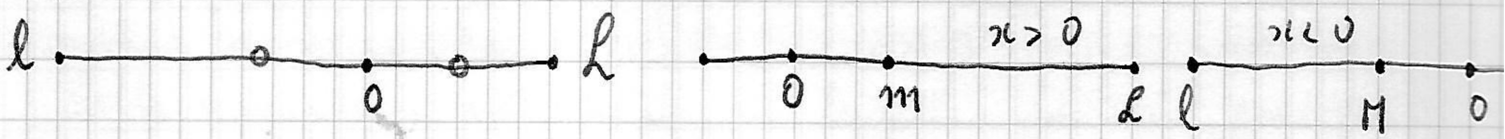
chiama la SUCCESSIONE DI STURM relativa all'equazione
$(x)=0$.

... Il teorema di STURM per le equazioni con RAD MULT

«L'equazione algebrica $f(x)=0$, a coefficienti reali, abbia radici multiple $>\alpha$ e $<\beta$; e col procedimento delle divisioni successive si formi la sua successione di Sturm, dove intendiamo soppresso l'ultimo termine quando esso sia identicamente nullo $[f_k(x)=0]$.
Il NUMERO delle radici distinte dell'equazione $f(x)=0$, $>\alpha$ e $\leq\beta$ è UGUALE al numero delle VARIAZIONI che la sua successione di Sturm perde nel passare dal valore α al valore β».

1) Limitazione 2) Enumerazione
3) Separazione 4) Approssimazione

② o anche determinare due intervalli, uno positivo e uno negativo, che contengano rispettivamente le radici positive e quelle negative della $f(x)=0$; cioè:



e quindi:

$l < x < M$ per le radici negative

$m < x < L$ " " positive

$l < x < L$ per tutte le radici

• Limitazione delle radici

Limitare le radici di un'equazione significa trovare due numeri ℓ ed L $(> \ell)$ nel cui intervallo cadano le radici reali dell'equazione. (d)

I numeri ℓ ed L si diranno rispettivamente <u>LIMITE-SINISTRO</u> <u>LIMITE-DESTRO</u> delle radici.

Si ha sempre:

$$\boxed{-\left(1+\frac{A}{|a_0|}\right) \leq x \leq 1+\frac{A}{|a_0|}}$$

A = massimo valore assoluto dei coefficienti $a_0, a_1, \ldots a_n$ dell'equazione

~~opp:~~

$$\cancel{-\left(1+\sqrt[k]{\frac{A}{a_0}}\right) < x < 1+\sqrt[k]{\frac{A}{a_0}}}$$

Inoltre:

<< Regola di Lagrange Tillot >>

$$\boxed{L = 1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}}$$

K = numero dei coefficienti consecutivi che a partire dal primo (esso compreso) siano positivi o nulli.

B = massimo valore assoluto dei coefficienti negativi

a_0 = coefficiente del termine di grado superiore.

<u>N.B.</u>

<< Se l'equazione $f(x)=0$ non presenta variazioni, non vi sono RADICI POSITIVE, cioè $L=0$ >>.

Regola di Newton

Un numero α che renda POSITIVE tutte le funzioni di Fourier:

$$f(x)\ ,\ f'(x)\ ,\ f''(x)\ ,\ \dots\ ,\ f^{(n)}(x)$$

relative all'equazione $f(x)=0$ è un LIMITE DESTRO delle radici.

Regola di Laguerre

Un numero $\alpha>0$ che renda POSITIVE le funzioni di Laguerre

$$f_0(x)=a_0\ ;\ f_1(x)=a_0x+a_1\ ;\ f_2(x)=a_0x^2+a_1x+a_2\ ;\ \dots$$

$$f_i(x)=a_0x^i+a_1x^{i-1}+\dots+a_{i-1}\cdot x+a_i \qquad [i=0,1,2,\dots,n]$$

relative all'equazione $f(x)=0$ è un limite destro delle radici.

Si troverà un LIMITE-SINISTRO delle radici dell'equazione applicando le regole precedenti alla Trasformata a radici opposte dell'equazione data.

Si pone $x=-y$; si studia $f(-y)=0$ e sia S il suo limite superiore ; allora $l=-S$

... Regola di Cauchy

L'equazione $f(x)=0$ presenti r coefficienti negativi, ad es:

$$a_2,\ a_4, \ldots, a_k$$
$$1,\ 2, \ldots, r$$

Il MAGGIORE dei numeri:

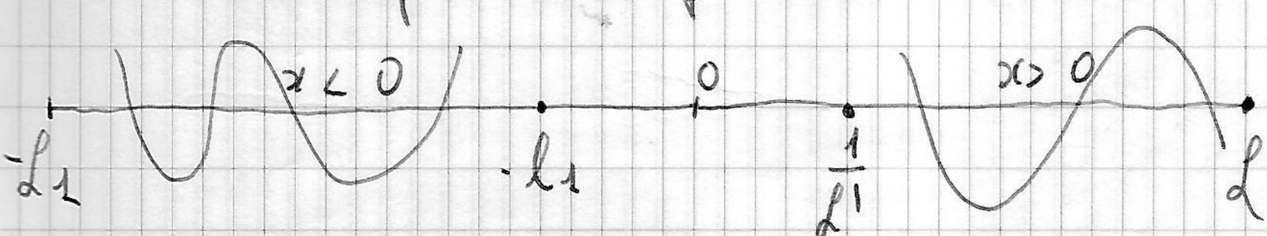
$$\sqrt[2]{\frac{|a_2|}{a_0}\cdot r} \quad ; \quad \sqrt[4]{r\cdot\frac{|a_4|}{a_0}} \quad ; \quad \sqrt[k]{r\cdot\frac{|a_k|}{a_0}}$$

è un Limite Destro delle radici della $f(x)=0$

... Considero l'equazione $f(x)=0$ e sia L un limite destro delle radici positive. Sia $g(y)=0$ la trasformata a radici reciproche della $f(x)=0$ $\left(x=\frac{1}{y}\right)$; L' sia un suo limite destro delle radici positive. Allora $l=1/L'$ sarà un limite sinistro delle radici positive della $f(x)=0$ cioè $\frac{1}{L'}$ ——— $x>0$ ——— L

... Sia $\varphi(y)=0$ la trasformata di $f(x)=0$ a radici opposte. Siano l_1, L_1 un limite sinistro e destro (positivi) delle radici positive della $\varphi(y)=0$.

$-L_1$, $-l_1$ saranno un limite sinistro e destro (negativi) delle radici negative della $f(x)=0$, cioè:



Separazione delle radici

Consiste nel trovare degli intervalli, abbastanza ristret
in ciascuno dei quali cada una sola radice reale dell'equazione.

Si divide l'intervallo $l \mapsto L$ in m intervalli ugua
in ciascuno dei quali si applica il teorema di Sturm
o quello di Bourdan-Fourier o la regola di Cartesio.

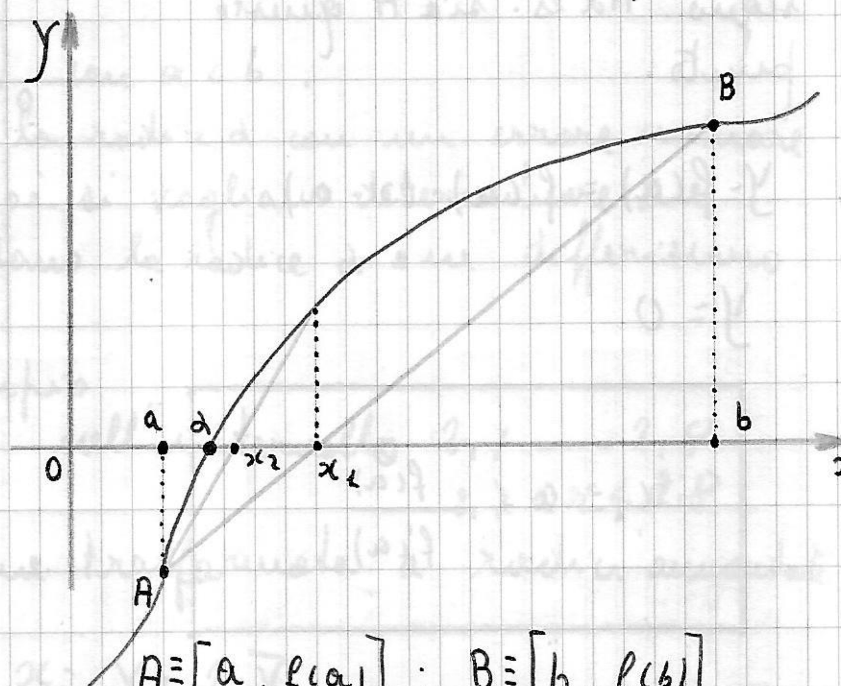
Approssimazione delle radici

METODO DELLE SECANTI o delle parti proporzionali

In $a \vdash\!\dashv b$ una sola radice reale; $f(a)$ ed $f(b)$ hanno segno opposto.

Equazione della secante AB:

$$\frac{y - f(b)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - b}{a - b}$$



$A \equiv [a, f(a)]$; $B \equiv [b, f(b)]$

$y = 0$

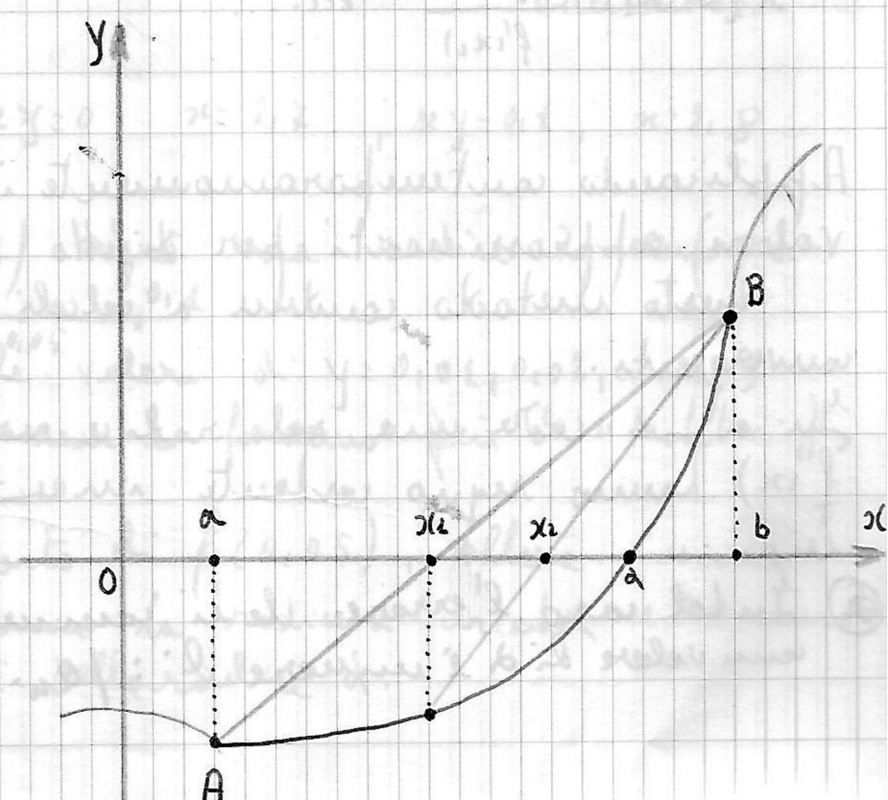
$$\boxed{x_1 = a - f(a) \cdot \frac{b - a}{f(b) - f(a)}}$$

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)}$$

ecc....

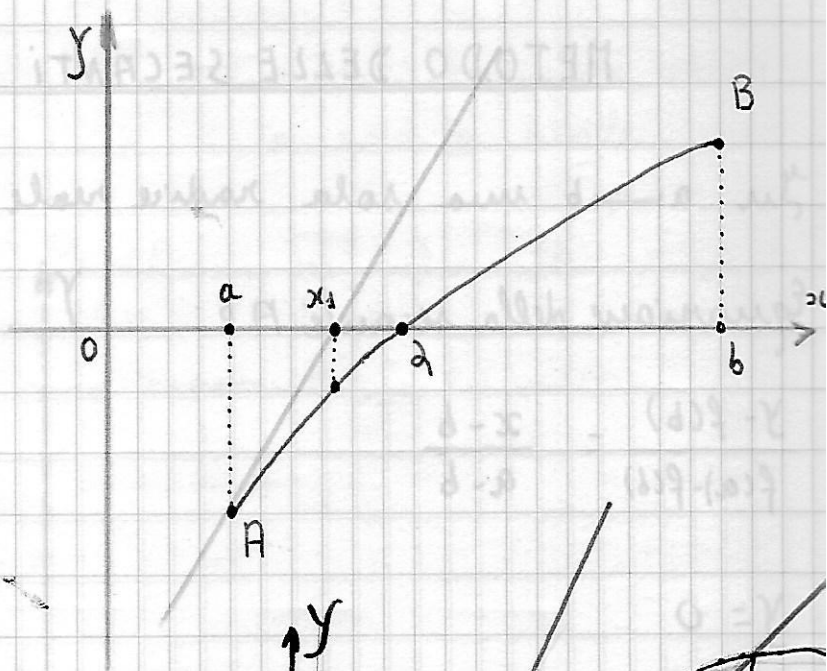
N. B.

$f'(x)$ ed $f''(x)$ debbono avere segno costante in $a \vdash\!\dashv b$



METODO DELLE TANGENTI o di Newton

Si conduce la tangente alla curva nel punto dove $f(x)$ ed $f''(x)$ hanno lo stesso segno. Ad es. sia A questo punto.

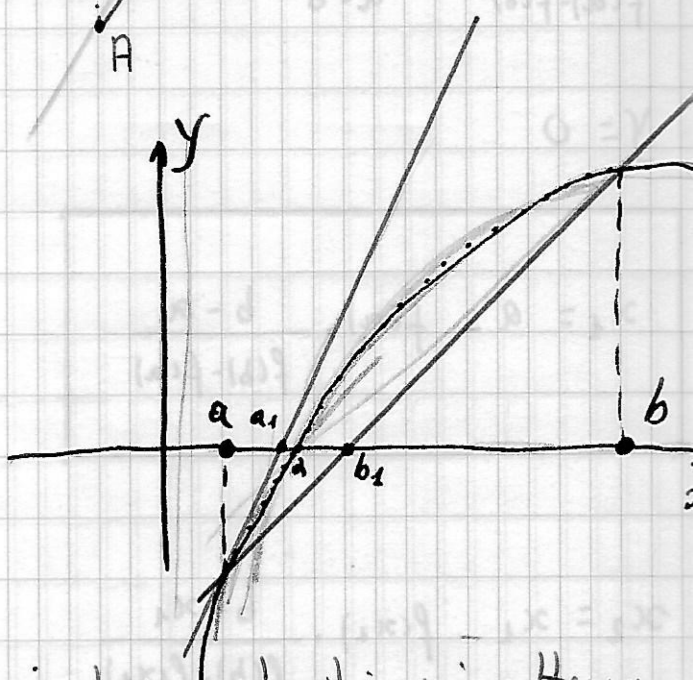


$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

$$y = 0$$

$$\boxed{x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad ecc....$$



Applicando contemporaneamente i due metodi si ottengono valori approssimati per difetto e per eccesso. (a)
Questo metodo conduce a calcoli più semplici e più rapidamente convergenti.
In a — b esiste una sola radice reale di $f(x) = 0$; $f'(x)$ ed $f''(x)$ hanno segno costante in a — b dove non si annullano mai.

(a) In tal caso l'errore che si commette assumendo a_n o b_n come valore di α è minore di: $|a_n - b_n|$

Vedere C. Folle p. 320
Enciclopedia delle matematiche pag. 236

Metodo di RUFFINI - HÖRNER

Sia α una radice reale e semplice dell'equazione:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (1)$$

separata nell'intervallo (a, b) con $a < b$.

Si voglia approssimare la radice α con un errore minore di un numero σ assegnato; cioè si vogliano determinare due numeri, razionali, che comprendano la radice α e ne differiscano a meno di σ.

Esempio

La radice α sia compresa nell'intervallo $2{,}7$ —— $2{,}8$
$2{,}7 < x < 2{,}8$

Dalla (1) ricaviamo l'equazione trasformata a radici aumentate mediante la posizione:

$$x = y + 2{,}7$$

ottenendo:

$f_1(y) = f(y + 2{,}7) = 0$ se $y = 0$ $x = 2{,}7$; se $y = 0{,}1$; $x = 2{,}8$

Quindi l'equazione $f_1(y)$ avrà una radice α compresa fra 0 e $0{,}1$.

Si va a vedere se per quali valori di $y = 0{,}01, 0{,}02, \dots 0{,}09$ $f_1(y)$ cambia di segno (non si faranno più di 4 tentativi)

Sia $f_1(0{,}04)$ di segno opposto di $f_1(0{,}05)$, allora i numeri $0{,}04$, $0{,}05$ comprenderanno la radice α cercata e daranno la cifra dei centesimi della radice α.

Poi si pone:

$y = 0{,}04 + z$ cioè $x = 2{,}74 + z$ ottenendo

$f_2(z) = f_1(z + 0{,}04) = f(x + 2{,}74) = 0$

Questa volta $f_2(z)$ avrà una radice compresa fra

0 e $0{,}01$

Si ricerca per quali valori $0{,}001; 0{,}002; \ldots, 0{,}009$ di z la $f_2(z)$ cambia di segno.

Supponiamo che si verifichi per $0{,}008$ e $0{,}009$, allora questi 2 numeri comprenderanno la radice cercata e daranno la cifra dei millesimi di α. ecc....

Valori per difetto	Valori per eccesso	
2,7	2,8	Valori approssimati a meno di
2,74	2,75	" " " 1/
2,748	2,749	" " " 1/

Il pregio del metodo sta nel fatto che la determinazione delle successive equazioni trasformate si effettua semplicemente coll'algoritmo di Ruffini e Horner.

Se nell'equazione $f(x)=0$ facciamo $x=y+h$ e sviluppiamo con la formula di Taylor, prendendo y come incremento, risulta senz'altro, per l'equazione trasformata a radici aumentate:

$$F(y)=f(h+y)=f(h)+y\cdot f'(h)+\frac{y^2}{2!}f''(h)+\dots+\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(h)+$$

$$+\frac{y^n}{n!}f^{(n)}(h)=0$$

I coefficienti $f(h)$, $f'(h)$; $\frac{f''(h)}{2!}$ ..... $\frac{f^{(n)}(h)}{n!}$ si ottengono rapidamente con il così detto quadro di Ruffini-Horner, che è un comune quadro di Ruffini, ripetuto n volte ed ogni volta arrestato ad un termine di meno.

1	h	a_0	a_1	a_2	$a_3 \ldots\ldots$	a_{n-2},	a_{n-1}	a_n
			$a_0 h$	$b_1 h$	$b_2 h$	$b_{n-3} \cdot h$	$b_{n-2} \cdot h$	$b_{n-1} \cdot h$
		a_0	$a_1 - a_0 h = b_1$	b_2	$b_3 \ldots\ldots$	b_{n-2}	b_{n-1}	$b_n = a_n - b_{n-1} h \rightarrow f(h)$
2	h		$h a_0$	$h c_1$	$h c_2 \ldots\ldots$	$h \cdot c_{n-3}$	$h c_{n-2}$	
		a_0	c_1	c_2	$c_3 \ldots\ldots$	c_{n-2}	$c_{n-1} \rightarrow f'(h)$	
3	h		$h a_0$					
$\vdots$		a_0	d_1	d_2	$d_3 \ldots\ldots$	$d_{n-2} \rightarrow f''(h)/2!$		
		a_0	k_1	k_2	k_3			
$n-2$	h		$h a_0$	$h p_2$				
		a_0	p_1	p_2				
$n-1$	h		$h a_0$					
		a_0	$q_1 \rightarrow f^{(n-1)}(h)/(n-1)!$					
n	h							
$n+1$		$a_0 \rightarrow f^{(n)}(h)/n!$						

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 5x - 3 = 0 \qquad x = y + 2$$

	1	-6	+2	-5	-3
2		2	-8	-12	-34
	1	-4	-6	-17	-37
2		2	-4	-20	
	1	-2	-10	-37	
2		2	0		
	1	0	-10		
2		2			
	1	2			
2					
	1				

$f(2) = -37$

$f'(2) = -37$

$\dfrac{f''(2)}{2!} = -10$

$f'''(2)/3! = 2$

$f^{(iv)}(2)/4! = 1$

$$F(y) = y^4 + 2y^3 - 10y^2 - 37y - 37 = 0$$

$f(x) = x^3 - x - 2 = 0$ $\qquad \underline{1} < \alpha < 2$

$x = y + 1$

	1	0	-1	-2
1		1	1	0
	1	1	0	$-2 \rightarrow f(1)$
1		1	2	
	1	2	$2 \rightarrow f'(1)$	
1		1		
	1	$3 \rightarrow f''(1)/2!$		
1				
	$1 \rightarrow f''(1)/3!$			

$f_1(y) = y^3 + 3y^2 + 2y - 2 = 0$ $\qquad (2 - 1 = 1)$

La radice di $f_1(y)$ è compresa tra 0 e 1 ; $0 < y < 1$

$y = 0{,}1 \,, 0{,}2 \,, \ldots \; 0{,}9$

$f(0.5) = -0{,}125 < 0$ $\qquad f(0{,}6) = +0{,}496 > 0$ $\qquad \underline{0{,}5} < y < 0{,}6$

0.5 e 0.6 comprendono la radice di $f(y)$; ne deriva che il valore approssimato di x a meno di $\frac{1}{10}$ è :

$x = 1{,}5$ (difetto) ; $x = 1{,}6$ (eccesso). $\qquad 1{,}5 < \alpha < 1{,}6$

$y = z + 0{,}5$

	1	3	2	-2
0,5		0,5	1,275	0,875
	1	2,5	1,75	125

	1	3	2	-2
0,5		0,5	1,75	1,875
	1	3,5	3,75	-0,125
0,5		0,5	2	
	1	4	5,75	
0,5		0,5		
	1	4,5		
0,5				
	1			

$f_2(z) = z^3 + 4.5z^2 + 5.75z - 0.125 = 0$

la radice di $f(z)$ è compresa fra 0 e 0,1 $\left\{ \begin{array}{l} 0{,}01,\ 0{,}02, \ldots \\ 0{,}08,\ 0{,}09 \end{array} \right.$

$0 < z < 0{,}1$

$f_2(0{,}02) < 0$; $f_2(0{,}03) > 0$

0,02 e 0,03 comprendono la radice di $f_2(z)$; ne deriva che il valore approssimato di x a meno di $\frac{1}{100}$ è:

$x = 1{,}52$ (difetto) $x = 1{,}53$ (eccesso)

$1{,}52 < \alpha < 1{,}53$

ecc....

Unità Didattica N° 38

Calcolo approssimato delle radici dell’equazione f(x) = 0

01) La risoluzione approssimata delle equazioni f(x) = 0

02) Metodo grafico per la separazione delle radici reali dell’equazione $f(x) = 0$

03) Teorema di esistenza della radici dell’equazione $f(x) = 0$

04) **Metodo delle tangenti o di Newton-Fourier**

05) Metodo delle corde o delle secanti o delle parti proporzionali

06) Metodo di bisezione o metodo dicotomico

La risoluzione approssimata delle equazioni f(x) = 0

In questa unità didattica analizzeremo i principali metodi per la risoluzione approssimata delle equazioni algebriche o trascendenti $\boxed{f(x)=0}$ con $f(x)$ funzione reale , algebrica o trascendente , della variabile reale x .

La risoluzione approssimata dell'equazione $f(x)=0$ passa attraverso le seguenti fasi :

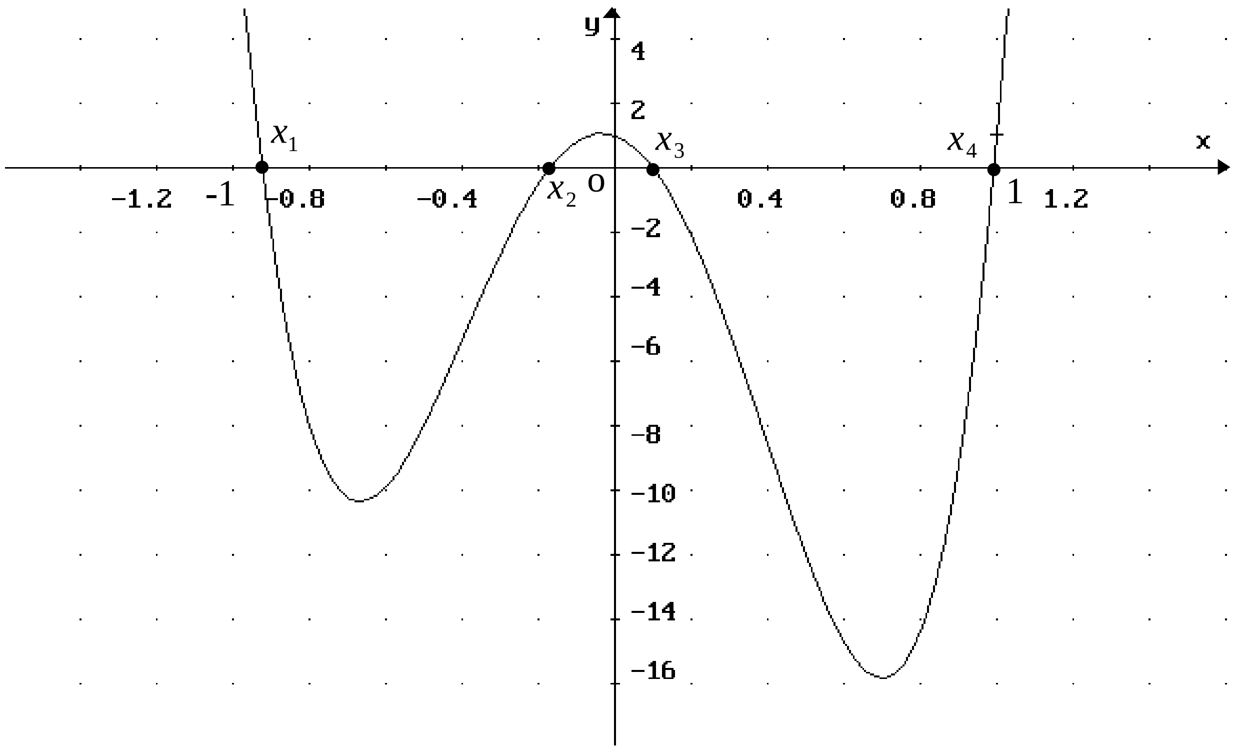
01) **Limitazione delle radici** : occorre determinare un intervallo di numeri reali $[\ell, L]$ contenente tutte le radici reali dell'equazione proposta

02) **Enumerazione delle radici** : bisogna stabilire quante sono le radici reali dell'equazione $f(x) = 0$ appartenenti all'intervallo $[\ell, L]$

03) **Separazione delle radici** : occorre determinare degli intervalli $[a, b]$ ognuno dei quali contiene una sola radice dell'equazione proposta

04) **Approssimazione delle radici** : **approssimare una radice reale** dell'equazione $f(x) = 0$ significa trovare un numero , con un predeterminato numero di cifre decimali , che approssima la radice con la precisione richiesta .

Metodo grafico per la separazione delle radici reali dell'equazione $f(x) = 0$



Un primo metodo grafico consiste nel tracciare la curva di equazione $y = f(x)$ ed annotare gli intervalli che contengono una sola intersezione della curva con l'asse delle ascisse . Con questo procedimento otteniamo la **limitazione delle radici reali** e la **separazione delle radici reali** .

$\boxed{f(x)=64x^4-60x^2-4x+1=0}$, $f'(x) = 4(64x^3 - 30x - 1)$, $f''(x) = 24(32x^2 - 5)$

Abbiamo così **limitato e separato le radici reali** dell'equazione $f(x)=64x^4-60x^2-4x+1=0$

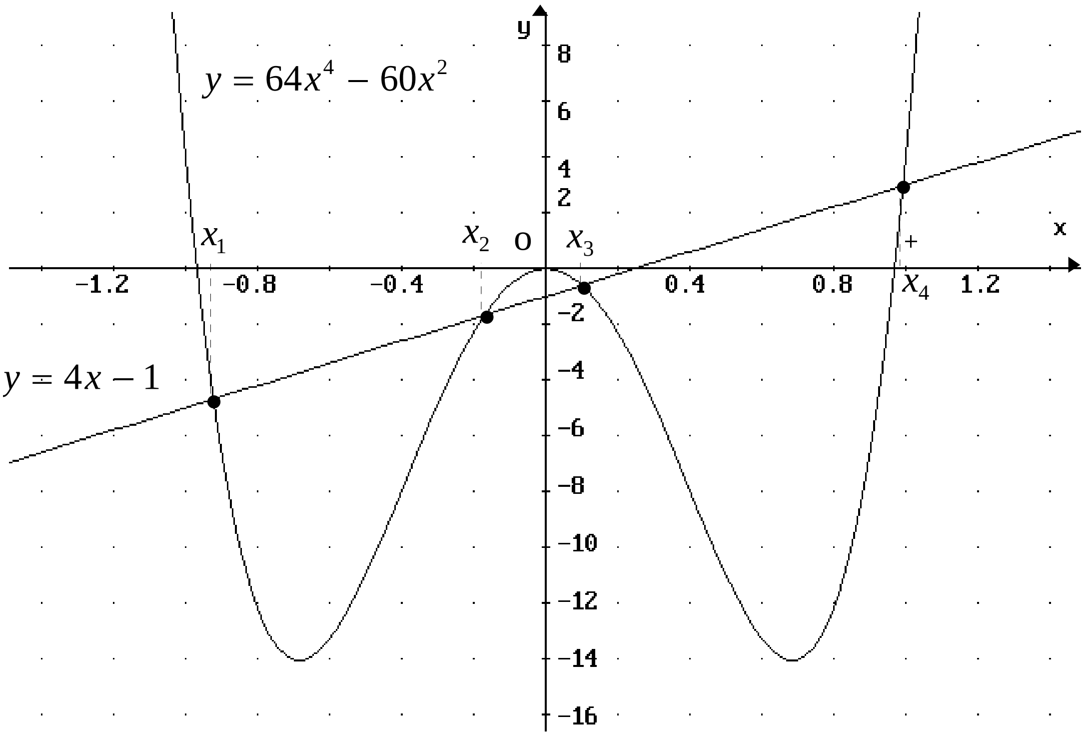
Un secondo metodo grafico è quello di scrivere la funzione $f(x)$ come differenza di due funzioni $g(x)$ ed $h(x)$ sicché l'equazione proposta assume la forma $g(x) - h(x) = 0$ e quindi $g(x) = h(x)$. Poi si costruiscono le curve σ e γ aventi rispettivamente equazioni $y = g(x)$ e $y = h(x)$.

$$\boxed{\begin{cases} y = g(x) & \sigma \\ y = h(x) & \gamma \end{cases}}$$

Le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ coincidono con le ascisse dei punti comuni alle curve σ e γ .

$f(x)=64x4-60x^2-4x+1=0$ $\qquad y=64x^4-60x^2=4x-1$ $\qquad \begin{cases} y=64x^4-60x^2 \\ y=4x-1 \end{cases}$

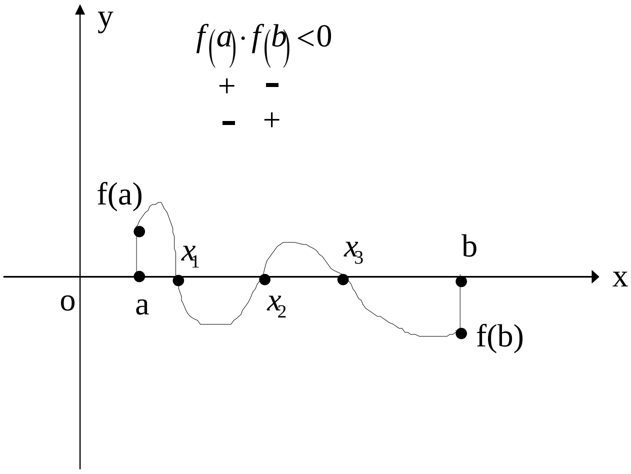
Dalle intersezioni delle due curve deduciamo che l'equazione proposta ammette 4 radici comprese tra i numeri -2 e $+2$ (tra i numeri -1 e $+1$ se notiamo che $f(-1)\cdot f(1) < 0$) .



Nel caso della nostra equazione é preferibile utilizzare il secondo metodo grafico , in quanto col primo non siamo in grado di trovare i **punti stazionari** della funzione .

Teorema di esistenza della radici dell'equazione $f(x)=0$

Se $f(x)$ è continua nell' intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ e se agli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto ($f(a)\cdot f(b)<0$) , allora l'equazione $f(x)=0$ ammette almeno una radice interna all'intervallo $[a,b]$.

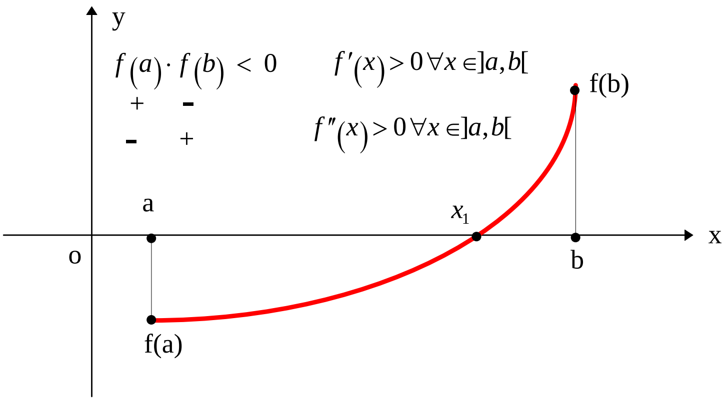


Questo teorema ci assicura l'esistenza di almeno una radice in un dato intervallo , ma non ne garantisce l'unicità . Se poi la funzione $f(x)$ è strettamente monotona [1] in $[a,b]$ allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola radice interna all'intervallo $[a,b]$.

Resta così giustificato il seguente :

Primo teorema dell'unicità della soluzione dell'equazione $f(x)=0$

Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ e derivabile nei suoi punti interni , se risulta $f(a)\cdot f(b) < 0$ e se $f'(x) \neq 0$ nell'intervallo aperto $]a,b[$, allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione interna ad $[a,b]$.



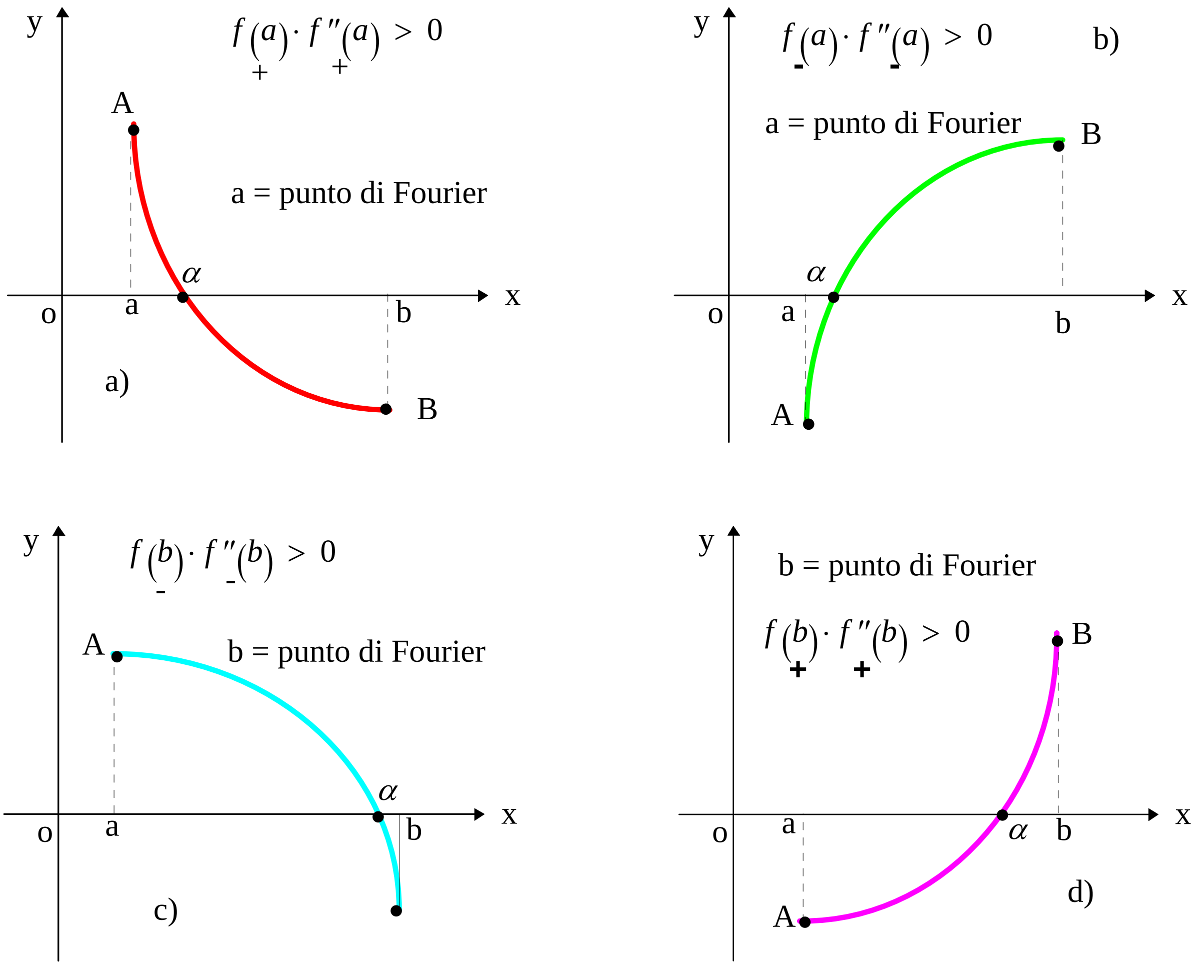
Secondo teorema dell'unicità della soluzione dell'equazione $f(x)=0$

Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ e derivabile due volte nei punti interni di tale intervallo , se risulta $f(a)\cdot f(b) < 0$ e se $f''(x)$ è sempre positiva o sempre negativa nell'intervallo $]a,b[$, allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione interna ad $[a,b]$.

[1] Strettamente crescente o strettamente decrescente

Metodo delle tangenti o di Newton-Fourier

Supponiamo di avere separato nell'intervallo $[a,b]$ la **radice reale semplice** α dell'equazione $f(x) = 0$ e supponiamo che essa sia unica . Questo significa che le funzioni $f'(x)$ ed $f''(x)$ hanno, nell'intervallo $[a,b]$, segno costante , cioè la funzione $f(x)$ è **strettamente monotona** e **priva di punti di flesso** . Si possono presentare i seguenti quattro casi :



Considerati i punti $A[a, f(a)]$, $B[b, f(b)]$ diremo **estremo di Fourier** quello dei due estremi dell'intervallo $[a,b]$ nel quale $f(x)$ ed $f''(x)$ hanno lo **stesso segno** , cioè :

$\boxed{f(a)\cdot f''(a) > 0}$ $\Rightarrow$ a è **estremo di Fourier** $\boxed{f(b)\cdot f''(b) > 0}$ $\Rightarrow$ b è **estremo di Fourier**

Supponiamo , per fissare le idee , che **a** sia l '**estremo di Fourier** . Scriviamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto $A[a, f(a)]$ $\boxed{y - f(a) = f'(a)\cdot(x - a)}$

Tale tangente incontra l'asse x nel punto di ascissa $\boxed{x = x_1 = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} = x_o - \dfrac{f(x_o)}{f'(x_o)}}$

Risulta $a < x_1 < \alpha < b$ con $f(x_1) \cdot f''(x_1) > 0$ cioè con x_1 **estremo di Fourier** relativo all'intervallo $[x_1, b]$. Applicando lo stesso procedimento all'intervallo $[x_1, b]$ otteniamo :

$$\boxed{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}} \qquad \text{con} \qquad a < x_1 < x_2 < \alpha < b$$

Applicando lo stesso procedimento all'intervallo $[x_2, b]$ otteniamo :

$$\boxed{x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}} \qquad \text{con} \qquad a < x_1 < x_2 < x_3 < \alpha < b$$

Applicando lo stesso procedimento all'intervallo $[x_3, b]$ otteniamo :

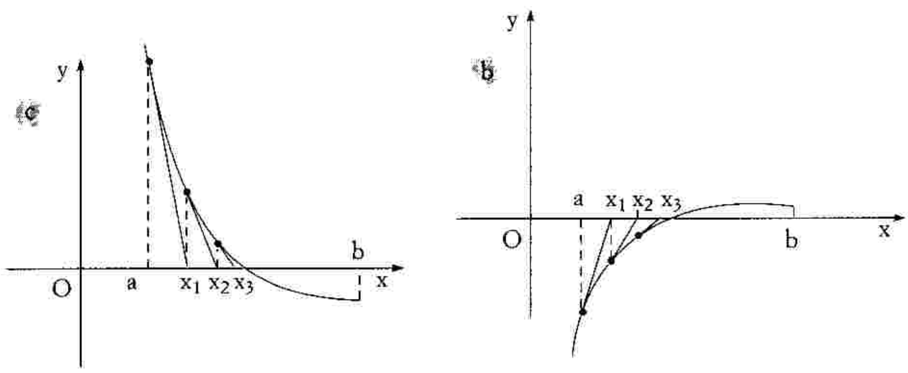
$$\boxed{x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}} \qquad \text{con} \qquad a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \alpha < b$$

Iterando il procedimento n volte otteniamo :

$$\begin{cases} a = x_o \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{cases} \qquad \text{con} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots\cdots \text{ ed } \qquad x_{n-1} = a$$

oppure : $$\begin{cases} a = x_o \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \qquad \text{con} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots \qquad \text{ed} \qquad x_n = a$$

Il metodo delle tangenti nel caso in cui **a** è l'**estremo di Fourier** fornisce dei valori di x_n approssimati per difetto della radice α .



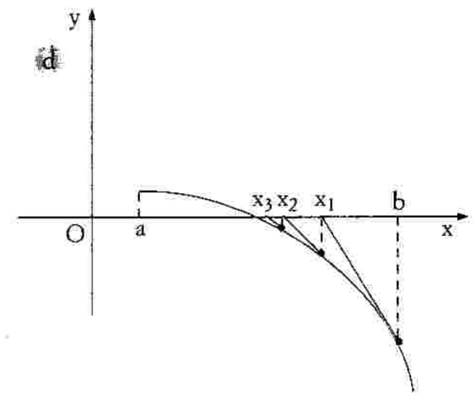
Se l'**estremo di Fourier** è **b** [$f(b) \cdot f''(b) > 0$] perveniamo alla formula :

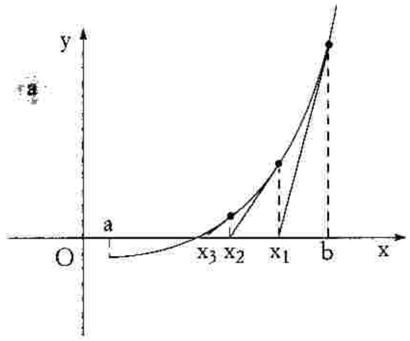
$$\begin{cases} b = x_o \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{cases} \qquad \text{con} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots\cdots \text{ ed } \qquad x_{n-1} = b$$

o , alla sua equivalente , $\begin{cases} b = x_o \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$ con $n=0,1,2,3,\cdots\cdots$ ed $x_n = b$

$x_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)} = x_o - \dfrac{f(x_o)}{f'(x_o)}$, $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$, $x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)}$

ed i valori x_n sono valori approssimati per eccesso della radice $x = \alpha$.





La condizione di arresto può essere data sotto la forma $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon = 10^{-m}$.

Riepilogo delle formule trovate :

$\begin{cases} x_o = a = \text{estremo di Fourier} \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{cases}$ $n = 1,2,3,\cdots\cdots$	$f(a)\cdot f''(a) > 0$
$\begin{cases} x_o = b = \text{estremo di Fourier} \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{cases}$ $n = 1,2,3,\cdots\cdots$	$f(b)\cdot f''(b) > 0$

$f(x) = 64x^2 - 60x^2 - 4x + 1$ $\qquad f'(x) = 4(64x^3 - 30x - 1)$

$f''(x) = 24(32x^2 - 5)$ $\qquad \alpha \in]0,5;1[$ $\qquad f(1)\cdot f''(1) > 0$ $\qquad x_o = b = 1$

$x_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)} = 1 - \dfrac{f(1)}{f'(1)} = 0{,}992424$, $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}9922789$

$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0{,}99227884$ $\qquad |x_3 - x_2| = 0{,}00000005$ Questo significa che le prime 7 cifre decimali sono sicuramente esatte .

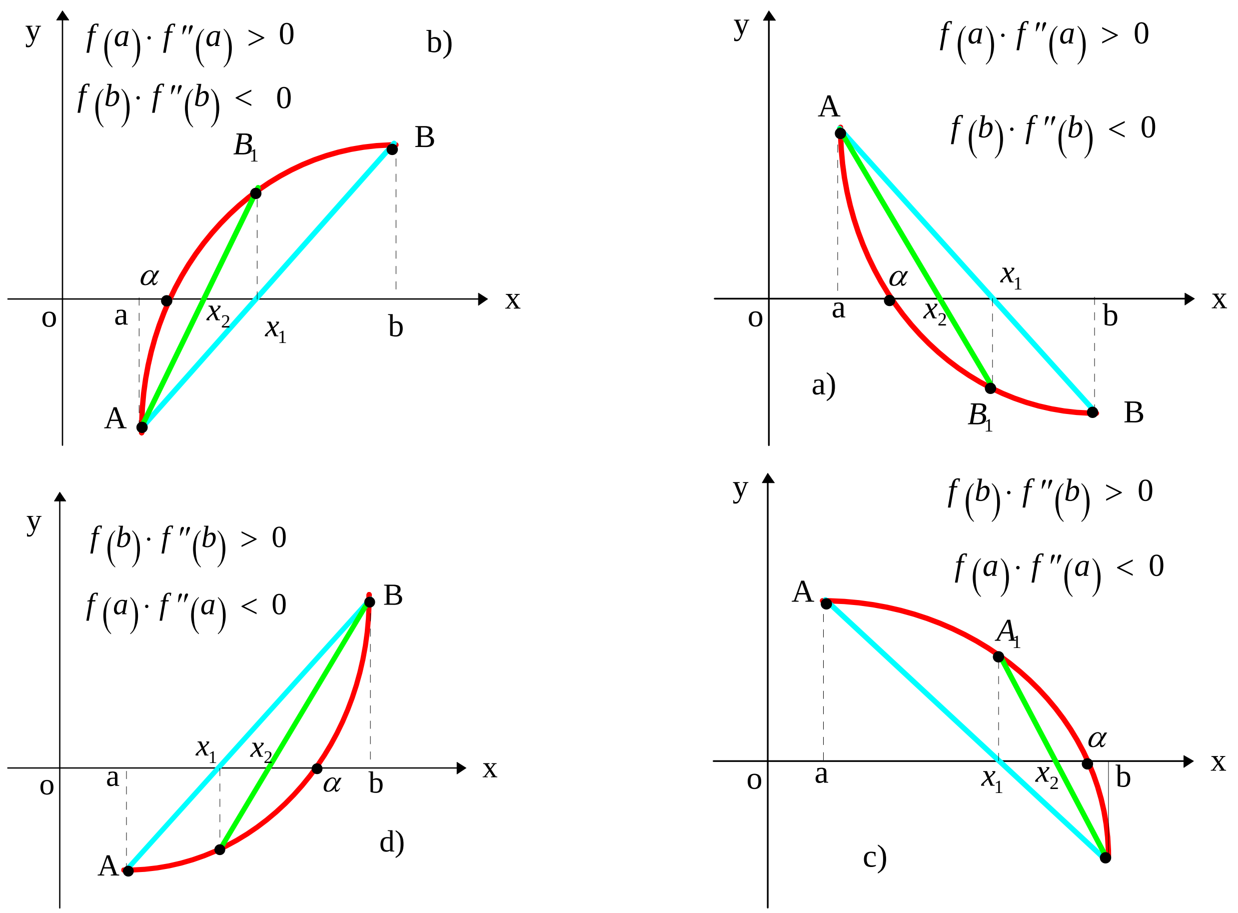
Metodo delle corde o delle secanti o delle parti proporzionali

Supponiamo di avere separato nell'intervallo $[a,b]$ la **radice reale semplice** α dell'equazione $f(x) = 0$ e supponiamo che essa sia unica . Questo significa che :

01) $f(a)\cdot f(b) < 0$

02) le funzioni $f'(x)$ ed $f''(x)$ hanno , nell'intervallo $[a,b]$, segno costante , cioè la funzione $f(x)$ è **strettamente monotona** e **priva di punti di flesso** .

Sotto queste condizioni , per il grafico γ della funzione $f(x)$ relativamente all'intervallo $[a,b]$, può presentarsi soltanto uno dei quattro casi indicati nelle seguenti figure .



Col **metodo delle corde** sostituiamo il grafico della funzione $f(x)$ con la retta passante per i punti $A[a, f(a)]$, $B[b, f(b)]$. Il grafico di $f(x)$ incontra l'asse delle ascisse nel punto $x = \alpha$ che è l'unica radice dell'equazione $f(x) = 0$ interna all'intervallo $[a,b]$ **.** La retta **AB** incontra l'asse x nel punto $x_1 \in]a,b[$ che rappresenta un valore approssimato [2] di α .

La retta AB ha equazione

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\cdot(x - a) \quad \text{oppure :} \quad y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\cdot(x - b) \quad y = 0 \Rightarrow$$

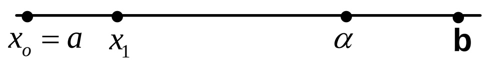
$$[1] \quad \boxed{x = x_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)}\cdot f(a)} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{x = x_1 = b - \frac{b - a}{f(b) - f(a)}\cdot f(b)} \quad [2]$$

Utilizzeremo la formula [1] nei casi indicati nelle figure c) e d) , utilizzeremo la formula [2] nei casi indicati nelle figure a) e b) .

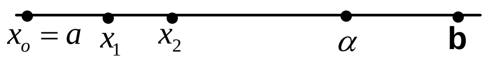
Applicando n volte il metodo delle corde o delle secanti otteniamo il seguente schema iterativo :

01) $f(b)\cdot f''(b) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_o = a \quad \Rightarrow$ **approssimazione per difetto**

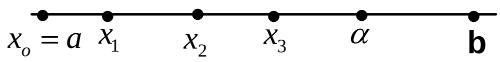
$$x_1 = x_o - \frac{b - x_o}{f(b) - f(x_o)}\cdot f(x_o) = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)}\cdot f(a)$$



$$x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)}\cdot f(x_1)$$



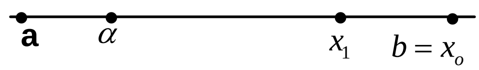
$$x_3 = x_2 - \frac{b - x_2}{f(b) - f(x_2)}\cdot f(x_2)$$



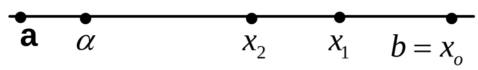
$$x_n = x_{n-1} - \frac{b - x_{n-1}}{f(b) - f(x_{n-1})}\cdot f(x_{n-1}) \qquad n = 1,2,3,\cdots\cdots \quad [1]$$

02) $f(a)\cdot f''(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_o = b \quad \Rightarrow$ **approssimazione per eccesso**

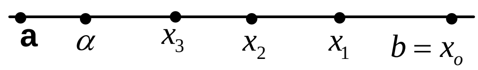
$$x_1 = x_o - \frac{x_o - a}{f(x_o) - f(a)}\cdot f(x_o) = b - \frac{b - a}{f(b) - f(a)}\cdot f(b)$$



$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - a}{f(x_1) - f(a)}\cdot f(x_1)$$



$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - a}{f(x_2) - f(a)}\cdot f(x_2)$$



$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - a}{f(x_{n-1}) - f(a)}\cdot f(x_{n-1}) \qquad n = 1,2,3,\cdots\cdots \quad [2]$$

[2] Per eccesso o per difetto

Individuata la formula da applicare occorre porre termine alle iterazioni fissando la precisione ε con la quale si vuole approssimare la radice α **.** Le iterazioni hanno termine quando risulta $\left| x_n - x_{n-1} \right| < \varepsilon$ avendo scelto x_n come valore approssimato (per eccesso o per difetto) della radice α **.** L'errore che si commette è minore di ε . Se risulta $\varepsilon = 10^{-n}$ allora le prime n cifre decimali di x_n sono esatte .

L'equazione $f(x) = x^3 + 3x + 5 = 0$ ammette una sola radice $\alpha \in]-2;-1[$. Calcolare un valore approssimato di α con la precisione $\varepsilon = 10^{-2}$ (cioè con due cifre decimali esatte) utilizzando il metodo delle corde .

$f(x) = x^3 + 3x + 5$ **,** $f'(x) = 3x^2 + 3$, $f''(x) = 6x$, $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]-2;-1[$

$f''(x) < 0 \quad \forall x \in]-2;-1[\qquad f(-2) = -9$, $f(-1) = 1$, $f(-2) \cdot f(-1) < 0$

$f(a) \cdot f''(a) = f(-2) \cdot f''(-2) > 0$, $f(b) \cdot f''(b) = f(-1) \cdot f''(-1) < 0$

Per calcolare un valore approssimato di α utilizzeremo la formula **[2]** .

$$x_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(a) = -1 - \frac{-1 + 2}{f(-2) - f(-1)} \cdot f(-1) = -1 - \frac{-1 + 2}{1 + 9} \cdot 1 = -1{,}1$$

$f(x_1) = f(-1{,}1) = 0{,}369$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - a}{f(x_1) - f(a)} \cdot f(x_1) = -1{,}1 - \frac{-1{,}1 + 2}{0{,}369 + 9} \cdot 0{,}369 = -1{,}1 - \frac{0{,}9}{9{,}369} \cdot 0{,}369 = -1{,}1354$$

$|x_2 - x_1| = 1{,}1354 - 1{,}1 = 0{,}0354 > 10^{-2} = 0{,}01 \qquad f(x_2) = f(-1{,}1354) = 0{,}1301$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - a}{f(x_2) - f(a)} \cdot f(x_2) = -1{,}1354 - \frac{-1{,}1354 + 2}{0{,}1301 + 9} \cdot 0{,}1301 = -1{,}1354 - 0{,}023 = -1{,}1477$$

$|x_3 - x_2| = 1{,}1477 - 1{,}1354 = 0{,}0116 > 10^{-2} = 0{,}01 \qquad f(x_3) = f(-1{,}1477) = 0{,}0451$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3 - a}{f(x_3) - f(a)} \cdot f(x_3) = -1{,}1477 - \frac{-1{,}1477 + 2}{0{,}0451 + 9} \cdot 0{,}0451 = -1{,}1477 - 0{,}004249 = -1{,}1519$$

$|x_4 - x_3| = 1{,}1477 - 1{,}1434 = 0{,}0043 < 10^{-2} = 0{,}01$

$\alpha = -1{,}15$ **è un valore approssimato della radice α con due cifre decimali esatte .**

$\alpha = -1{,}154171495$ è un valore approssimato di α con 9 cifre decimali esatte .

Metodo di bisezione o metodo dicotomico

Supponiamo che l'equazione $f(x) = 0$ ammetta la soluzione $x=\alpha\in]a,b[$ e che essa sia unica . Questo significa che risulta $f(a)\cdot f(b) < 0$ e la funzione $f'(x)$ ha segno costante in $]a,b[$.

- Per generalizzare il processo di iterazione poniamo :

$$a_1=a \quad , \quad b_1=b \quad \text{e} \quad \text{calcoliamo} \qquad x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{a_1+b_1}{2}$$

Calcoliamo $\boxed{f(a_1)=f(a)}$, $\boxed{f(x_1)}$, $\boxed{f(b_1)=f(b)}$ Se risulta $f(x_1)=0$ la soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ è $\boxed{\alpha=x_1=\frac{a+b}{2}=\frac{a_1+b_1}{2}}$, in caso contrario essa appartiene all'intervallo $]a,x_1[$ o all'intervallo $]x_1,b[$.

$$f(a)\cdot f(x_1)<0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\in]a,x_1[\qquad\qquad f(x_1)\cdot f(b)<0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\in]x_1,b[$$

Se , ad esempio , risulta $f(x_1)\cdot f(b)<0$ allora poniamo $a_2=x_1$, $b_2=b$ e ci calcoliamo $x_2=\frac{a_2+b_2}{2}$ e si continua l'iterazione scegliendo dei due sottointervalli $]a_2,x_2[$ o $]x_2,b_2[$ quello nei cui estremi la funzione assume valori di segno opposto . Si procede con l'iterazione sino ad ottenere l'approssimazione desiderata . Otteniamo una successione di sottointervalli ognuno contenuto nel precedente e di ampiezza uguale alla metà .

$$b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2} \ , \ b_3-a_3=\frac{b_2-a_2}{2} \ , \ b_4-a_4=\frac{b_3-a_3}{2} \ , \ \dots \ , \ b_n - a_n = \frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}$$

L'ultimo sottointervallo determinato ha ampiezza : $\boxed{b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}}$

- **Se scegliamo** $\boxed{x = \alpha = x_n = \frac{a_n+b_n}{2}}$ **come valore approssimato della radice dell'equazione commettiamo un errore** E_n **dato dalla seguente relazione** :

$$\boxed{E_n \le \frac{b-a}{2^n}}$$

Il procedimento di iterazione può essere realizzato attraverso il seguente schema :

iterazioni	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(a_n)$	$f(x_n)$	$f(b_n)$
1	$a_1 = a$	$b_1 = b$	$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$	$f(a_1) > 0$	$f(x_1) < 0$	$f(b_1) < 0$
2	$a_2 = a_1$	$b_2 = x_1$	$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$	$f(a_2) > 0$	$f(x_2) < 0$	$f(b_2) < 0$
3	$a_3 = a_2$	$b_3 = x_2$	$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$	$f(a_3) > 0$	$f(x_3) > 0$	$f(b_3) > 0$

$$64x^4 - 60x^2 - 4x + 1 = 0 \quad , \quad f(0{,}5) \cdot f(1) < 1 \quad , \quad f(\alpha) = 0 \quad , \quad \alpha \in]0{,}5, 1[$$

iterazione	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n + b_2}{2}$	$f(a_n)$	$f(x_n)$	$f(b_n)$
1	$a_1 = a = 0{,}5$	$b_1 = b = 1$	$x_1 = \frac{0{,}5 + 1}{2} = 0{,}75$	$f(0{,}5) < 0$	$f(0{,}75) < 0$	$f(1) > 0$
2	$a_2 = 0{,}75$	$b_2 = 1$	$x_2 = 0{,}875$	$f(a_2) < 0$	$f(x_2) < 0$	$f(b_2) > 0$
3	$a_3 = 0{,}875$	$b_3 = 1$	$x_3 = 0{,}9375$	$f(a_3) < 0$	$f(x_3) < 0$	$f(b_3) > 0$
4	$a_4 = 0{,}9375$	$b_4 = 1$	$x_4 = 0{,}96875$	$f(a_4) < 0$	$f(x_4) < 0$	$f(b_4) > 0$
5	$a_5 = 0{,}96875$	$b_5 = 1$	$x_5 = 0{,}984375$	$f(a_5) < 0$	$f(x_5) < 0$	$f(b_5) > 0$
6	$a_6 = 0{,}984375$	$b_6 = 1$	$x_6 = 0{,}992187$	$f(a_6) < 0$	$f(x_6) < 0$	$f(b_6) > 0$
7	$a_7 = 0{,}992187$	$b_7 = 1$	$x_7 = 0{,}996093$	$f(a_7) < 0$	$f(x_7) > 0$	$f(b_7) > 0$
8	$a_8 = 0{,}992187$	$b_8 = 0{,}996093$	$x_8 = 0{,}994139$	$f(a_8) < 0$	$f(x_8) > 0$	$f(b_8) < 0$
9	$a_9 = 0{,}992187$	$b_9 = 0{,}999439$	$x_9 = 0{,}995115$	$f(a_9) < 0$	$f(x_9) > 0$	$f(b_9) < 0$
10	$a_{10} = 0{,}992187$	$b_{10} = 0{,}995115$	$x_{10} = 0{,}993651$	$f(a_{10}) < 0$	$f(x_{10}) > 0$	$f(b_{10}) < 0$
11	$a_{11} = 0{,}992187$	$b_{11} = 0{,}993651$	$x_{11} = 0{,}992919$	$f(a_{11}) < 0$	$f(x_{11}) > 0$	$f(b_{11}) < 0$

$$E_{10} \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{1-0{,}5}{2^{11}} = \frac{0{,}5}{2048} = 0{,}000244$$

$x_{11} = 0{,}992919$ **solo le prime tre cifre decimali sono sicuramente esatte**