Indice

Curva Algebrica 1
Riducibilità e Irriducibilità di una curva algebrica. 3
Punti impropri di una curva 4
Particolari Trasformazioni Proiettive del piano 5
Punto Semplice di una curva 7
Punti Multipli di una curva 9
Tangente ad una curva in un suo punto multiplo 12
Punti Doppi 15
Asintoti 33
Massimi e Minimi della funzione $y = f(x)$ 43
Flessi " " " 45
Concavità " " " 45
Massimi e Minimi delle funzioni implicite 48
" " " " di 2 variabili $z = f(x, y)$ ..53
" " condizionati 55
Retta tangente a contatto h-punto 57
Flessi di una curva piana 58
Caratteri plückeriani delle curve piane 63
Genere di una curva algebrica irriducibile 67
Rappresentazione parametrica delle curve razionali. 69
Inviluppo 73
Evoluta Evolvente 79
Podaria Antipodaria 83
Tangente, Sottotangente, Normale, Sottonormale 87

Studio delle curve piane

CURVA ALGEBRICA

Riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane o proiettive, si dicono CURVA ALGEBRICA il luogo dei punti le cui coordinate non omogenee (x,y) ovvero omogenee (x_1, x_2, x_3) soddisfano ad una equazione del tipo:

$$f(x,y) = 0 \quad \text{opp.} \quad F(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (1)$$

dove $f(x,y)$ è un polinomio in x, y ed $F(x_1, x_2, x_3)$ è un polinomio omogeneo nelle variabili x_1, x_2, x_3.

ORDINE di una curva algebrica è il GRADO della sua equazione rispetto ad x e y.

La (1) può anche porsi nella seguente forma:

$$f(x,y) = \varphi_n(x,y) + \varphi_{n-1}(x,y) + \varphi_{n-2}(x,y) + \dots + \varphi_p(x,y) + \dots + \varphi_1(x,y) + \varphi_0 = 0 \qquad (2)$$

essendo:

$\varphi_0 = a_{00} =$ costante

$\varphi_1 = a_{10}x + a_{01}y$

$\varphi_2 = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2$

$\varphi_3 = a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$

.....

La generica retta del piano taglia la curva C_n in n p
Pertanto l'ORDINE di una curva algebrica rappres
il numero dei punti d'essa in comune con la gen
retta del piano.
Se la retta ha infiniti punti in comune con la C_n
allora le appartiene: cioè la C_n è RIDUCIBILE e la r
ne è una componente.

L'ordine di una curva algebrica ha CARATTERE PROIETTIVO: cioè, applicando all'equazione della C_n u
sostituzione lineare (COLLINEAZIONE):

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \\ x_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \\ x_3 &= a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 \end{aligned} \qquad (3)$$

a determinante non

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

si ottiene l'equazione

$$F(X_1, X_2, X_3) = 0$$

di una curva algebrica, anch'essa di ordine n, TRASFORMA della C_n.

Irriducibilità e riducibilità di una curva algebrica

Se è identicamente:

$$f(x,y) = [f_1(x,y)]^{\lambda} \cdot [f_2(x,y)]^{\nu} \cdot \ldots \cdot [f_m(x,y)]^{\sigma} \qquad *(4)$$

ove:

$\begin{cases} f_1, f_2 \ldots, f_m \text{ sono polinomi irriducibili} \\ \lambda + \nu + \ldots + \sigma \leq m \end{cases}$

Allora la curva algebrica C_n di equazione $f(x,y)=0$ si dice RIDUCIBILE cioè la curva si spezza (degenera) nelle m curve (dette COMPONENTI della C_n) di equazioni:

$$(5) \qquad f_r(x,y) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots m)$$

contate rispettivamente $\lambda, \nu, \ldots \sigma$ volte.

Se $f(x,y)$ è irriducibile anche la curva $f(x,y)=0$ è IRRIDUCIBILE. (vedere Aprile... vol I° pag. 91)

Intersezioni di una curva algebrica C_n con la retta impropria: punti all'infinito di una curva algebrica

Si ottengono risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_n(x,y) = a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \dots + a_{1,n-1}xy^{n-1} + a_{0,n}y^n = 0 \qquad (6)$$

ponendo $m = y/x$

$$a_{0,n}\cdot m^n + a_{1,n-1}m^{n-1} + \dots + a_{n-1,1}m + a_{n,0} = 0 \qquad (7)$$

I punti impropri della curva avranno coordinate:

$$P_1 \equiv (1, m_1, 0)\ ;\ P_2 \equiv (1, m_2, 0)\ \dots\ ,\ P_n \equiv (1, m_n, 0)$$

Dalla (6) si deduce che il gruppo dei termini di grado massimo nella equazione non omogenea della C_n, uguagliato a zero è l'equazione complessiva delle rette che dall'origine proiettano i punti impropri della retta.

N.B. Se i punti impropri della C_n sono tutti immaginari allora la C_n è una curva ovale.

5

Particolari trasformazioni proiettive del piano, di uso frequente (vedere Aprile .... vol I - 96)

E' utile e talvolta necessario ricorrere a trasformazioni proiettive del piano, allorchè si voglia portare nell'origine $O \equiv (0,0,1)$ determinati punti

1) Se si vuole portare il punto improprio

$$P_\infty \equiv (a,b,0) \quad \text{in} \quad O \equiv (0,0,1)$$
$$x_1, x_2, x_3 \qquad\qquad X_1, X_2, X_3$$

bisogna applicare la seguente collineazione:

$$\begin{cases} x_1 = a X_3 \\ x_2 = X_2 + b X_3 \\ x_3 = X_1 \end{cases} \qquad (8)$$

2) $X_\infty \equiv (1,0,0)$ in $O \equiv (0,0,1)$; $Y_\infty \equiv (0,1,0)$ in $O \equiv (0,0,1)$

$$\begin{cases} x_1 = X_3 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_1 \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_3 \\ x_3 = X_2 \end{cases} \qquad (10)$$

3) $\begin{cases} J \equiv (1, i, 0) & \text{in } O \equiv (0,0,1) \\ \bar{J} \equiv (1, -i, 0) & \text{in } Y_\infty \equiv (0,1,0) \end{cases}$

$O \equiv (0,0,1)$ in $X_\infty \equiv (1,0,0)$

$$\begin{cases} x_1 = X_2 + X_3 \\ x_2 = -i(X_2 - X_3) \\ x_3 = X_1 \end{cases} \qquad (11)$$

La (11) porta l'origine del sistema x_1, x_2, x_3 nel punto improprio dell'asse delle X del sistema X_1, X_2, X_3.

La trasformazione inversa della (11) è:

$$X_1 = x_3$$

$$X_2 = \frac{x_1 + i x_2}{2}$$

$$X_3 = \frac{x_1 - i x_2}{2} \qquad (11')$$

N.B.

Una curva di ordine n ha:

$$\frac{n(n+3)}{2} + 1$$

coefficienti, dei quali: $N = \frac{n(n+3)}{2}$ essenziali

Punto semplice di una curva

Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ della curva C_n (algebrica o trascendente) di equazione $f(x,y) = 0$ si dice SEMPLICE quando ad essa una sola delle intersezioni con la generica retta r uscente da P_0.

Tale retta incontra la curva C_n in altri $n-1$ punti diversi da P_0.

In un punto semplice una almeno delle derivate parziali prime della $f(x,y)$ è diversa da zero, cioè:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \neq 0 \quad \text{opp.} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \neq 0$$

Punti multipli di una curva

Per una curva C_n (algebrica o trascendente) un punto P_0 si dice MULTIPLO e precisamente r-plo (o di molteplicità r) quando la generica retta passante per esso vi ha riunite r delle sue intersezioni con la curva.

I PUNTI-MULTIPLI della curva $f(x,y)=0$ sono forniti dalle soluzioni del sistema:

$$\boxed{f(x,y)=0 \;;\; \frac{\partial f}{\partial x}=0 \;;\; \frac{\partial f}{\partial y}=0} \qquad (12)$$

La C.N.S. perché una curva presenti la molteplicità r nel punto $P_0\equiv(x_0,y_0)$ è che in esso si ANNULLINO la $f(x,y)$ e tutte le sue derivate parziali fino a quelle dell'ordine r-1 e che almeno delle derivate parziali di ordine r sia $\neq 0$

Una curva algebrica irriducibile ha un numero finito di punti multipli.

Di una curva algebrica C_n occorre considerare anche gli eventuali punti multipli impropri.
Essi si ricavano dal seguente sistema:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \; ; \; \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \; ; \; \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \; ; \; \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \qquad (13)$$

con $x_3 = 0$

C.N.S. perché il punto P_0 della C_n sia multiplo di ordine r è che in P_0 si annullino tutte le derivate parziali di ordine $r-1$ della $F(x_1, x_2, x_3)$ ma non tutte le derivate parziali di ordine r.

C.N.S. perché la C_n di equazione $f(x,y) = 0$ abbia nell'origine un punto multiplo di ordine r, è che siano identicamente nulli tutti i coefficienti di tutte le forme:

$$\varphi_K(x,y) \qquad (K = 0, 1, 2, \dots, r-1)$$

ma non tutti i coefficienti di $\varphi_r(x,y)$; ossia che l'equazione della C_n sia del tipo:

$$\varphi_n(x,y) + \varphi_{n-1}(x,y) + \dots + \varphi_r(x,y) = 0 \qquad (14)$$

C.N.S. perché una curva algebrica di ordine n, di equazione $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ abbia un punto multiplo di ordine r in

$$O \equiv (0, 0, 1) \; ; \; X_\infty \equiv (1, 0, 0) \; ; \; Y_\infty \equiv (0, 1, 0)$$

è che in $F(x_1, x_2, x_3)$ la potenza massima della variabile (rispettivamente x_3, x_1, x_2) abbia esponente $n-r$.

1° Caso: $F = \varphi_n(x_1, x_2) + \varphi_{n-1}(x_1, x_2)\, x_3 + \dots + \varphi_r(x_1, x_2)\, x_3^{n-r}$ $\quad O$

2° Caso: $F = \alpha_n(x_2, x_3) + \alpha_{n-1}(x_2, x_3)\, x_1 + \dots + \alpha_r(x_2, x_3)\, x_1^{n-r}$ $\quad X_\infty$

3° Caso: $F = \beta_n(x_1, x_3) + \beta_{n-1}(x_1, x_3)\, x_2 + \dots + \beta_r(x_1, x_3)\, x_2^{n-r}$ $\quad Y_\infty$

In coordinate non omogenee possiamo dire che: C.N.S. perché la curva algebrica di equazione $f(x,y)=0$ abbia nel punto improprio X_∞ (opp. Y_∞) dell'asse delle ascisse (ordinate) un punto r-plo, è che la potenza massima della variabile x (y) nella $f(x,y)$ abbia esponente $n-r$.

Se nell'equazione di una curva algebrica, il complesso dei termini di grado più basso è di grado r, l'ORIGINE è un punto multiplo di grado r.

Le tangenti ad una curva in un punto multiplo P_0

Dicesi TANGENTE alla C_n nel suo punto r-plo P_0, ogni retta che abbia riunite in P_0 (almeno) $r+1$ delle sue intersezioni con la C_n.

Le rette tangenti alla C_n nel suo punto r-plo sono rappresentate complessivamente dall'equazione:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{P_0}(x-x_0)+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{P_0}(y-y_0)\right]^{(r)} f=0 \qquad (15)$$

$r=1$: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(y-y_0)=0$ tangente ordinaria

$r=2$: $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_0}(x-x_0)^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(x-x_0)(y-y_0)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(y-y_0)^2=0$

$r=3$: $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{P_0}(x-x_0)^3+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{P_0}(x-x_0)^2(y-y_0)+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)(x-x_0)(y-y_0)^3+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)(y-y_0)^3=0$

In coordinate omogenee essendo $P_0 \equiv (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ si ha:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{P_0}x_1+\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_{P_0}x_2+\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_{P_0}x_3\right]^{(r)} F=0 \quad \text{app.}$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)(x_1-x_{01})+\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(x_2-x_{02})+\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)(x_3-x_{03})\right]^{(r)} F=0 \qquad (16)$$

Se tali tangenti sono tutte distinte P₀ è un PUNTO MULTIPLO - ORDINARIO.

Se l'ORIGINE è un punto multiplo di grado r l'equazione complessiva delle tangenti nell'origine si ottiene ponendo uguale a zero il complesso dei termini di grado r, cioè:

$$\varphi_r(x,y) = 0$$

Se X_∞ (Y_∞) è un punto multiplo di grado r, si mette in evidenza x^{n-r} (y^{n-r}) fra i termini che lo contengono. Il coefficiente di x^{n-r} (y^{n-r}) è un polinomio $\delta(y)$ [$\gamma(x)$] in generale di grado r che rappresenta l'equazione complessiva delle tangenti alla C_n in X_∞ (Y_∞).
Un eventuale abbassamento di grado di tale equazione in $y(x)$ corrisponde un pari ordine di molteplicità della retta impropria come tangente alla C_n in X_∞ (Y_∞).

Se l'origine O è un punto semplice per la C_n, la tangente alla curva in O si ottiene uguagliando a zero il complesso dei termini di primo grado dell'equazione della C_n, cioè:

$$\varphi_1(x,y) = 0$$

Punti doppi

C.N.S. perché la curva abbia un punto doppio nell'origine O è che nella sua equazione manchino il termine noto ed i termini di primo grado!

Allora l'insieme dei termini di secondo grado, uguagliato a zero, dà l'equazione complessiva delle due tangenti alla C_n nell'origine.

I PUNTI DOPPI della curva $f(x,y)=0$ sono forniti dalla soluzione del sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad ; \quad f(x,y)=0 \qquad (17)$$

Se $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ è una soluzione del sistema (17) allora P_0 è un PUNTO DOPPIO ($r=2$) quando non sono tutte nulle le derivate parziali seconde:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_0} \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{P_0} \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{P_0}$$

L'equazione complessiva delle tangenti alla C_n in P_0 è:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_0}\cdot(x-x_0)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{P_0}(x-x_0)(y-y_0) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{P_0}(y-y_0)^2 = 0 \qquad (18)$$

oppure ponendo:

$$m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$$

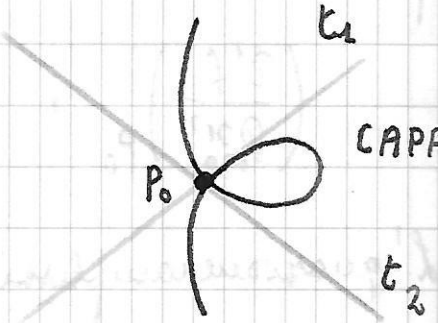
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{P_0} m^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{P_0} m + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_0} = 0 \quad (19) \quad \begin{cases} m_1 \\ m_2 \end{cases}$$

m_1 ed m_2 sono i 2 coefficienti angolari delle tangenti alla C_n in P_0.

Le due tangenti t_1, t_2 alla C_n nel punto (reale) P_0 risultano REALI e DISTINTE, REALI e COINCIDENTI, COMPLESSE e CONIUGATE, a seconda che il valore dell'Hessiano H [opposto del discriminante Δ della (19)] in P_0 risulti $\lessgtr 0$, cioè:

$$H(P_0) = -\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{P_0} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{P_0} \lessgtr 0$$

1) $H(x_0, y_0) <$ cioè $\Delta > 0$ quindi $t_1 \neq t_2$



Il punto P_0 è un NODO REALE, cioè per esso passano 2 rami reali della curva (PUNTO DOPPIO - ORDINARIO) che possono dirigersi al finito o all'∞.

Se si dirigono al finito, nelle vicinanze del punto doppio, ha la forma di un occhiello detto CAPPIO.

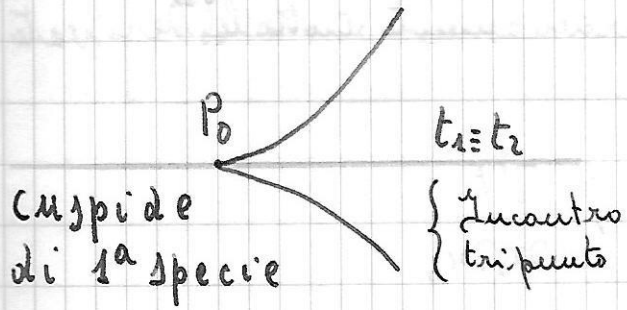
2) $H(x_0, y_0) > 0$, $\Delta < 0$ t_1, t_2 complesse e coniugate

P_0 è un PUNTO-DOPPIO-ISOLATO o NODO-ISOLATO; per P_0 non passano rami reali della curva.
Nell'intorno di P_0 la curva si compone di due rami immaginari; P_0 è realmente un punto della curva per cui soddisfa alle $f(x,y)=0$



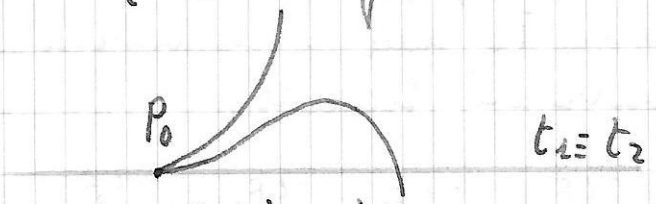
3) $H(x_0, y_0) = 0$; $\Delta = 0$; $t_1 \equiv t_2$ | Se punto P_0 è detto isolato perché esiste un conveniente intorno di esso, nel quale non cadono altri punti reali della curva, oltre P_0.

P_0 è PUNTO-DOPPIO-NON-ORDINARIO (cioè a tangenti coincidenti).

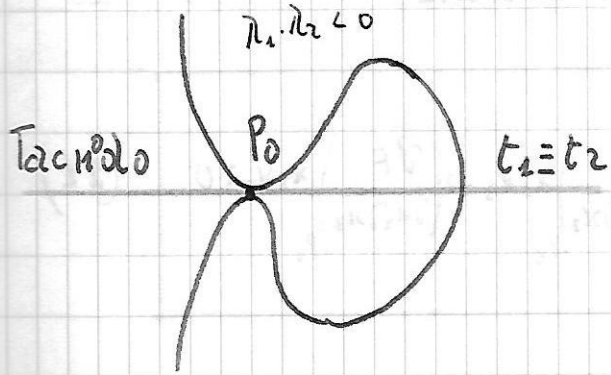


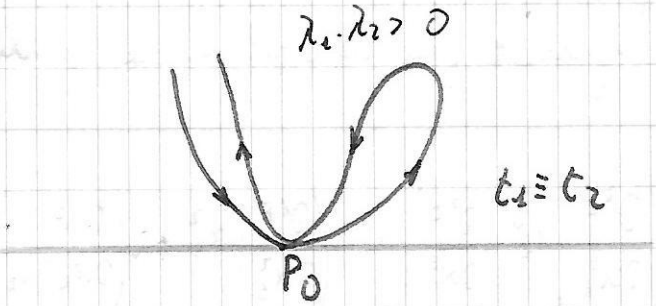
cuspide di 1ª specie

{ 2 incontro
{ 1 tripunto

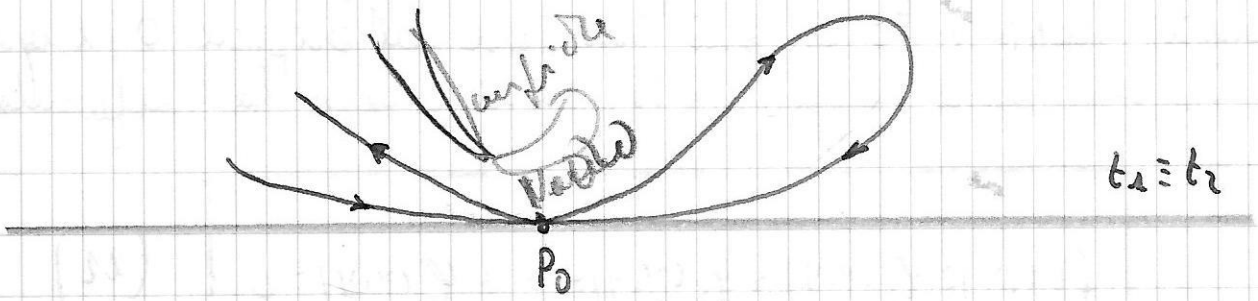


cuspide di 2ª specie





tacnodo (o doppio nodo)



Oxnodo (o triplo nodo)

Se la curva C_n ha equazione $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ allora i suoi punti doppi sono forniti dalle soluzioni del sistema:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0} \qquad (20)$$

$P_0 \equiv (x_0, y_0)$, soluzione delle (20) è un PUNTO-DOPPIO per la C_n se in P_0 non si annullano contemporaneamente tutte le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \; , \; \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \; , \; \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \; , \; \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \; ; \; \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} \; ; \; \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3}$$

L'equazione complessiva delle tangenti diventa:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\right)_{P_0} x_1^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\right)_{P_0} x_2^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}\right)_{P_0} x_3^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_{P_0} x_1 x_2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3}\right)_{P_0} x_1 x_3 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3}\right)_{P_0} x_2 x_3 = 0} \qquad (21)$$

Inoltre, poiché mediante un'opportuna trasformazione di coordinate il punto doppio P_0 si può portare nell'origine O, l'equazione della C_n con punto doppio in P_0, sarà (dopo la trasformazione) del tipo:

$$\boxed{f(x,y) = \varphi_2(x,y) + \varphi_3(x,y) + \dots + \varphi_n(x,y) = 0} \qquad (22)$$

mentre l'equazione complessiva delle tangenti è:

$$\varphi_2(x,y) = a_{02}y^2 + 2a_{11}xy + a_{20}x^2 = 0 \qquad (23)$$

ossia ponendo: $m = y/x$ (coefficiente angolare delle tangenti)

$$a_{02}m^2 + 2a_{11}m + a_{20} = 0 \qquad (24)$$

Ancora studiamo con maggiore precisione i casi $H(x_0, y_0) \leq 0$ ($\Delta \geq 0$):

. . . CASO IPERBOLICO, Nodo Reale: $H(x_0, y_0) < 0$ $\Delta > 0$; $t_1 \neq t_2$

Siano t_1, t_2 le tangenti alla C_n in P_0 (che per noi è diventato origine) le cui equazioni sono:

$$y = m_1 x \quad ; \quad y = m_2 x$$

Consideriamo il fascio delle parabole C_2:

$$\boxed{y = m_2 x + \lambda x^2} \qquad (25)$$

(che passano per il punto improprio dell'asse delle y e sono tangenti nell'origine $P_0 \equiv O$ alla t_2).
Cerchiamo le intersezioni della C_n con la C_2 ancora in $P_0 \equiv O$.

Ognuna delle parabole (25) ha ovviamente (almeno) un incontro triplicato con la C_n in $P_0 \equiv O$, come del resto risulta dalla eliminazione della y fra la (25) e la (22), che conduce ad un'equazione del tipo:

$$A x^3 + B x^4 + C x^5 + \dots = 0$$

con A (in generale non identicamente nullo) funzione lineare di λ. Al valore λ_1 di λ tale che: $A = 0$ corrisponde la parabola osculatrice:

$$\boxed{y = m_1 x + \lambda_1 x^2} \qquad (26)$$

le la rimanente in $P_0 \equiv O$ 4 intersezioni con la C_n.
Analogamente, tra le parabole cubiche del fascio:

$$y = m_2 x + n_2 x^2 + \nu x^3 \qquad (27)$$

aventi tutte un incontro 4-punto con la C_n in $P_0 \equiv O$, a una è una particolare per la quale l'incontro è (almeno) 5-punto.
Infatti eliminando la y fra la (27) e la (22) si ha:

$$A_2 x^4 + B_1 x^5 + C_2 x^6 + \dots = 0$$

con A_2 (in generale non identicamente nullo) funzione lineare di π.
La parabola cubica osculatrice corrispondente al valore ν_2 di ν per il quale è: $A_2(\nu) = 0$.
Un'analoga serie di Parabole Osculatrici si ottiene partendo dalla tangente t_2: ciò conferma che $P_0 \equiv O$ è l'origine di due rami lineari della C_n.

La successione di queste parabole osculatrici conduce ad una approssimazione della C_n nell'intorno $P_0 \equiv O$ in rapporto alla t.
Quando questa successione può essere portata avanti indefinitamente si dice che il punto P_0, rispetto alla tangente t, è l'origine di un ramo lineare.
Nel caso algebrico, una unità è sempre l'origine di due rami lineari.

. . . CASO - PARABOLICO o CUSPIDALE $H(x_0, y_0) = 0$ $\Delta = 0$, $t_1 =$

$m_1 = m_2 = m$; $t_1 = t_2 = t \rightarrow y = mx$

L'equazione complessiva delle tangenti è:

$$\varphi_2(x, y) = a_{02}(y - mx)^2 = 0$$

per cui la (22) diventa

$$f(x, y) = a_{02}(y - mx)^2 + (a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \dots + \varphi_n(x, y) = 0 \quad (28$$

Eliminiamo la y tra la (28) e l'equazione $y = mx$ della tangente t, ottenendo un'equazione in x del tipo:

$$(a_{30} + 3a_{21}m + 3a_{12}m^2 + a_{03}m^3)x^3 + \varphi_4(x, mx) + \dots + \varphi_n(x, mx) = 0$$

ossia del tipo:

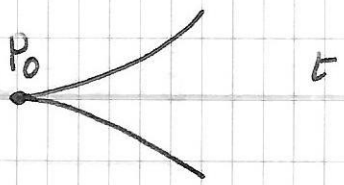
$$Ax^3 + Bx^4 + Cx^5 + Dx^6 + Ex^7 + \dots = 0 \quad (29)$$

Se è $A \neq 0$ la t avrà con la C_n 3 e soltanto 3 intersezioni raccolte nel punto doppio da chiamarsi allora CUSPIDE ORDINARIA o di PRIMA - SPECIE.

In tal caso ogni parabola del fascio

$$y = mx + \lambda x^2 \quad (30)$$

passante semplicemente per $P_0 \equiv O$, tangente ivi alla t, ma in P_0 con C_n un INCONTRO-TRI PUNTO e non di molteplicità superiore, poichè eliminando la y tra la (28) e la (30) l'equazione della t si ottiene: $\{A x^3 + B(\lambda) x^4 + C(\lambda) x^5 + \dots = 0$ (29') le (29) con $A \neq 0$ per cui $x = 0$ è soluzione tripla e non di molteplicità superiore, cioè:



<< nell'intorno di una cuspide ordinaria, la C_n non può essere approssimata con curve di ordine $n/3$ che passino semplicemente per il punto doppio >>.

Adesso supponiamo che:

$$\boxed{A = 0} \quad (31)$$

La (29) diventa:

$$\boxed{B x^4 + C x^5 + D x^6 + E x^7 + \dots = 0} \quad (32)$$

ne segue che la tangente cuspidale ha almeno 4 intersezioni con la C_n raccolte nel punto doppio $P_0 \equiv O$, e tutte le parabole del fascio (30) vi danno un incontro 4-punto per generici valori di λ.

Pertanto la condizione (31) si può interpretare come la condizione perchè la C_n abbia un SECONDO-PUNTO-DOPPIO-INFINITAMENTE-VICINO a $P_0 \equiv O$, nella direzione della tangente cuspidale.

Ricerco la parabola osculatrice che in $P_0 \equiv O$ ha un incontro 5-punto, che si ottiene per i valori di λ che rendono, nella (32)

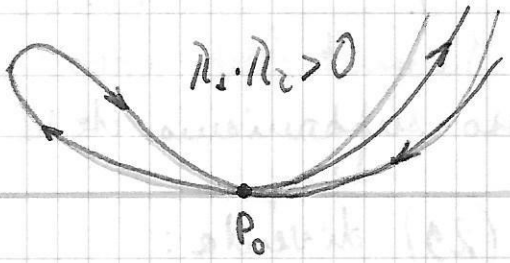
(33) $\boxed{B(\lambda)=0}$ { equazione di secondo grado in λ con discriminante Δ_1

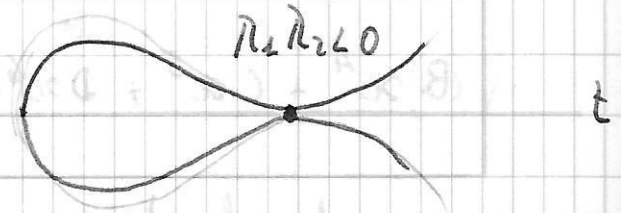
Si posso avere 3 casi:

1°) $\Delta_1>0 \quad ; \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

Esistono 2 parabole osculatrici: $\boxed{\begin{array}{l} y=mx+\lambda_1 x^2 \\ y=mx+\lambda_2 x^2 \end{array}}$

Questo fatto pone in evidenza una singolarità tale da potersi considerare come configurazione limite di 2 nodi, dei quali l'uno si avvicini indefinitamente all'altro, la curva risulta di 2 ARCHI-TANGENTI, giacenti dalla stessa parte della tangente comune (cuspidale) se $\lambda_1\lambda_2>0$, ovvero da parti opposte se $\lambda_1\lambda_2<0$.





Queste singolarità diranno TACNODO-IPERBOLICO, REALE, o DOPPIO-NODO, NODO DI SECONDA-SPECIE.

Nell'intorno di un tale punto doppio, i rami lineari uscenti da esso si possono approssimare con due distinte successioni di parabole osculatrici:

$$y=mx+\lambda_1 x^2+\nu_1 x^3+\dots$$
$$y=mx+\lambda_2 x^2+\nu_2 x^3+\dots$$

analogamente al caso del nodo.

2°) $\Delta_1 < 0$ Caso ELLITTICO

λ_1 e λ_2 sono complesse e coniugate; si hanno 2 parabole osculatrici immaginarie; P_0 è un TACNODO-ISOLATO.

3°) $\Delta_1 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ Caso PARABOLICO

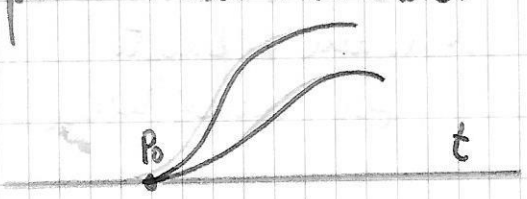
Una sola parabola del fascio (30) [corrispondente al comune valore $\lambda = \lambda_0$ delle soluzioni della (33)] di equazione

$$(34) \qquad \boxed{y = mx + \lambda_0 x^2}$$

avente almeno 5 intersezioni con la C_n in $P_0 \equiv O$, è ivi osculatrice alla curva.
Precisamente:
Se (per $\lambda = \lambda_0$) il coefficiente di x^5 nella (29') risulta $\neq 0$, cioè

$$(35) \qquad \boxed{C \neq 0} \qquad C(\lambda_0) \neq 0$$

allora la parabola osculatrice (34) ha non più di 5 intersezioni raccolte in P_0, e la singolarità che ne risulta si presenta detta CUSPIDE-DI-SECONDA-SPECIE o ROSTRO.



Nasce come limite di una cuspide di prima specie e di un modo che le si avvicina indefinitamente.
In questo caso, nell'intorno del punto doppio, la curva si rappresenta mediante uno sviluppo del tipo (frazionario)

$$y = mx + \lambda_0 x^{\frac{4}{2}} + A_1 x^{\frac{5}{2}} + \dots$$

Se la (35) diventa:

$$C = 0 \qquad (36)$$

allora le intersezioni della parabola (34) con la C_n, riunite in $P_0 \equiv O$, salgono a 6.

Per determinare la natura della singolarità, consideriamo il fascio di PARABOLE-CUBICHE

$$(37) \qquad y = m_1 x + n_0 x^2 + \nu x^3$$

Queste hanno tutte un incontro 6-punto con la C_n in P_0, giacché eliminando la y fra la (37) e l'equazione (29) della curva si ottiene un'equazione in x del tipo:

$$(38) \qquad D(\nu)\, x^6 + E x^7 + \dots = 0$$

con D polinomio di secondo grado in ν.

Ai valori ν_1, ν_2 di ν che annullano D, corrispondono 2 parabole del fascio (37) per le quali l'incontro (con la C_n in $P_0 \equiv O$) diviene 7-punto (parabole osculatrici).

Si consideri il Δ_2 dell'equazione:

$$D(\nu) = 0 \qquad (39)$$

distinguendo i 3 casi seguenti:

1°) IPERBOLICO $\qquad \Delta_2 > 0 \qquad \nu_1 \neq \nu_2$

Le soluzioni ν_1, ν_2 sono reali e distinte, le suddette parabole cubiche osculatrici sono reali e distinte e la singolarità dicesi:

OSCNODO-IPERBOLICO, REALE, o NODO-TRIPLO, NODO-DI TERZA-SPECIE.

Nasce come limite di un tacnodo e di un nodo ovvero di 3 nodi. Analogamente al caso del tacnodo, si hanno per la Cn nell'intorno di tale punto doppio, rappresentazioni mediante successioni di parabole osculatrici:

$$y = mx + \lambda_0 x^2 + \nu_1 x^3 + \dots$$
$$y = mx + \lambda_0 x^2 + \nu_2 x^3 + \dots$$

2°) $\Delta_2 < 0$ OSCNODO ISOLATO

3°) PARABOLICO $\Delta_2 = 0$; $\nu_1 = \nu_2 = \nu_0$

se in corrispondenza di $\nu_1 = \nu_2 = \nu_0$ è $E \neq 0$,
si ha una sola parabola osculatrice di equazione

$$\boxed{y = mx + \lambda_0 x^2 + \nu_0 x^3} \qquad (40)$$

la quale non ha non più di 3 intersezioni con la Cn in $P_0 \equiv O$, ~~in quanto $E \neq 0$~~. Il punto doppio prende il nome di CUSPIDE-DI-TERZA-SPECIE.

Se è $E^{(\nu_0)} = 0$ si ricava il fascio di parabole generiche:

$$y = mx + \lambda_0 x^2 + \nu_0 x^3 + \alpha x^4$$

Esempi ①

$x(x^2+y^2) - 2ay^2 = 0$ Cissoide di Diocle

$O \equiv (0,0,1)$ punto doppio; $t_1 \equiv t_2) \; y = 0$ caso cuspidale

Approssimo la curva col fascio di parabole: $y = \lambda x^2$

I punti comuni al fascio di parabole ed alla cubica si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \lambda x^2 \\ x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0 \end{cases} \qquad x^3 + \lambda^2 x^5 - 2a\lambda^2 x^4 = 0 \qquad \lambda^2 x^5 - 2a\lambda^2 x^4 + x^3 = 0$$

$$x^3(\lambda^2 x^2 - 2a\lambda^2 x + 1) = 0$$

Quindi poiché ogni parabola del fascio, passante semplicemente per O, ha in O con la cubica un incontro tripunto e non di molteplicità maggiore, vuol dire che O è cuspide di prima specie.

② 4) $4x^4 + x^3 y + xy^2 - y^2 = 0$ O punto doppio $t_1 \equiv t_2) \; y = 0 \; \{m = 0$

$$\begin{cases} y = 0 \quad x^4 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases}$$

la tangente ha con la curva, riunite in O, 4 intersezioni; si tratta di un tacnodo, o di cuspide di 2ª specie, o di osnodo

Approssimo la curva, in O, col fascio di parabole, $y = \lambda x^2$

$$\begin{cases} y = \lambda x^2 \\ C_4 = 0 \end{cases} \qquad x^4[\lambda(1+\lambda)x + 4 - \lambda^2] = 0 \qquad x^4 = 0$$

La radice quadrupla $x = 0$ di $C_4 = 0$ dice che la curva cubica ed il fascio di parabole hanno riunite in O 4 intersezioni comunque vari λ.

Cerco le parabole osculatrici del fascio, cioè cerco le parabole del fascio che abbiano 5 intersezioni con la curva riunite in O.

$4 - \lambda^2 = 0 \qquad \lambda = \pm 2$

Si ottengono le 2 parabole osculatrici $C_1) \; y = x^2$; $C_2) \; y = -x^2$

poiché $C_1 \neq C_2$ O è TACNODO - REALE

③

$C_4)$ $(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2) - xy^3 + 4x^2 = 0$

O punto doppio ; $t_1 \equiv t_2$ | $x=0$

In questo caso è $m=\infty$; pertanto bisogna approssimare la curva col fascio di parabole di equazione: $x = \lambda y^2$

$\begin{cases} x=0 \\ C_4=0 \end{cases}$ $y^4=0$ la tangente ha rimite con C_4 4 intersezioni in

$\begin{cases} x=\lambda y^2 \\ C_4=0 \end{cases}$ $y^4\left[(\lambda^2 y^2 + 1 - 2\lambda)^2 - \lambda y\right] = 0$

$y^4\left[\lambda^4 y^4 + 2(1-2\lambda)\lambda^2 y^2 - \lambda y + (1-2\lambda)^2\right] = 0$

La generica parabola del fascio ha rimite in O con la C_4, inoltre cerco le parabole osculatrici del fascio:

- $1-2\lambda = 0$ $\quad \lambda = 1/2$ $\quad C_1 \equiv C_2$ $\quad x = \frac{1}{2} y^2$; $y^2 = 2x$

O è CUSPIDE di 2ª specie $\begin{cases} y^2 = 2x \\ C_4 = 0 \end{cases}$ Tale parabola ha con la C solo un incontro singolare e uno superiore

④

$C_4)$ $(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2) - x^3 + 4x^2 = 0$

O punto doppio $t_1 \equiv t_2$ | $x=0$

$\begin{cases} x=0 \\ C_4=0 \end{cases}$ $y^4=0$

$x = \lambda y^2$ { fascio di parabole passanti semplicemente per O e tangenti alla $t_1 \equiv t_2$

$$\begin{cases} x = \lambda y^2 \\ C_4 = 0 \end{cases} \qquad y^4 \cdot \left[(\lambda^2 y^2 + 1)^2 - 4\lambda(\lambda^2 y^2 + 1) + \lambda^2(4 - \lambda y^2) \right] = 0$$

$$y^4 \left[A y^4 + B y^3 + C y^2 + 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 \right] = 0$$

Mi cerco le parabole osculatrici del fascio:

$(1 - 4\lambda + 4\lambda^2)^2 = (1 - 2\lambda)^2 = 0 \quad 1 - 2\lambda = 0 \quad \lambda = \frac{1}{2}$ (si hanno 6 intersezioni)

$y^2 = 2x \qquad C_1 \equiv C_2$

$$\begin{cases} C_1 \equiv C_2 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases} \quad (x^2 + 2x)^2 - 4x(x^2 + 2x) - x^3 + 4x^2 = 0 \quad ; \quad x^2(x+2)^2 - 4x^2(x+2) - x^3 + 4x^2 = 0$$

$x^2 + 2x + 4 - 4x - 8 - x^2 + 4 = 0 \quad -2x = 0 \quad x = 0$

$x = \frac{y^2}{2} \quad y^6 = 0$ questo ci deve subito suggerire che

La parabola osculatrice ha con la C_4, in O, 6 intersezioni.

Considero il fascio di parabole cubiche C_3:

$y = \frac{1}{2}x^2 + Vx^3 \qquad x = \frac{1}{2}y^2 + Vy^3$

e ho queste determino quelle che hanno con la C_4, in O, ricevute 7 intersezioni:

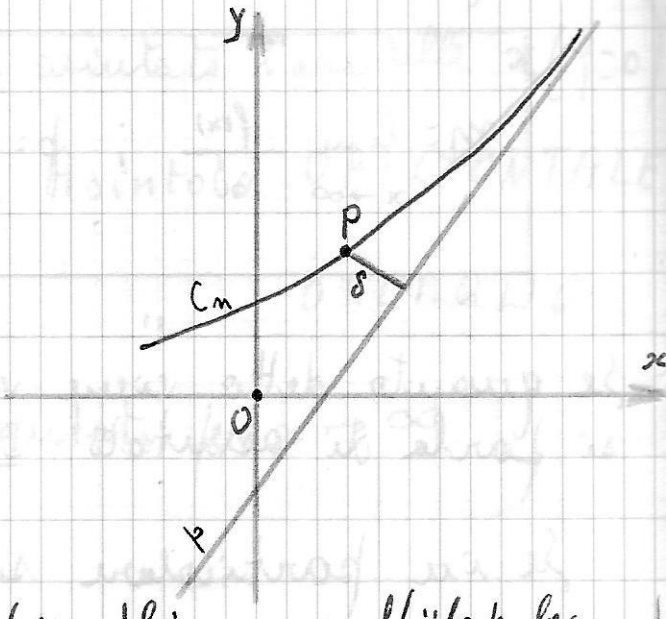
$$\begin{cases} C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases} \quad \left[\left(\tfrac{1}{2}y^2 + Vy^3\right)^2 + y^2 \right] - 4\left(\tfrac{1}{2}y^2 + Vy^3\right)\left[\left(\tfrac{1}{2}y^2 + Vy^3\right)^2 + y^2 \right] \cdot$$

$$- \left(\tfrac{1}{2}y^2 + Vy^3\right)^3 + 4\left(\tfrac{1}{2}y^2 + Vy^3\right)^2 = 0$$

$y^6 \left[\ldots\ldots Ay + 132\lambda^2 - 1 \right] = 0 \quad 32\lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda = \pm\frac{1}{4\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{8}$

$C_3 \left(x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{\sqrt{2}}{8}y^3 \; ; \; C_3 \right) \; x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{\sqrt{2}}{8}y^3$ O è OSCNODO

ASINTOTI



... Una retta si dice **ASINTOTO** di una curva piana C_n se la sua distanza δ di un suo punto generico dalla retta tende a ZERO, quando il punto si allontana all'∞ su un ramo della curva stessa.

Nel caso di una curva algebrica definiamo **asintoto** (tangente asintotica) la tangente ad essa in un suo punto improprio (semplice o multiplo per la curva).

Di solito il nome di asintoto è riservato alla tangente in un punto improprio quando essa sia a distanza finita ma a volte si parla anche di asintoti impropri o all'∞. Vi sono di asintoti coincidenti con la retta impropria

... La curva C_n abbia equazione

$$\boxed{y = f(x)} \qquad (50)$$

Se si può porre $\boxed{f(x) = mx + p + g(x)}$ essendo:

$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ allora la retta:

$$\boxed{y = mx + p} \qquad (51)$$

si dice ASINTOTO (obliquo) del tuo grafico di $f(x)$.

In generale si usano le formule:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad p = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] \qquad (52)$$

Se quanto detto viene verificato solo per $x \to +\infty$ o sol $x \to -\infty$ si parla di asintoto DESTRO o SINISTRO.

Se in particolare si verifica:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0 \qquad (53)$$

la retta $y = y_0$ è un

ASINTOTO - ORRIZZONTALE

Infine se si verifica:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \qquad (54)$$

la retta: $x = x_0$ è un

ASINTOTO - VERTICALE

Nel caso di una funzione razionale fratta, cioè del tipo:

$$y = \frac{\varphi_n(x)}{\sigma_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m} \qquad (55)$$

con $\varphi_n(x)$ e $\sigma_m(x)$ polinomi privi di zeri comuni

si verifica quanto segue:

se: $n < m$ la funzione ha per asintoto l'asse delle x ($y=0$)

se: $n = m$ " " un Asintoto ORIZZONTALE

se: $n = m+1$ " " " OBLIQUO

se: $n > m+1$ " non ha asintoti per $x \to \infty$

Posizione del grafico rispetto all'asintoto

Per gli asintoti verticali $x = x_0$ si studia il segno di $x - x_0$ al tendere di y ad ∞.

Per gli asintoti orizzontali $y = y_0$ si studia il segno di $y - y_0$ al tendere di x ad ∞.

Per gli asintoti obliqui $y = mx + p$ occorre studiare il segno di $y - (mx+p)$ al tendere di x ad ∞.

Il grafico può attraversare infinite volte l'asintoto. Se però si considera una funzione costruita mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici effettuate su x, gli eventuali asintoti ne attraversano il grafico al più un numero finito di volte.

⊛ Se accade che risulti $p = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \infty$ si assume come asintoto della curva la retta impropria, che risulta tangente alla curva stessa nel punto improprio di direzione m, cioè in $P_\infty = (1, m, 0)$; si usa dire, in tal caso, che la curva ha un andamento parabolico nella direzione m.

.... La C_n abbia equazioni parametriche:

(56)
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Se si verifica:

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \qquad \lim_{t \to t_0} y(t) = \infty \qquad (57)$$

$x = x_0$ è ASINTOTO VERTICALE

Se si verifica:

(58)
$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \infty \qquad \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0$$

$y = y_0$ è ASINTOTO ORIZZONTALE

Se risulta invece:

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = \infty$$

si hanno ASINTOTI OBLIQUI di equazione:

$$y = mx + p \qquad (59)$$

dove:

$$m = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} \quad ; \quad p = \lim_{t \to t_0} [y(t) - m\, x(t)] \qquad (60)$$

N. B.

gli eventuali POLI della x o della y vanno ricercati fra i valori di t che annullano i denominatori, oppure per $t \to \infty$. Infatti se:

$$\begin{cases} \lim_{t \to \infty} x(t) = x_0 \\ \lim_{t \to \infty} y(t) = \infty \end{cases}$$

$x = x_0$ è un asintoto

$$\begin{cases} \lim_{t \to \infty} x(t) = \infty \\ \lim_{t \to \infty} y(t) = y_0 \end{cases}$$

$y = y_0$ è un asintoto

.... La C_n sia algebrica ed abbia equazione:

$$f(x,y) = \varphi_n(x,y) + \varphi_{n-1}(x,y) + \dots + \varphi_2(x,y) + \varphi_1(x,y) + \varphi_0 = 0 \qquad (6.2)$$

ove $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \dots, \varphi_2, \varphi_1, \varphi_0$ sono dei polinomi in x, y omogenei, rispettivamente di grado $n, n-1, \dots, 2, 1, 0$.

Asintoti paralleli all'asse x ed all'asse y

« L'equazione complessiva degli asintoti della C_n paralleli all'asse y (asse x), si ottiene uguagliando a zero il coefficiente della massima potenza della y (della x) nella equazione della curva.

Se, in particolare, tale coefficiente è una costante [cioè non dipende da x (da y)] la curva non possiede asintoti paralleli all'asse y (all'asse x) ».

Asintoti obliqui

Essi hanno equazione del tipo $\boxed{y = mx + p}$

Uguagliando a zero il complesso dei termini di massimo grado si ottiene l'equazione complessiva delle rette che, dall'origine, proiettano i punti impropri della C_n, cioè:

(62) $\boxed{\varphi_n(x,y)=0}$ dividendo tutto per x^n e ponendo $m=y/x$ si ottiene:

$$\boxed{\varphi_n(1,m)=0} \quad (63)$$

equazione di grado n in m.
Le soluzioni $m_1, m_2, \dots m_n$ sono i coefficienti angolari degli asintoti.

Si seca la curva C_n con la retta di equazione $y=mx+p$ dove m è il coefficiente angolare di una direzione asintotica. L'equazione in x che si ottiene evidentemente si abbasserà di grado, e si calcolerà quel valore di p che la farà abbassare ancora di un grado.
In tal caso la retta $y=mx+p$ avrà con la curva due intersezioni all'∞, e quindi sarà un suo asintoto.

N.B.

Può accadere se si ottenga per p più di un valore; in tal caso la curva ammette più di un asintoto di coefficiente angolare m, il che significa che il punto improprio $(1, m, 0)$ è almeno doppio >>.

N.B.

Se l'equazione $\varphi_n(1,m)=0$ è di grado minore di n, significa che un certo numero di radici è spinto all'∞ ($m=\infty$), cioè la curva ammette degli asintoti paralleli all'asse delle y.

Una retta incontra una curva C_n in n punti, quindi la retta impropria incontra la C_n in n punti impropri e quindi ammette n asintoti reali o ~~complessi~~ immaginari.
Se C_4 una quartica; se 2 punti impropri coincidono con X_2 e gli altri 2 coi punti ciclici, allora C_4 ha 2 asintoti $\parallel$ all'asse delle x, 2 asintoti coincidenti con le rette isotrope e pertanto non ammette asintoti obliqui (la cui ricerca è inutile)

Vedere Aprile pag. 61

Altro metodo per ricavare p

$$p = -\frac{\varphi'_{n-1}(1,m)}{\varphi'_n(1,m)}$$

dove φ'_n la derivata rispetto ad m della funzione $\varphi_n(1,m)$; $\varphi_{n-1}(1,m)$ è il valore che assume la funzione $\varphi_{n-1}(x,y)$ quando al posto della x si pone 1 ed al posto della y si pone m.

Per cui l'equazione dell'asintoto diventa:

$$\boxed{y = mx + -\frac{\varphi_{n-1}(1,m)}{\varphi'_n(1,m)}} \qquad (64)$$

Se $\varphi'_n(1,m) \neq 0$ la (64) dà un asintoto proprio della C_n

Se $\varphi'_n(1,m) = 0$ la (64) " " " a distanza infinita, cioè la retta impropria $x_3 = 0$ [avendo almeno due intersezioni riunite nel punto semplice $P_\infty = (1,m,0)$] è un asintoto.

Tenendo presente il teorema di Eulero la (64) può essere scritta anche nella seguente maniera:

$$\boxed{x\cdot\left[\frac{\partial \varphi_n(x,y)}{\partial x}\right]_{(1,m)} + y\left[\frac{\partial \varphi_n(x,y)}{\partial y}\right]_{(1,m)} + \varphi_{n-1}(1,m) = 0} \qquad (65)$$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = m \end{cases}$

valida per gli asintoti obliqui

Esempi ①

$$f(x,y) = y^3 - 4x^3 + 3xy^2 - y^2 = 0$$

$\varphi_3(x,y) = y^3 - 4x^3 + 3xy^2 = 0$; $\varphi_3(1,m) = m^3 + 3m^2 - 4 = 0$ $\begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = m_3 = -2 \end{cases}$

$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = -12x^2 + 3y^2$; $\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 3y^2 + 6xy$; $\varphi_{n-1}(1,m) = -m^2$

) $x(-12+3) + y(3+6) - 1 = 0$ $\quad -9x + 9y - 1 = 0$ cioè $y = x + \frac{1}{9}$

=2) $x(-12+12) + y(12-12) - 2 = 0$; $-2 = 0$ poiché $\varphi_1'(1,m) = 0$ ed $\varphi_{n-1}(1,m) \neq 0$

$x_3 = 0$ è asintoto

$$\begin{cases} y = mx + p = 0 \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \qquad y = x + p \quad ; \quad (x+p)^3 - 4x^3 + 3x(x+p)^2 - (x+p)^2 = 0$$

$$(x+p)^2(x+p+3x-1) - 4x^3 = 0 \quad ; \quad (x^2+2xp+p^2)(4x+p-1) + 4x^3 = 0$$

$$4x^3 + (p-1)x^2 + 8px^2 + (p-1)2px + p^2(4x+p-1) - 4x^3 = 0$$

$(9p-1)x^2 + Ax + B = 0$ $\quad 9p - 1 = 0$; $p = \frac{1}{9}$

②

$$f(x,y) = y^3 - x^2y + x^2 + y^2 = 0$$

$\varphi_3(x,y) = y^3 - x^2y$, $\varphi_3(1,m) = m^3 - m = 0$ $\begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 1 \\ m_3 = -1 \end{cases}$

$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = -2xy$; $\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 3y^2 - x^2$ $\quad \varphi_2(1,m) = m^2 + 1$

=0) $f(x,y) = y^3 + (1-y)x^2 + y^2 = 0$ $\quad 1 - y = 0$ $\quad y = 1$

=1) $x(-2) + y(3-1) + 2 = 0$; $-2x + 2y + 2 = 0$ $\quad y = x - 1$

=-1 $x(+2) + y(+3-1) + 2 = 0$; $+2x + 2y + 2 = 0$ $\quad y = -x - 1$

③

$f(x,y) = x^4 - y^4 + 4ax y^2 = 0$ SCIFOIDE

$\varphi_4(x,y) = x^4 - y^4$; $\varphi_4(1,m) = -m^4 + 1 = 0$ ← $m_1 = 1$, $m_2 = -1$, $m_3 = i$, $m_4 = -i$ { 2 assunti sono immaginari

$\frac{\partial \varphi_4}{\partial x} = 4x^3$; $\frac{\partial \varphi_4}{\partial y} = -4y^3$ $\varphi_3(1,m) = 4am^2$

$m=1$ $x(4) + y(-4) + 4a = 0$ $y = x + a$

$m=-1$ $x(4) + y(4) + 4a = 0$ $y = -x - a$

④

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$ FOLIUM di Cartesio

$\varphi_3(x,y) = x^3 + y^3 = 0$ $\varphi_3(1,m) = m^3 + 1 = 0$ ← $m_1 = -1$, m_2, m_3 { complessi e coniugati

$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 3x^2$; $\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 3y^2$; $\varphi_2(1,m) = -3am$

$x(3) + y(3) + 3a = 0$ $y = -x - a$

Massimi e minimi delle funzioni implicite

Sia $y = y(x)$ una funzione definita implicitamente dalla equazione:

$$f(x, y) = 0 \qquad (73)$$

Vediamo in quali casi l'equazione (73) definisce effettivamente, nell'intorno di un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ soddisfacente l'equazione, cioè tale che si abbia $f(x_0, y_0) = 0$, una funzione uniforme $y = y(x)$.

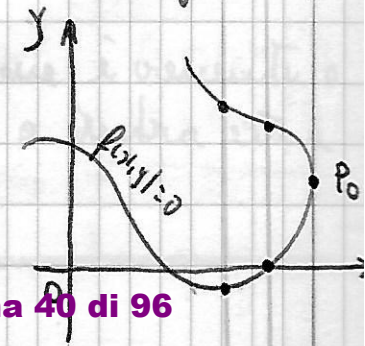
Condizione sufficiente (ma non necessaria) perché ciò accada è

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P=P_0} \neq 0$$

e che inoltre detta derivata sia continua, al pari della funzione $f(x, y)$, nell'intorno del punto P_0.

Ciò significa che, se questa derivata è $\neq 0$, ha luogo certamente il fatto desiderato, cioè la y è esplicitabile univocamente; mentre se tale derivata è nulla, il fatto può avere luogo o no.

L'interpretazione geometrica è la seguente: la condizione $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ basta ad assicurare che la curva rappresentata dalla equazione $f(x, y) = 0$, almeno nell'intorno del



punto P_0, è incontrata in uno ed un sol punto dalle parallele all'asse y. Ciò significa che $y=y(x)$ è continua e derivabile in un intorno di P_0.

Si osservi che se fosse $f'_y(x_0,y_0)=0$ ma $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, il teorema potrebbe applicarsi scambiando fra loro le veci di x e y.

Pertanto i soli punti che restano effettivamente esclusi sono i punti in cui si abbia simultaneamente $f=f'_x=f'_y=0$, ipotesi che supporremo sempre esclusa la continuità di qualcuna di queste funzioni.

Vediamo come si riesce a calcolare la derivata dy/dx senza dovere preventivamente risolvere la (73) rispetto ad y.

La (73) si può scrivere:

$$f[x,y(x)]=0 \qquad (74)$$

Derivando la (74) con la regola di derivazione delle funzioni composte si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}^{1}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{cioè}$$

$$f'_x+f'_y\cdot\frac{dy}{dx}=0 \quad \text{app.} \quad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'(x)=0 \quad \text{app.} \qquad (75)$$

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y} \quad \text{app.} \quad \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) \qquad (76)$$

Sotto le precedenti ipotesi la (76) è l'equazione della tangente alla curva di equazione $f(x,y)=0$ nel punto P_0.

Ferme rimanendo le ipotesi precedenti mi calcolo la $y''(x) = d^2y$, della $f(x,y) = 0$ considerata come funzione composta di x si può costruire il suo differenziale secondo che sarà $d^2f = 0$, cioè:

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial y} d^2y = 0$$

e dividendo per dx^2 si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

tenendo presente la (75) si ha:

$$f''_{xx} + 2f''_{xy}\cdot\frac{f'_x}{f'_y} + f''_{yy}\cdot\frac{f'^2_x}{f'^2_y} + f'_y\cdot y''(x) = 0 \qquad \text{da cui}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f''_{xx}\cdot f'^2_y - 2f''_{xx}\cdot f'_x\cdot f'_y + f''_{yy}\cdot f'^2_x}{f'^3_y}} \qquad (76)$$

Per trovare i punti di massimo e di minimo della funzione $y = y(x)$ (definita essere esplicitata solo se valgono le considerazioni precedenti) bisogna risolvere il sistema

$$(77) \qquad \boxed{\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ f'_x(x,y) = 0 \end{cases}}$$

dove:

$$\partial f/\partial y \neq 0$$

e soluzioni (x_0, y_0) di esso forniscono contemporaneamente l'ascissa del punto ed il valore della funzione.

P_0 è Massimo o Minimo se $y''(x) \lessgtr 0$ Dalla (7.6) si ha:

$$y''(x) = -\frac{f''_{xx}}{f'_y}$$ essendo $f'_x = 0$

Se è $f''_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$ allora

P_0 è MASSIMO se f''_{xx} ha lo stesso segno di f'_y

P_0 è MINIMO se f''_{xx} ha segno opposto di f'_y

Se è $f''_{xx}(x_0, y_0) = 0$ vale quanto segue:

Una soluzione (x_0, y_0) del sistema $f(x,y) = 0$; $f'_x(x,y) = 0$ è punto di Massimo o di Minimo relativo della funzione $y = y(x)$ definita implicitamente dalla equazione $f(x,y) = 0$, se la prima delle derivate parziali pure della $f(x,y)$ rispetto alla x che non si annulla è di ordine pari $\left[\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_{P=P_0} \neq 0 \text{ con } n \text{ pari} \right]$.

Il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ sarà poi punto di Massimo o di Minimo relativo, secondo che il segno di tale derivata è concorde o discorde rispetto al segno della $\frac{\partial f}{\partial y}$ ».

Massimi e Minimi delle funzioni di 2 variabili

Consideriamo la funzione di due variabili:

$$z = f(x,y) \qquad (78)$$

si dice che essa è **Massima** in un certo punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ se è possibile determinare un intorno di questo punto, tale che in ciascun punto di esso, diverso da P_0, si abbia:

$$f(x,y) < f(x_0, y_0)$$

similmente si dice che la funzione è **MINIMA** in P_0 se si verifica:

$$f(x,y) > f(x_0, y_0)$$

Tali estremi (massimo e minimo relativi) delle funzioni di 2 variabili indipendenti si dicono **LIBERI**.

Se fra le 2 variabili indipendenti x, y intercedono delle condizioni si diranno **CONDIZIONATI**

C.N. perché la funzione (78) sia massima o minima in un punto interno al suo campo di definizione è che ivi si abbia contemporaneamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (79)$$

Quindi gli eventuali punti di massimo e di minimo della funzione $z = f(x,y)$ si ottengono risolvendo il sistema (79)

Vediamo adesso quali debbano essere le condizioni sufficienti che ci assicurano l'esistenza di un estremo.

Si pongo:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_0} = r \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{P_0} = s \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{P_0} = t$$

L'espressione

$$(80) \qquad H(x,y) = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

si chiama l'HESSIANO della funzione $f(x,y)$.

Sia P_0 un punto che soddisfa il sistema (79):

$H(x_0,y_0) = rt - s^2 > 0$ caso ~~parabolico~~ ellittico $\begin{cases} r > 0 \ (t > 0) & P_0 \text{ Minimo} \\ r < 0 \ (t < 0) & P_0 \text{ Massimo} \end{cases}$

$H(x_0,y_0) < 0$ caso ~~ellittico~~ iperbolico P_0 né massimo né minimo (81)

$H(x_0,y_0) = 0$ caso parabolico Caso dubbio; bisogna ricorrere alle derivate successive

Vedere Aprile ... parte II pag. 431

Massimi e Minimi condizionati

Bisogna calcolare i punti di massimo o di minimo della funzione:

$$z = f(x, y) \qquad (82)$$

quando il punto $P = (x, y)$ è <u>vincolato</u> ad appartenere ad una linea data di equazione:

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (83)$$

se è possibile esplicitare la (83) rispetto ad y, cioè $y = y(x)$ la (82) diventa: $z = F(x) = f[x, y(x)]$

I massimi ed i minimi si ottengono risolvendo l'equazione:

$$\frac{dF}{dx} = 0$$

Se non è possibile esplicitare la (83) si ricorre al <u>metodo dei moltiplicatori di Lagrange</u>.

Si considera la nuova funzione:

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \qquad (84)$$

e la si tratta come se fosse una funzione di due variabili (x, y) non soggetta a vincoli.
I punti di massimo e di minimo si troveranno tenendo presente la (7) e la (83) cioè risolvendo il seguente sistema:

$$(85) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

da qui si ricavano:

x_0, y_0, λ_0

Naturalmente col procedimento dei moltiplicatori di Lagrange si attengono soltanto probabili punti di massimo o di minimo relativi ed occorrerà una ulteriore discussione per decidere se le soluzioni trovate corrispondono ad effettivi punti di massimo o di minimo

---

I punti di flesso e di ondeggiamento sono da considerarsi punti semplici per la curva.
Se la tangente di flesso ha con la curva in P_0 un contatto h-punto (con $h \geq 3$), in quel punto saranno riuniti $h-2$ flessi della curva.

— Le rette tangenti a contatto h-punto in un punto semplice $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ della curva

L'equazione della curva C_n sia $\boxed{f(x,y) = 0}$

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un suo punto semplice; si avrà: $\begin{cases} (\partial f/\partial x)_{P_0} \neq 0 \\ (\partial f/\partial y)_{P_0} \neq 0 \end{cases}$ app.

La retta t, passante per P_0, avrà equazione:

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

La retta t, ha con la C_n in P_0 un contatto h-punto (o dell'ordine h-1) se è:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} = \dots = \left(\frac{\partial^{h-1} F}{\partial x^{h-1}}\right)_{x=x_0} = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial^h F}{\partial x^h}\right)_{x=x_0} \neq 0$$

essendo:

$$F(x) = f[x, y_0 + m(x - x_0)] = 0$$

CASI PARTICOLARI

$h = 1$ si ha l'intersezione semplice

$h = 2$ " " bipunto; t è la tangente ordinaria la cui equazione è:

$$(\partial f/\partial x)_{P_0}(x - x_0) + (\partial f/\partial y)_{P_0}(y - y_0) = 0$$

$h = 3$ P_0 è un FLESSO ORDINARIO la tangente t attraversa la curva in P_0

$h = 4$ P_0 è un punto di ONDULAZIONE a contatto 4-punto

Inoltre: t è tangente di flesso; P_0 è punto di inflessione

" : P_0 è punto di ondulazione, t è tangente di ondulazione.

" : in prossimità di P_0 la curva giace da una parte rispetto alla tangente in P_0, almeno limitatamente a un cerchio che contiene P_0)

FLESSI DELLE CURVE PIANE

.... Solo in punti semplici particolari della curva C_n la tangente può presentare un contatto di ordine superiore al primo (se ha ordine 2 ha rimunite in tale punto 3 intersezioni).

I punti semplici della C_n nei quali la tangente ha un contatto di ordine $h-1$ con $h \geq 3$ li distinguiamo dicendo che in essi la tangente è STAZIONARIA e più precisamente li chiamiamo PUNTI DI INFLESSIONE ($h-1$ pari) o PUNTI DI ONDULAZIONE secondo che il corrispondente valore di $h-1$ è pari o dispari.

.... La curva sia definita implicitamente da un'equazione del tipo:

$$f(x,y) = 0$$

I punti a tangente stazionaria sono le eventuali soluzioni $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ del sistema:

$$(86) \quad \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ H(x,y) = 0 \end{cases}$$

soddisfacenti alla condizione che

$(\partial f/\partial x)_{P_0}$ e $(\partial f/\partial y)_{P_0}$

non siano contemporaneamente nulle.

P_0 è un punto di flesso se è $y'' = 0$. Tenendo presente la (76) si ha:

$$H(x,y) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0$$ o anche:

$$(87)\qquad \begin{vmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & 0 \\ \partial^2 f/\partial x^2 & \partial^2 f/\partial x \partial y & \partial f/\partial x \\ \partial^2 f/\partial x \partial y & \partial^2 f/\partial y^2 & \partial f/\partial y \end{vmatrix}$$

P_0 è un punto di flesso se $(y''')_{P_0} \neq 0$. Derivando una terza volta $f(x,y)=0$, tenendo presente che $y''=0$ si ha:

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{P_0}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3_{P_0} - 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_{P_0}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{P_0} + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_{P_0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{P_0}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} - \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{P_0}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^3_{P_0} \neq 0 \qquad (88)$$

N.B.

È essenziale, nella ricerca dei flessi, verificare se il punto P_0 soluzione del sistema (86) sia semplice per la C_n, giacchè anche i punti multipli della C_n appartengono alla curva $H(x,y)=0$

.. Se si vogliono calcolare i punti di flesso improprii bisogna rendere omogenea l'equazione della curva C_n, cioè bisogna risolvere il seguente sistema:

$$(89)\qquad \begin{cases} F(x_1,x_2,x_3)=0 \\ H(x_1,x_2,x_3)=0 \end{cases}$$

tenendo presente di scartare le eventuali soluzioni (punti multipli) per cui sia contemporaneamente:

$$\left(\partial F/\partial x_1\right)_{P_0} = \left(\partial F/\partial x_2\right)_{P_0} = \left(\partial F/\partial x_3\right)_{P_0} = 0$$

$$H(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix} \partial^2F/\partial x_1^2 & \partial^2F/\partial x_1\partial x_2 & \partial^2F/\partial x_1\partial x_3 \\ \partial^2F/\partial x_1\partial x_2 & \partial^2F/\partial x_2^2 & \partial^2F/\partial x_2\partial x_3 \\ \partial^2F/\partial x_1\partial x_3 & \partial^2F/\partial x_2\partial x_3 & \partial^2F/\partial x_3^2 \end{vmatrix} \qquad (90)$$

.... La curva C_m sia definita parametricamente dalle equazioni

$$x=x(t)\ ;\ y=y(t) \qquad (91)$$

I flessi si ricavano risolvendo l'equazione:

$$x'(t)\cdot y''(t)-y'(t)\cdot x''(t)=0 \qquad (92)$$

$\left\{ t=t_0 \right.$

sarà da sia contemporaneamente: $x'(t)=y'(t)=0$ con $t=$
Inoltre in P_0 deve essere:

$$x'(t)\,y'''(t)-y'(t)\cdot x'''(t)\neq 0$$

Talvolta può risultare conveniente servirsi delle equazioni parametriche omogenee della curva, cioè delle equazioni:

$$x_1=x_1(t)\ ;\ x_2=x_2(t)\ ;\ x_3=x_3(t) \qquad (93)$$

In tal caso i valori di t che individuano i flessi saranno le soluzioni dell'equazione (hessiana):

(94)
$$h(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) & x'_3(t) \\ x''_1(t) & x''_2(t) & x''_3(t) \end{vmatrix}=0$$

escluse, eventualmente, quelle che corrispondono ai punti singolari della curva.

Considerazioni

1° — Una curva algebrica di ordine n ammette, al massimo, (cioè quando è priva di punti multipli)

$$f=3n(n-2)$$

FLESSI (reali o immaginari, distinti o coincidenti)

2° — Nel gruppo dei $3n(n-2)$ flessi ordinari, un punto con tangente di contatto h-punto (con $h\geq 3$) conta per $h-2$ flessi ordinari.

— Se: δ = numero dei punti doppi ordinari di C_n
V = " delle cuspidi " sarà:

(95)
$$\boxed{f=3n(n-2)-6\delta-8V}$$

Altro metodo

Si taglia la curva C_n con una generica retta $ax+by+c=0$. Al posto della x e della y si fanno $x(t)$ e $y(t)$ ottenendo una equazione in t. Supponiamo che si ottenga l'equazione

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

t_1, t_2, t_3, t_4 siano le soluzioni di questa equazione, legate ai coefficienti A, B, C, D dalle relazioni

$$\begin{cases} t_1+t_2+t_3+t_4 = -a_1/a_0 = -B/A \\ t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4 = a_2/a_0 = C/A \\ t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4 = -a_3/a_0 = -D/A \\ t_1t_2t_3t_4 = a_4/a_0 = E/A \end{cases}$$

I punti di flesso si ricavano per quei valori di t tali che $t_1 = t_2 = t_3 = t_4$ (incontro tripunto)

$$\begin{cases} 3\tau + t_4 = -B/A = \alpha \\ 3\tau^2 + 3\tau t_4 = C/A = \beta \\ \tau^3 + 3\tau^2 t_4 = -D/A = \gamma \\ \tau^3 t_4 = E/A = \delta \end{cases}$$

eliminando a, b, c, t_4 si ottiene una equazione in τ

$$A'\tau^4 + B'\tau^3 + C'\tau^2 + D'\tau + E' = 0$$

che avrà come soluzioni $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$

Pagina 53 di 96

Caratteri plückeriani delle curve piane

... Essi sono 6 e si indicano con le seguenti lettere:

$$n\,;\ m\,;\ \delta\,;\ K\,;\ i\,;\ \tau$$

... n rappresenta l'ORDINE della curva C_n di equazione $f(x,y)=0$, cioè il grado complessivo (rispetto ad x e y) del polinomio $f(x,y)$. Esso coincide con il numero delle intersezioni della curva C_n con la generica retta del piano.

... m indica la CLASSE della curva, cioè il numero delle sue tangenti che si possono condurre da un generico punto del piano.

Per punto generico si intende un qualsiasi punto P che non appartiene alla C_n, né ad alcuna delle tangenti alla C_n nei (suoi eventuali) punti multipli, o di flesso o di ondulazione di qualsiasi specie.

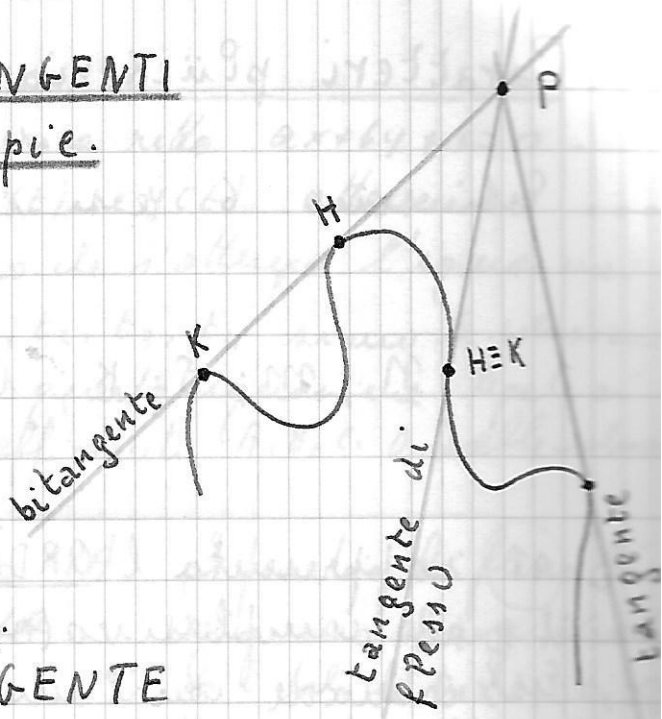
... δ indica i NODI della curva [punti doppi a tangenti distinte ($t_1 \neq t_2$) reali o immaginarie]

... K indica il numero delle CUSPIDI di prima specie (cioè punti doppi a tangenti coincidenti in una la quale ha una intersezione tripunta)

... i indica il numero delle TANGENTI di FLESSO (a contatto tripunto).

.... τ indica il numero delle BITANGENTI (a contatti distinti) o Tangenti Doppie.

Sia C_n una curva di classe n.
Da un punto generico P del piano escono n rette tangenti alla C_n fra loro distinte.
Se, per una posizione particolare di P, due di queste (ad es. PH e PK) vengono a coincidere, la PHK è tocca la C_n in due punti distinti H e K (e risulta una sua BITANGENTE o tangente doppia), oppure l'unico punto di contatto (H≡K) è un FLESSO per C_n e la tangente è una TANGENTE DI FLESSO.



.... I 6 caratteri sono a coppie duali l'uno dell'altro e precisamente n, δ, K sono duali di m, τ, i.

Ciò significa che se una curva C_n [luogo dei punti che soddisfa l'equazione $f(x,y)=0$] d'ordine n, di classe m, è dotata di δ nodi, di K cuspidi, di i flessi e di τ bitangenti mediante la trasformazione per dualità:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \end{cases}$$ con u, v coordinate plückeriane di una retta del piano

essa viene mutata in una curva C'_n [inviluppo delle rette che soddisfano l'equazione $f(u,v)=0$] de la ordine m classe n, è dotata di τ nodi, di i cuspidi, di δ bitangenti e di K flessi.

C_n C'_n

n	m	ordine
m	n	classe
δ	τ	nodi
K	i	cuspidi
i	K	bitangenti
τ	δ	flessi

.. I 6 caratteri sono legati da 3 relazioni indipendenti e da altre relazioni (conseguenti / significative.

.. Prima Formula di PLücker

Una curva C_n di ordine n e priva di punti multipli ha classe m data da:

$$m = n \cdot (n-1) \qquad (96)$$

Un punto doppio ordinario ed una cuspide di prima specie abbassano la classe di una C_n, rispettivamente di 2 e 3 unità.

$$m = n \cdot (n-1) - 2\delta - 3K \qquad (97)$$

... Seconda Formula di PLücker

Una curva C_n di ordine n e priva di punti multipli possiede "i" flessi dati da:

$$i = 3n(n-2) \qquad (98)$$

Un punto doppio ed una cuspide di prima specie di una
Cn abbassano il numero dei
flessi rispettivamente di 6 e 8 $i = 3n\cdot(n-2) - 6\delta - 8K$ (99)
unità, cioè:

.... Terza e Quarta Formula di Plücker

$$n = m(m-1) - 2\tau - 3i$$
$$K = 3m(m-2) - 6\tau - 8i \qquad (100)$$

per la dualità

.... Quinta e Sesta Formula di Plücker

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - K = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \tau - i$$
$$i = 3(m-n) + K \qquad (101)$$

Genere di una curva algebrica irriducibile

... Una curva algebrica irriducibile di ordine n non può possedere più di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi.

... Dicesi GENERE di una curva algebrica irriducibile (considerata come luogo e, dualmente, come inviluppo) di caratteri principali n, m, δ, K, τ, i, il numero intero non negativo:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - K = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \tau - i \qquad (102)$$

cioè il genere p di una curva C_n è la differenza fra il numero dei punti doppi (nodi ordinari o cuspidi di prima specie) che può possedere ed il numero di punti doppi che effettivamente possiede.

Relativamente al calcolo del genere di una curva bisogna tenere presente quanto segue:

1° — Un punto r-plo vale $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi.

2° — Una cuspide di 2ª specie o un tacnodo valgono 2 punti doppi.

3° — Un osculo vale 3 punti doppi.

... Una curva razionale irriducibile (cioè non costituita da più parti distinte) è di genere zero e viceversa.

Rappresentazione parametrica delle curve razionali

.... Generalità

Si sega la curva C_n con una curva (AGGIUNTA) di ordine $n-2$ passante per tutti i punti multipli della C_n e per altri suoi $(n-3)$ punti semplici.

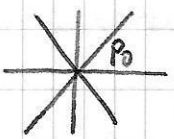
Se P è un punto r-plo per la C_n, la C_{n-2} dovrà passare per esso $(r-1)$ volte.

Ciascuna delle C_{n-2} aggiunte alla C_n taglia la C_n (fuori dei punti multipli e dei $n-3$ punti semplici) ulteriormente in un solo punto P.

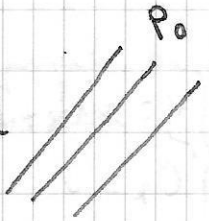
Le infinite aggiunte della C_n costituiscono un fascio $|C_{n-2}|$. Ne segue che tagliando la C_n con la generica curva del fascio $|C_{n-2}|$, le coordinate (x,y) del punto P risulteranno funzioni razionali del parametro da cui dipendono le curve del fascio; donde una rappresentazione parametrica della C_n.

.... Equazione del fascio di rette di centro P_0

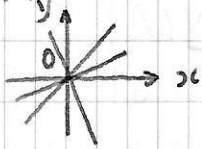
$P_0 \equiv (x_0, y_0)$ $\quad y - y_0 = \lambda(x - x_0)$



$P_0 \equiv (1, m, 0) \equiv (a, -b, 0)$; $y = mx + \lambda$ app. $ax + by = \lambda$

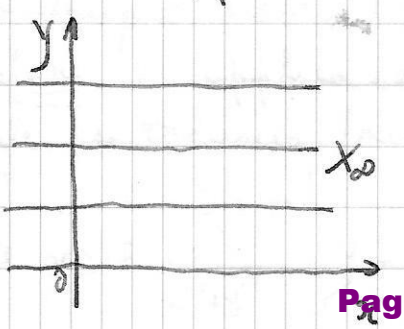


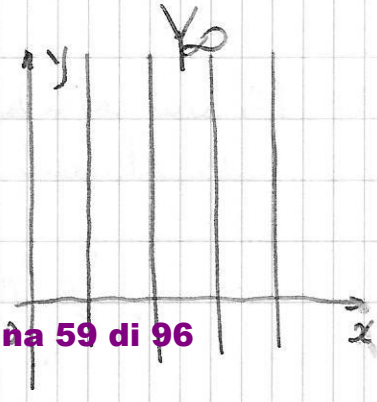
$P_0 \equiv (0,0)$ $\quad y = \lambda x$



$P_0 \equiv X_\infty \equiv (1,0,0)$ $\quad y = \lambda$

$P_0 \equiv Y_\infty \equiv (0,1,0)$ $\quad x = \lambda$





.... Equazioni parametriche delle coniche C_2

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto della conica e sia $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ il fascio di rette di centro P_0.
La generica retta del fascio incontra la conica nel punto P_0 e nel punto $Q \equiv (x, y)$.
Eliminato il punto P_0 si ricavano le coordinate (x, y) del punto Q in funzione del parametro λ, ottenendo così una rappresentazione parametrica della conica.

CASO DELLA PARABOLA

Si considera il fascio di ∞ rette di centro improprio (come centro improprio si assume il punto improprio della parabola):

$$\begin{cases} y = mx + \lambda \\ C_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \end{matrix}$$

CASO DELLA IPERBOLE

$$\begin{cases} y = mx + \lambda \\ C_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \end{matrix}$$

dove m rappresenta una delle due direzioni asintotiche

Equazioni parametriche delle cubiche razionali

La rappresentazione parametrica di una cubica razionale (cioè avente un punto doppio) si ottiene tagliandola con le rette del fascio (proprio o improprio) avente il centro nel punto doppio P_0 (proprio o improprio) della curva.
Ciascuna di tali rette, avendo due intersezioni con la cubica C_3 uscite in P_0, la taglia in un altro punto, le cui coordinate saranno funzioni razionali del parametro da cui dipendono le rette del fascio

Equazioni parametriche delle quartiche razionali

Vedi anche 3 2 4 vol I

Siano P_1, P_2, P_3 3 punti doppi della quartica C_4 e P un suo qualsiasi punto semplice.
Si considera il fascio di coniche avente P_1, P_2, P_3, P come punti base.
Si taglia la C_4 con tale fascio e si eliminano i punti P_1, P_2, P_3, P.
Si ottengono rimanente così le equazioni parametriche cercate.
Oppure si può considerare il fascio di coniche avente come punti base 3 punti doppi P_1, P_2, P_3 ed in uno di essi come tangente una delle tangenti alla quartica.
Se la quartica ha un punto triplo P_0 basta tagliarla con un fascio di rette avente come ~~punto triplo~~ centro P_0
Se la quartica C_4 è bicircolare si applica ad essa una T.P.R.V.R. ottenendo la conica C'_2 dalla quale si trovano facilmente le equazioni parametriche $x' = x'(\lambda)$; $y' = y'(\lambda)$!
Ai vari valori si introducono nelle $x = R^2 \frac{x'}{x'^2+y'^2}$; $y = R^2 \frac{y'}{x'^2+y'^2}$

Si potrebbe tagliare la C_4 con un fascio di cerchi passanti per il punto doppio O e per un qualsiasi altro punto della quartica, oppure si potrebbe tagliare la C_4 con un fascio di circonferenze tangenti in O, ad una delle rette tangenti alla quartica nel suo punto doppio O.

Inviluppo di una famiglia di curve piane

.... Si chiama FAMIGLIA di curve piane la totalità (∞^1) delle curve C_λ rappresentate, per ogni valore del parametro λ variabile in un certo intervallo $\lambda_1 \to \lambda_2$, da un'equazione del tipo:

$$f(x, y, \lambda) = 0 \qquad (105)$$

Il grado k di λ dà l'indice della famiglia di curve ed è uguale al numero delle sue curve C_λ che passano per un generico punto del piano. Per $k=1$ si ritrova il fascio di curve.

.... Due curve piane Γ e C aventi in comune un punto ordinario P si dicono che "si toccano in questo punto" se lì hanno la medesima retta tangente t, ed il punto P prende il nome di PUNTO DI CONTATTO.

.... Se tutte le curve C_λ della famiglia (105) toccano una curva fissa Γ, ~~Se tale~~ ed inoltre per ogni punto di Γ passa una C_λ tangente a Γ, diremo che la curva Γ è l'INVILUPPO delle curve C_λ e queste si dicono INVILUPPATE dalla Γ. Se l'inviluppo esiste la sua ~~X~~ equazione ~~dell'inviluppo~~ si ricava risolvendo il sistema

$$f(x, y, \lambda) = 0 \qquad \partial f / \partial \lambda = 0 \qquad (106)$$

rispetto ad x ed y, ottenendo nella soluzione

$$x = x(\lambda) \; ; \; y = y(\lambda) \qquad (107)$$

di esso le equazioni parametriche di Γ.

L'eliminazione del parametro λ fra le (102) conduce all'equazione cartesiana $F(x,y)=0$ di Γ.

L'inviluppo esiste certamente se è $\neq 0$ lo Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \lambda} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (108)$$

(che rappresenta una certa curva detta Curva discriminante o Curva caratteristica della famiglia di curve C)

.... In generale la famiglia l'equazione $F(x,y)=0$ contiene l'inviluppo Γ e la curva Σ luogo dei punti singolari delle curve C_λ.

Il luogo Σ si ricava risolvendo il sistema:

$$(109) \quad f(x,y,\lambda)=0 \; ; \; \partial f/\partial x = 0 \; ; \; \partial f/\partial y = 0$$

da cui si ricava $\begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \end{cases}$

ed eliminando λ si ottiene $g(x,y)=0$

Per distinguere le due componenti Γ ed Σ bisogna tenere presente quanto segue:

1°) se è $J \neq 0$ $F(x,y)=0$ rappresenta soltanto l'inviluppo Γ

2°) se è $J=0$ si può confrontare $F(x,y)=0$ con la (109) che rappresenta Σ.

... Se le C_λ sono algebriche ed $f(x,y,\lambda)$ è un polinomio in λ di grado n (famiglia di curve algebriche semplicemente infinita d'indice n) l'equazione della curva $F(x,y)=0$ si otterrà uguagliando a zero il DISCRIMINANTE dell'equazione in λ:

$$f(x,y,\lambda)=0 = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$$

con $c_i = c_i(x,y)$

In tal caso anche $F(x,y)=0$ sarà algebrica.
$n=1$ si ha un fascio e l'inviluppo si riduce ai bendi base del fascio.

Se consideriamo una famiglia di curve piane di indice 2 (e quindi per ogni punto del piano passano due sole curve) la (105) assume la seguente forma:

$$f(x,y,\lambda) = A(x,y)\lambda^2 + 2B(x,y)\lambda + C(x,y) = 0 \qquad (105)$$

L'equazione dell'inviluppo è:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 2A\cdot\lambda + 2B = 0 \quad ; \quad \lambda = -B/A \quad \text{per cui:}$$

$$A\cdot\frac{B^2}{A^2} - 2B\cdot\frac{B}{A} + C = 0 \quad \text{cioè}$$

$$B^2 - AC = 0 \qquad (111)$$

In analogia a quanto detto sopra. Se $f(x,y,\lambda)=0$ rappresenta una famiglia di coniche (non degeneri) di indice 2 e se le coniche non hanno punti singolari, la curva caratteristica Δ si riduce solo all'inviluppo che è il luogo dei punti del piano dai quali esce una sola curva della famiglia. In tal caso, quindi A, B, C polinomi di secondo grado, l'inviluppo risulta essere una parabola.
Può però sperarsi, ed effettivamente accade se il sistema di coniche ha almeno due punti base.

.... Supponiamo che ciascuna delle curve C_λ della famiglia (105) sia rappresentabile sotto forma parametrica:

$$x = x(t, \lambda) \quad ; \quad y = y(t, \lambda) \tag{112}$$

dove λ varia in un certo intervallo $\lambda_1 \to \lambda_2$.

L'equazione dell'inviluppo si ricava nella seguente maniera dall'equazione:

$$\begin{vmatrix} \partial x/\partial t & \partial x/\partial t \\ \partial x/\partial \lambda & \partial y/\partial \lambda \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \tag{112a}$$

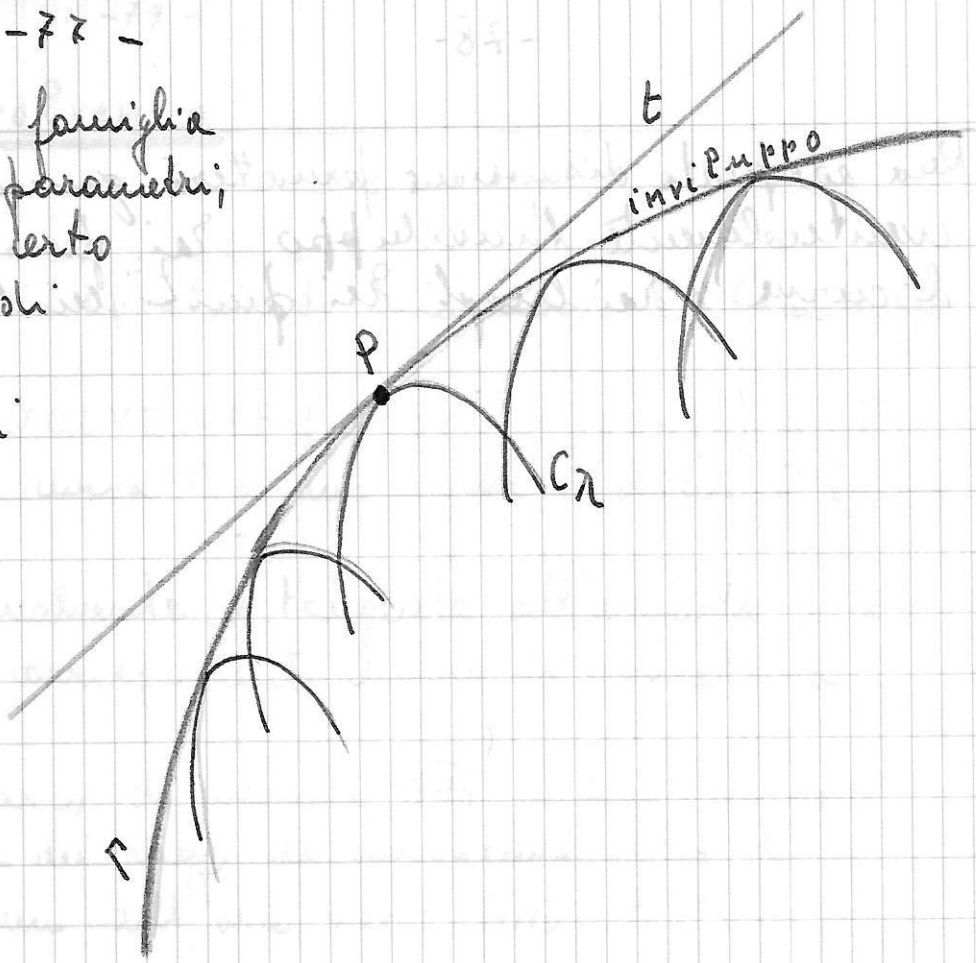
si ricava: $t = t(\lambda)$ che sostituito nelle (112) dà:

$$x = x[t(\lambda), \lambda] \quad ; \quad y = y[t(\lambda), \lambda] \tag{113}$$

equazioni parametriche d. Ø Γ

Se si elimina λ si ha l'equazione cartesiana di Γ.

<< C.N.S perchè la famiglia di curve (112) possieda un inviluppo Γ è che sia determinabile una funzione $t = t(\lambda)$, continua insieme alla sua derivata prima, che soddisfi l'equazione (112a) >>.



.. Può accadere che la famiglia
i curve dipenda da più parametri,
egati tra loro da un certo
umero di equazioni di
ondizione.

Riferiamoci al caso di
na famiglia di curve
ipendente da due
oli parametri λ, β
d avente equazione:

$$f(x, y, \lambda, \beta) = 0 \qquad (114)$$

on la condizione:

$$\varphi(x, y, \lambda, \beta) = 0 \qquad (115)$$

llora l'equazione (dell'inviluppo Γ) della curva caratteristica δ si ricava eliminando i
parametri λ, β dalle equazioni:

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda, \beta) = 0 \\ \varphi(x, y, \lambda, \beta) = 0 \end{cases}$$

Si eliminano i parametri λ e β da queste due equazioni

(114)

$$J = \begin{vmatrix} \partial f/\partial \lambda & \partial \varphi/\partial \lambda \\ \partial f/\partial \beta & \partial \varphi/\partial \beta \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0$$

edere Chillini pag. 46)

Evoluta ed Evolvente

... Dicesi EVOLUTA (o sviluppata) di una curva C, l'inviluppo Γ delle sue normali.

La curva C dicesi EVOLVENTE (o sviluppante) di Γ, cioè l'EVOLVENTE di una curva Γ è una curva C di cui Γ è l'evoluta.

Ogni normale all'evolvente è tangente all'evoluta e il punto di contatto è il corrispondente centro di curvatura dell'evolvente.

La lunghezza di un arco di evoluta $\overline{MM_0}$ di una curva C è uguale alla differenza dei raggi di curvatura della C corrispondenti agli estremi dell'arco cioè: $\overline{MM_0} = R - R_0$

L'EVOLUTA di una curva C è il luogo dei suoi centri di curvatura.

... Sia data l'equazione $f(x,y) = 0$ (120)

$P \equiv (\alpha, \beta)$ il generico punto semplice appartenente a C.
L'equazione dell'evoluta della curva C è l'inviluppo delle rette (normali a C) della famiglia

$$\varphi(x,y,\alpha,\beta) = f'_y(\alpha,\beta)\cdot(x-\alpha) - f'_x(\alpha,\beta)\cdot(y-\beta) \quad (121)$$

dipendente dai parametri α, β legati dalla relazione:

$$f(\alpha,\beta) = 0 \quad (122)$$

Tenendo presente la (116) si ha: $\left[f'_x(\alpha,\beta) = f'_\alpha \right]$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = f''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\cdot(x-\alpha) + f'_y(\alpha,\beta)\cdot(-1) - f''_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\cdot(y-\beta) - f''_\alpha(\alpha,\beta)\cdot 0 = \\ \quad = f''_{\alpha\beta}\cdot(x-\alpha) + 0 - f'_\beta \cdot 0 - f''_{\alpha\alpha}\cdot(y-\beta) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta} = f''_{\beta\beta}\cdot(x-\alpha) - f''_{\alpha\beta}\cdot(y-\beta) + f'_\alpha \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = f'_\alpha \quad ; \quad \dfrac{\partial f}{\partial \beta} = f'_\beta \end{cases}$$

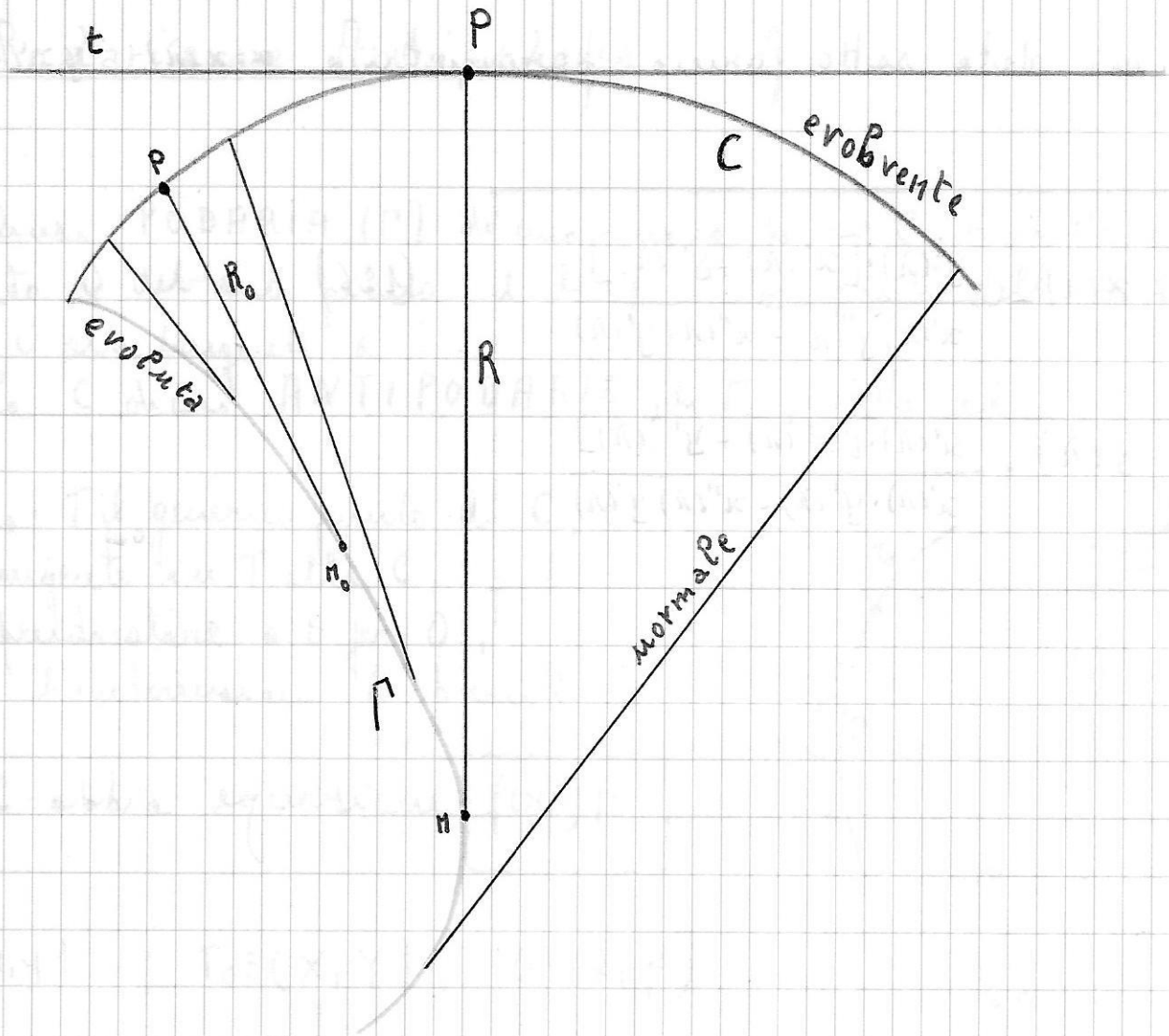
$$\left(f''_{\alpha\beta}f'_\beta - f''_{\beta\beta}f'_\alpha\right)\cdot(x-\alpha) + \left(f''_{\alpha\beta}f'_\alpha - f''_{\alpha\alpha}\cdot f'_\beta\right)(y-\beta) = f'^2_\alpha + f'^2_\beta \qquad (123)$$

Da cui tenendo presente la (121) si ha:

$$x = \alpha - \frac{f'_\alpha\cdot(f'^2_\alpha + f'^2_\beta)}{f''_{\alpha\alpha}\cdot f'^2_\beta - 2f''_{\alpha\beta}\cdot f'_\alpha\cdot f'_\beta + f''_{\beta\beta}\cdot f'^2_\alpha}$$

$$y = \beta - \frac{f'_\beta\cdot(f'^2_\alpha + f'^2_\beta)}{f''_{\alpha\alpha}\cdot f'^2_\beta - 2f''_{\alpha\beta}\cdot f'_\alpha\cdot f'_\beta + f''_{\beta\beta}\cdot f'^2_\alpha} \qquad (124)$$

equazioni parametriche dell'evoluta



. C sia data sotto forma esplicita $y = f(x)$

$$X = x - \frac{1 + y'^2}{y''} \cdot y' \qquad (125)$$

$$Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

con x, y coordinate del generico punto della C.

iminando la x e la y si ricava l'equazione cartesiana
$(X, Y) = 0$

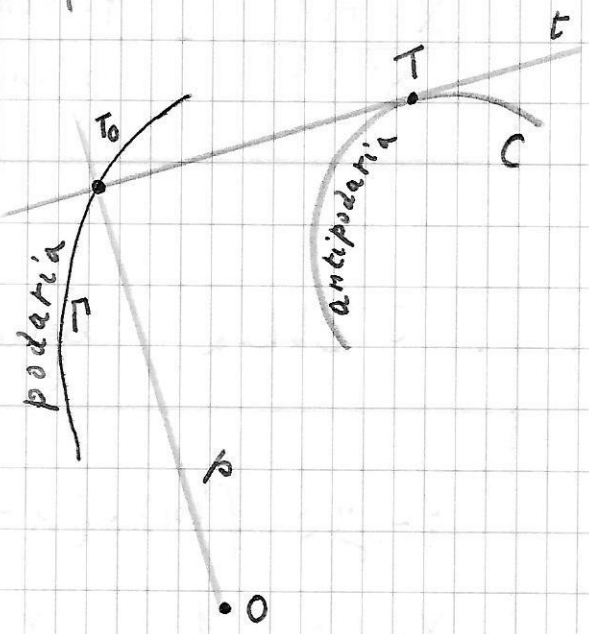
.... C sia data sotto forma parametrica $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$

$$x = x(\lambda) - \frac{y'(\lambda)\cdot\left[x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda)\right]}{x'(\lambda)\,y''(\lambda) - x''(\lambda)\,y'(\lambda)}$$

$$y = y(\lambda) + \frac{x'(\lambda)\cdot\left[x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda)\right]}{x'(\lambda)\cdot y''(\lambda) - x''(\lambda)\,y'(\lambda)} \qquad (126)$$

Podaria e Antipodaria

. Dicesi PODARIA (Γ) di una curva piana C, rispetto ad un punto O del suo piano, il luogo Γ dei piedi delle perpendicolari per O alle tangenti a C.
La C dicesi ANTIPODARIA di Γ rispetto ad O.



Siano: T il generico punto di C; t la tangente in T alla C; p la perpendicolare a t per O; T_0 l'intersezione di p con t.

. C abbia equazione $\boxed{f(x,y)=0}$

$T \equiv (x,y)$; $T_0 \equiv (X,Y)$; $O \equiv (\alpha,\beta)$

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \text{equazione di } t$$

$$(X-\alpha)\frac{\partial f}{\partial y} - (Y-\beta)\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \text{equazione di } p \qquad (127)$$

$$f(x,y)=0$$

eliminando x ed y fra le 3 equazioni si ottiene l'equazione della podaria.

.... Cabbia equazione: $x = x(t) \quad y = y(t)$

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} \qquad t$$

$$\frac{X - x(t)}{y'(t)} = -\frac{Y - y(t)}{x'(t)} \qquad p$$

(128) basta eliminare il parametro t

.... Cabbia equazione $y = f(x)$

$$Y - y = f'(x) \cdot (X - x) \qquad t$$

$$Y - y = -\frac{1}{f'(x)} \cdot (X - x) \qquad p$$

$$y = f(x)$$

(129) basta eliminare x, y

.... Equazioni dell'antipodaria.

La podaria abbia equazione $F(X, Y) = 0$; in tal caso l'antipodaria C di Γ rispetto ad O è l'inviluppo delle rette t perpendicolari alle p, cioè l'inviluppo delle rette della famiglia di equazione:

$$(x - X)\frac{\partial F}{\partial X} + (y - Y)\frac{\partial F}{\partial Y} = 0$$

dipendente dai parametri X, Y legati dalla relazione:

$$F(X, Y) = 0$$

angente, Sottotangente, Normale, Sottonormale ad una curva piana

.. C_n abbia equazione $y = f(x)$

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \longrightarrow t$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) \longrightarrow n$$

(132)

$$\overline{TM} = -\frac{y_0}{f'(x_0)} \quad ; \quad \overline{MN} = f(x_0)\cdot f'(x_0)$$

$$\overline{P_0T} = \frac{y_0}{f'(x_0)}\cdot\sqrt{1+[f'(x_0)]^2} \quad ; \quad \overline{P_0N} = y_0\cdot\sqrt{1+[f'(x_0)]^2}$$

(133)

.. C_n abbia equazione: $x = x(\lambda)$ $y = y(\lambda)$

$$(x - x_0)\cdot y'(\lambda_0) = (y - y_0)\cdot x'(\lambda_0) \longrightarrow t$$

$$(x - x_0)\cdot x'(\lambda_0) = -(y - y_0)\cdot y'(\lambda_0) \longrightarrow n$$

$$\overline{P_0T} = -\frac{y_0}{y'(\lambda_0)}\cdot\sqrt{[x'(\lambda_0)]^2 + [y'(\lambda_0)]^2}$$

$$\overline{P_0N} = -\frac{y_0}{x'(\lambda_0)}\cdot\sqrt{[x'(\lambda_0)]^2 + [y'(\lambda_0)]^2}$$

essendo P_0 il punto corrispondente al valore λ_0 del parametro λ

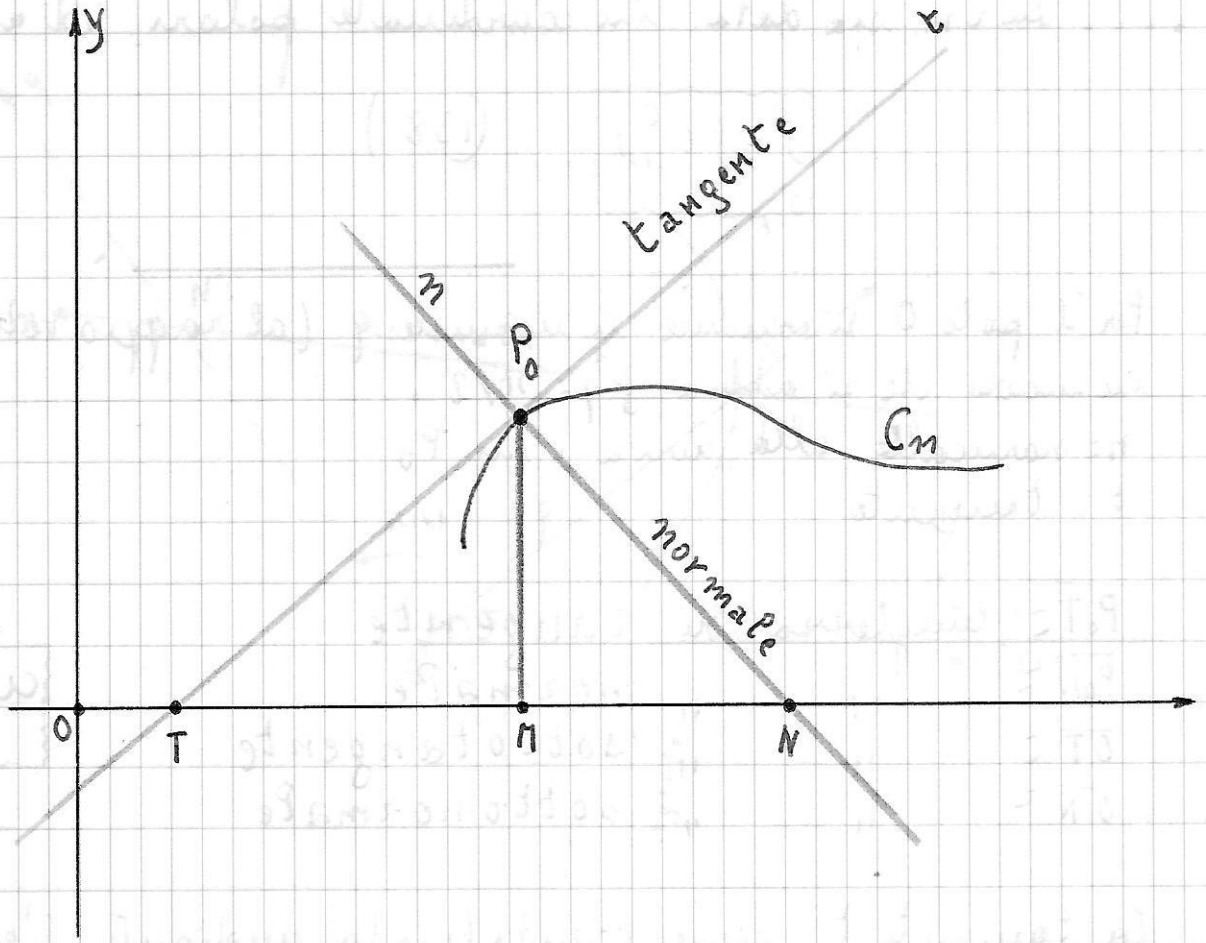
(134)

$$\overline{TM} = -\frac{y_0 \cdot x'(t_0)}{y'(t_0)} \quad ; \quad \overline{MN} = \frac{y_0 \cdot y'(t_0)}{x'(t_0)} \qquad (135)$$

.... Cn abbia equazione $f(x, y) = 0$

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0 \longrightarrow t$$

$$f'_y(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) - f'_x(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0 \longrightarrow n \qquad (136)$$



$\overline{P_0T}$ = lunghezza di tangente
$\overline{P_0N}$ = " " normale
$\overline{TM}$ = " " sottotangente
$\overline{MN}$ = " " sottonormale

t = retta tangente in P_0 alla C_n
n = " normale " " " "

.... La C_{11} sia data in coordinate polari ed abbia equazione

$$\rho = \rho(\theta) \qquad (138)$$

Per il polo O si conduce la normale q (al raggio vettore ρ) orientata in modo che si abbia $\hat{\rho q} = \pi/2$.

n = normale alla curva in P_0

t = tangente " "

$\overline{P_0T}$ = lunghezza di tangente

$\overline{P_0N}$ = " " normale

$\overline{OT}$ = " " sottotangente

$\overline{ON}$ = " " sottonormale

$$\omega = \alpha - \theta$$

La tangente t viene identificata mediante l'angolo ω che essa forma col raggio vettore:

$$P_0 \equiv (\rho_0, \theta_0)$$

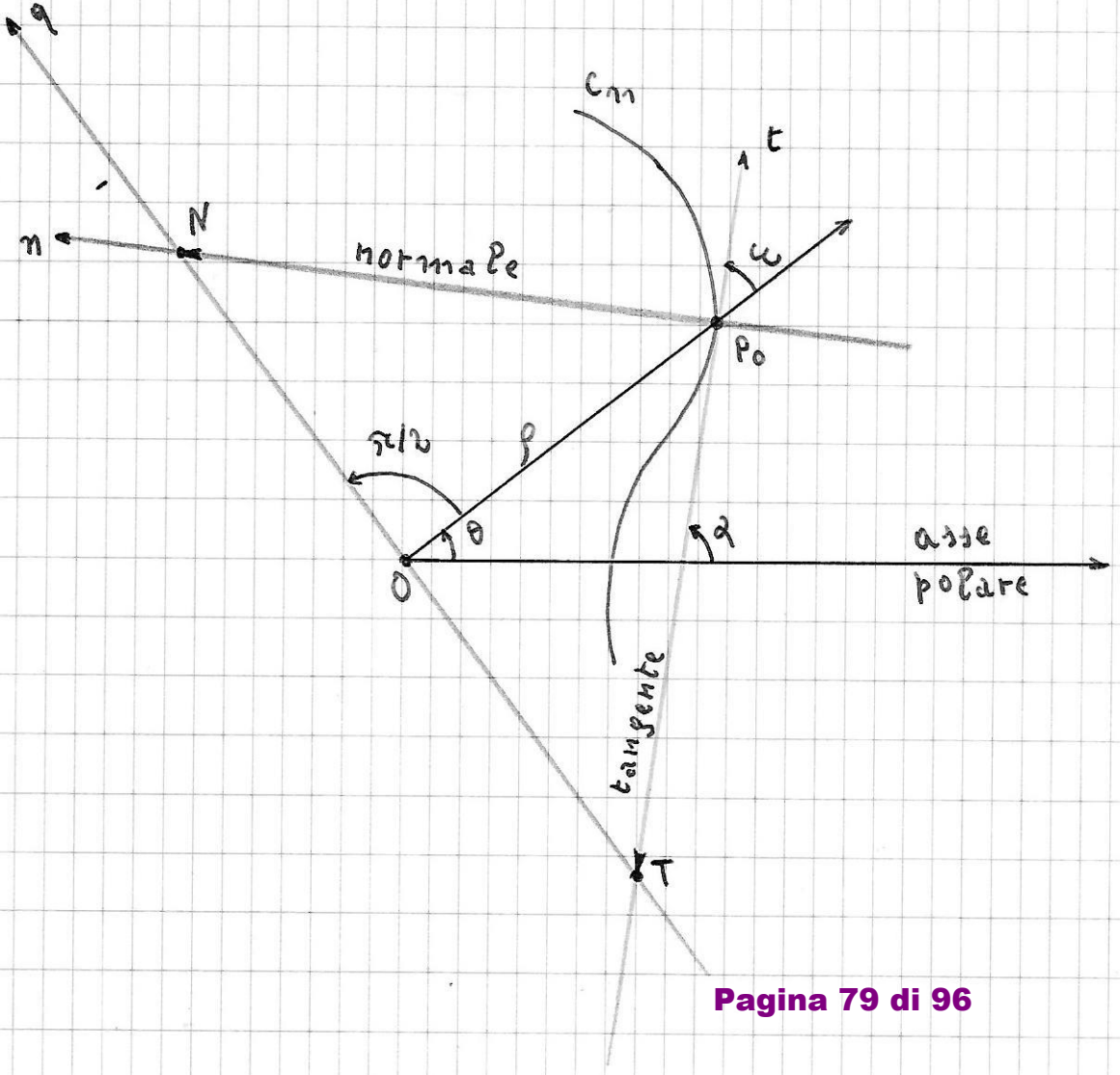
$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\rho_0}{\rho'(\theta_0)} \qquad (13$$

$$\overline{P_0T} = -\frac{\rho\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}{\rho'} \quad ; \quad \overline{P_0N} = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}$$

$$\overline{OT} = -\frac{\rho^2}{\rho'} \quad ; \quad \overline{ON} = \rho'$$

tutte calcolate nel punto

(140)


q
n
N
normale
C_m
t
ω
P_0
π/2
ρ
θ
O
q
asse polare
tangente
T

PUNTI UNITI

e i due piani π e π' sono sovrapposti e riferiti allo stesso sistema di riferimento allora nasce il problema della determinazione dei punti uniti della trasformazione.

Essi si ottengono ponendo nella T o nella T^{-1} $x = x'$; $y^e = y'$ che in questo caso rappresentano 2 coniche Γ_1, Γ_2 che, in generale, si intersecano in 4 punti.

Quindi in generale la trasformazione quadratica ammette 4 punti uniti.

Se le due coniche coincidono $\Gamma_2 \equiv \Gamma_1$ la T. Q. possiederà tutta una conica di punti uniti.

Se poi tali coniche sono degeneri in due rette, di cui una comune, cioè:

$$\Gamma_1 \equiv (r, a) \quad ; \quad \Gamma_2 \equiv (r, b)$$

la T. Q. possiede la retta r tutta di punti uniti ed un altro punto $S \equiv (a; b)$ pure unito, il quale potrà o no appartenere ad r.

Per la determinazione dei punti uniti si può seguire anche un altro procedimento.

Siano $A_1 \to A'_1$, $A_2 \to A'_2$, $A_3 \to A'_3$ i punti fondamentali omologhi (o corrispondenti o associati).

Tra i fasci di rette di centri A_1 e A'_1 la T. Q. subordina una proiettività τ_2 ed i raggi omologhi in τ_1 si incontrano sulla conica γ_1 che si ottiene eliminando il parametro tra i due fasci di retta:

$(A_1) = 0$; $(A'_1) = 0$ $\to \gamma_1$

Analogamente si ricavano γ_2 , γ_3.

Le 3 coniche γ_1 , γ_2 , γ_3 appartengono allo stesso fascio i cui punti base sono i punti uniti della T. Q.

... Curve corrispondenti in una T. Q.

1) Una curva algebrica generica C_n di ordine n di π, non passante per alcun punto fondamentale A_1, A_2, A_3, si trasforma in una cu C'_{2n}, di ordine $2n$, passante con molteplicità n per ciascuno dei 3 pu fondamentali A'_1, A'_2, A'_3 di π'.

⊗

2) Una curva C_n, di ordine n, passante rispettivamente r, s, t v per i punti fondamentali A_1, A_2, A_3 si trasforma in una curva $C'_{n'}$ di ordine:

$$n' = 2n - r - s - t = 2n - (r+s+t)$$

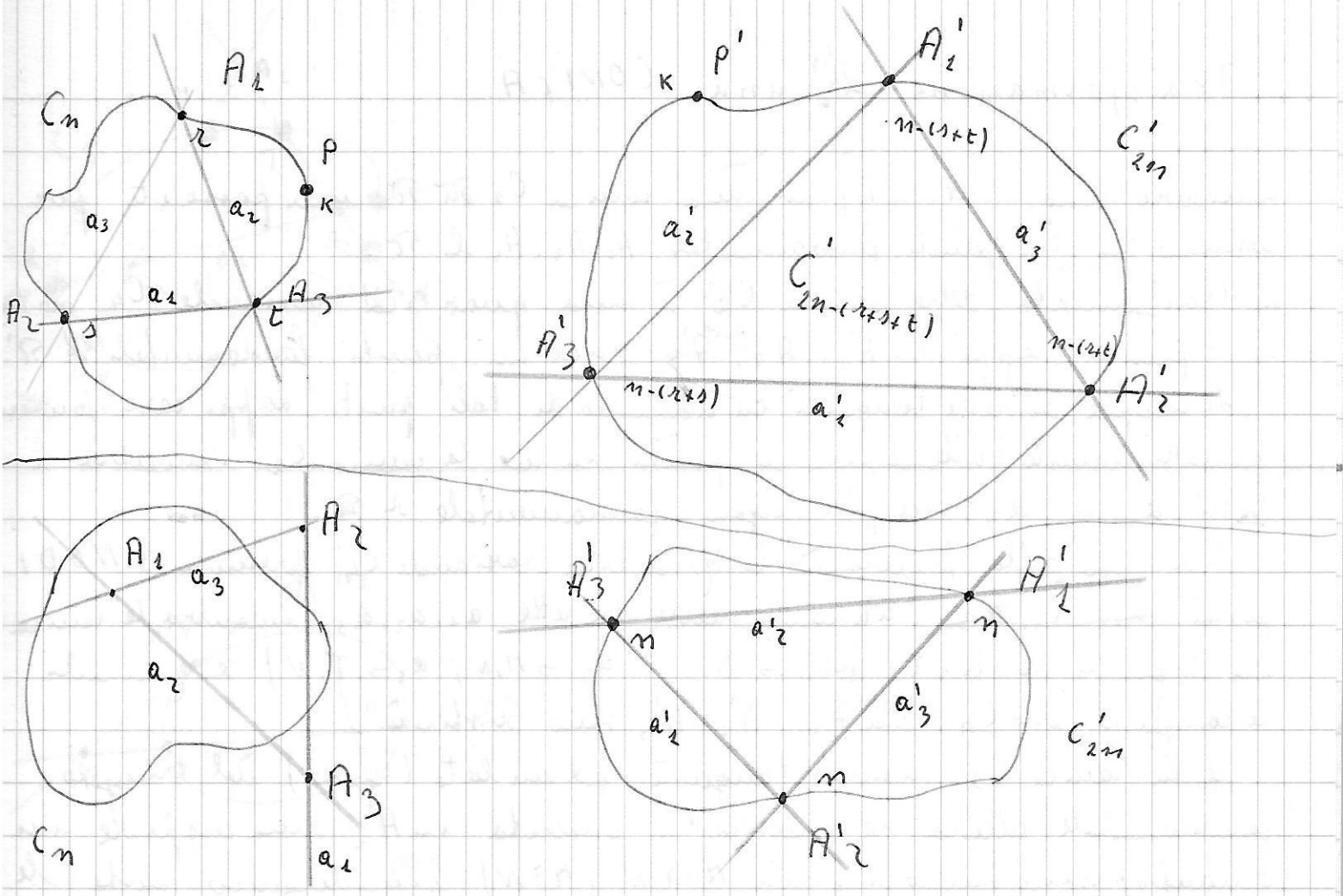
la quale presenta molteplicità:

$$\begin{cases} n-(s+t) & \text{in } A'_1 \\ n-(r+t) & \text{,, } A'_2 \\ n-(r+s) & \text{,, } A'_3 \end{cases}$$

Poichè A_1 si dilata nella retta a'_1, A_2 in a'_2, A_3 in a'_3 della cu trasformata faranno parte le rette a'_1, a'_2, a'_3 ciascuna con la molteplicità r, s, t e la curva residua $C'_{n'}$ di ordine $n' = 2n-(r+s+t)$

In generale una retta generica del piano π incontra la C_n in n punti; nel caso nostro la retta fondamentale $a_1 \equiv A_2A_3$ incontra C_n, fuori dei punti fondamentali, in $n-(s+t)$ punti e poichè la retta fondamentale a_1 si muta in A'_1, questi presenta, nella legge per la curva trasformata, molteplicità $n-(s+t)$ ecc...

3) C_n abbia un punto multiplo di ordine k e situato fuori dalle rette fondamentali. Il corrispondente P' è multiplo dello stesso ordine per la curva trasformata.



Le T. Q. conservano il genere delle curve. Pertanto se C_n è razionale anche la sua trasformata è razionale in quanto i punti di queste due curve si corrispondono biunivocamente.

Dall'esame delle intersezioni di C_n con ciascuna delle rette fondamentali della π si ricavano le molteplicità presentate dalla C'_n nei punti fondamentali del piano π'.

① Infatti la retta fondamentale $a_1 \equiv A_2A_3$ incontra la curva C_n in n punti $P_1, P_2, \dots P_n$; poiché la retta a_1 si concentra nel punto fondamentale A'_1 vuol dire che a $P_1, P_2, \dots P_n$ corrisponderà sempre lo stesso punto A'_1. Quindi C'_{2n} passerà per A'_1 con molteplicità n.

Vedere fig. ①

... Trasformazione di una CONICA

Considero una T. Q. (T) ed una conica C_2 di π non passante per nessuno dei tre punti fondamentali A_1, A_2, A_3 di π.
La trasformata della conica C_2 è una quartica razionale C_4 dotata di 3 punti doppi in A'_1, A'_2, A'_3 (cioè nei punti fondamentali di π').

Le coppie di rette tangenti in ciascuno di tali punti doppi corrispondono (proiettivamente) alle coppie di punti in cui la conica C_2 incontra i lati a_1, a_2, a_3 del triangolo fondamentale di π.

Nel caso della figura (6) la quartica razionale C_4 presenta 3 NODI perché ~~a_1 a_2 a_3~~ ciascuna delle tre rette a_1, a_2, a_3 incontra la conica in 2 punti distinti ($a_1 \to R, S$; $a_2 \to M, N$; $a_3 \to T, V$) e quindi le tangenti alla C_4 in A'_1, A'_2, A'_3 sono distinte.

Se la conica C_2 risulta tangente ad un lato (es. a_2) del triangolo fondamentale allora la quartica C_4 presenta in A'_2 una cuspide in quanto coincidendo i punti M ed N ($M \equiv N$) coincideranno anche le tangenti alla C_4 nel punto doppio A'_2 (caso cuspidale). fig. (7)
Nei punti A'_1 e A'_3 la C_4 presenterà ancora 2 Nodi.

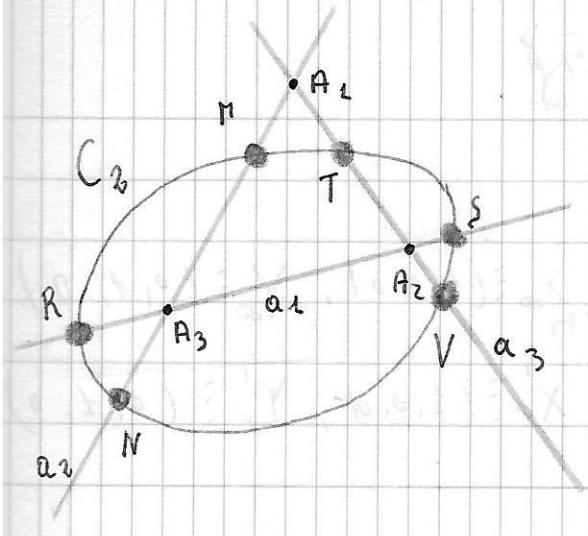
Se la conica C_2 risulta tangente (fig. (8)) alle tre rette fondamentali a_1, a_2, a_3 fuori dei punti base A_1, A_2, A_3 si ottengono QUARTICHE-TRICUSPIDALI.
Nella quartica tricuspidale le tre tangenti stazionarie concorrono in un punto.
Nella quartica trinodale le tre coppie di tangenti nei punti doppi, risultano tangenti ad una medesima conica.

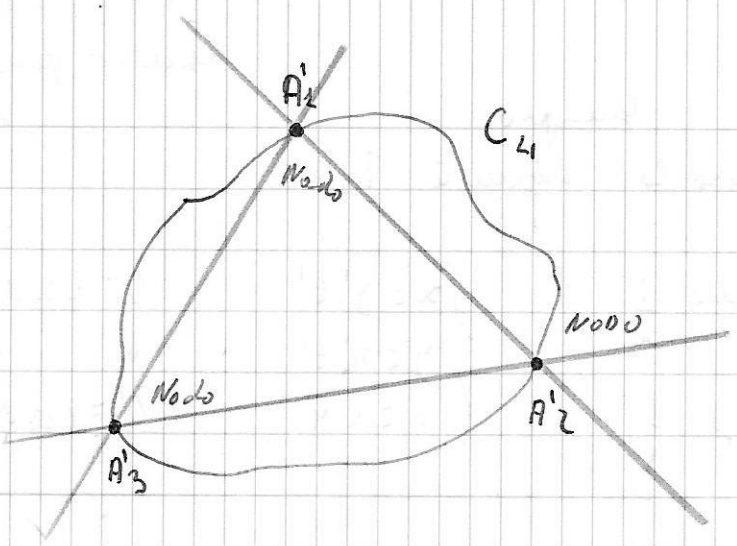
~ ~ ~ ~ ~ ~

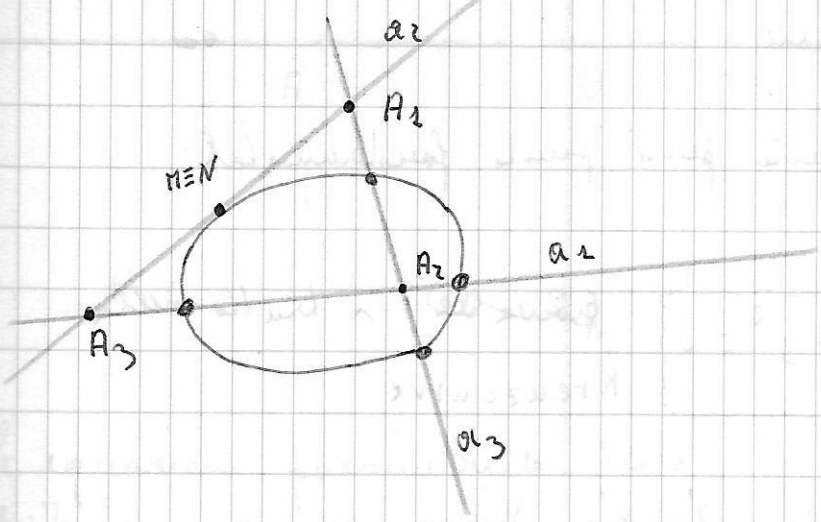
Se la conica C_2 passa per uno (ad es. A_1) dei punti fondamentali la sua trasformata è una cubica che presenta un punto doppio in A'_1.

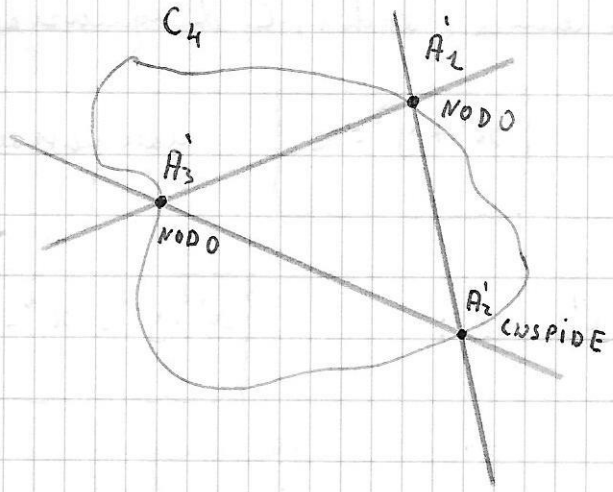
Se passa per 2 punti fondamentali, la sua trasformata è una conica che non fa parte della rete omaloidica fondamentale di π'.

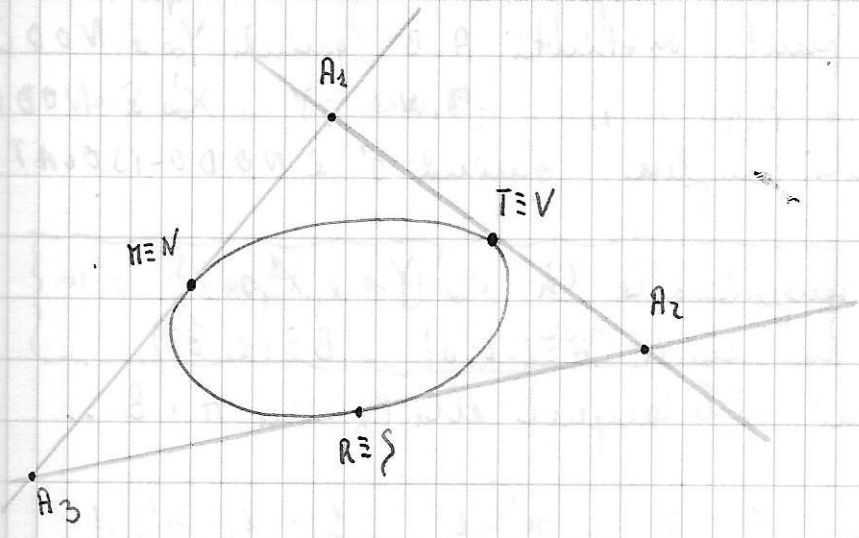
Se passa per tutti e 3 i punti fondamentali di π, la sua trasformata

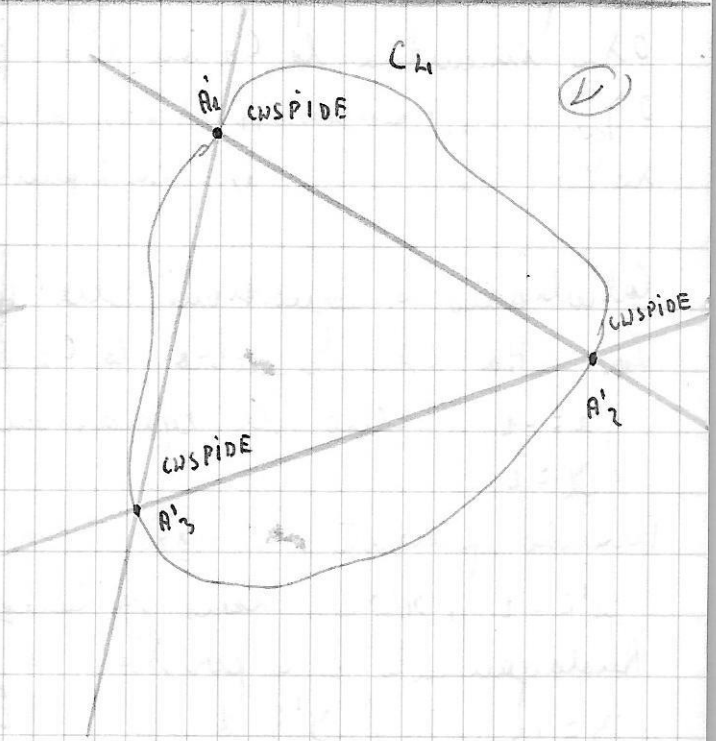












è una retta di π'.

Esempio

Considero la seguente T. Q.

$$(xx)\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{x'} \\ y = \dfrac{1}{y'} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y' t' \\ y = x' t' \\ t = x' y' \end{cases}$$

$O \equiv (0,0,1)$; $X_\infty \equiv (1,0,0)$; $Y_\infty \equiv (0,1,$

$\downarrow$

$O' \equiv (0,0,1)$; $X'_\infty \equiv (1,0,0)$; $Y'_\infty \equiv (0,1$

e la conica (cerchio) C_2 da trasformare

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$ non passante per i punti fondamentali.

La C'_4 è: $\boxed{x'^2 \cdot y'^2 - x'^2 - y'^2 = 0}$ curva detta anche Kreuzcurve

Essa presenta 3 punti doppi in O', X'_∞, Y'_∞.

OX_∞ incontra la C_2 in due punti distinti A, B quindi Y'_∞ è NO

OY_∞ " " " " M, N , X'_∞ è NO

$X_\infty Y_\infty$ " " in 2 punti complessi quindi O' è NODO-ISOLA

Calcoliamo le equazioni delle tangenti alla C_4 in Y'_∞ e X'_∞.

La retta OX_∞ incontra la C_2 nei punti $A \equiv (-1,0)$ e $B \equiv (1,0)$

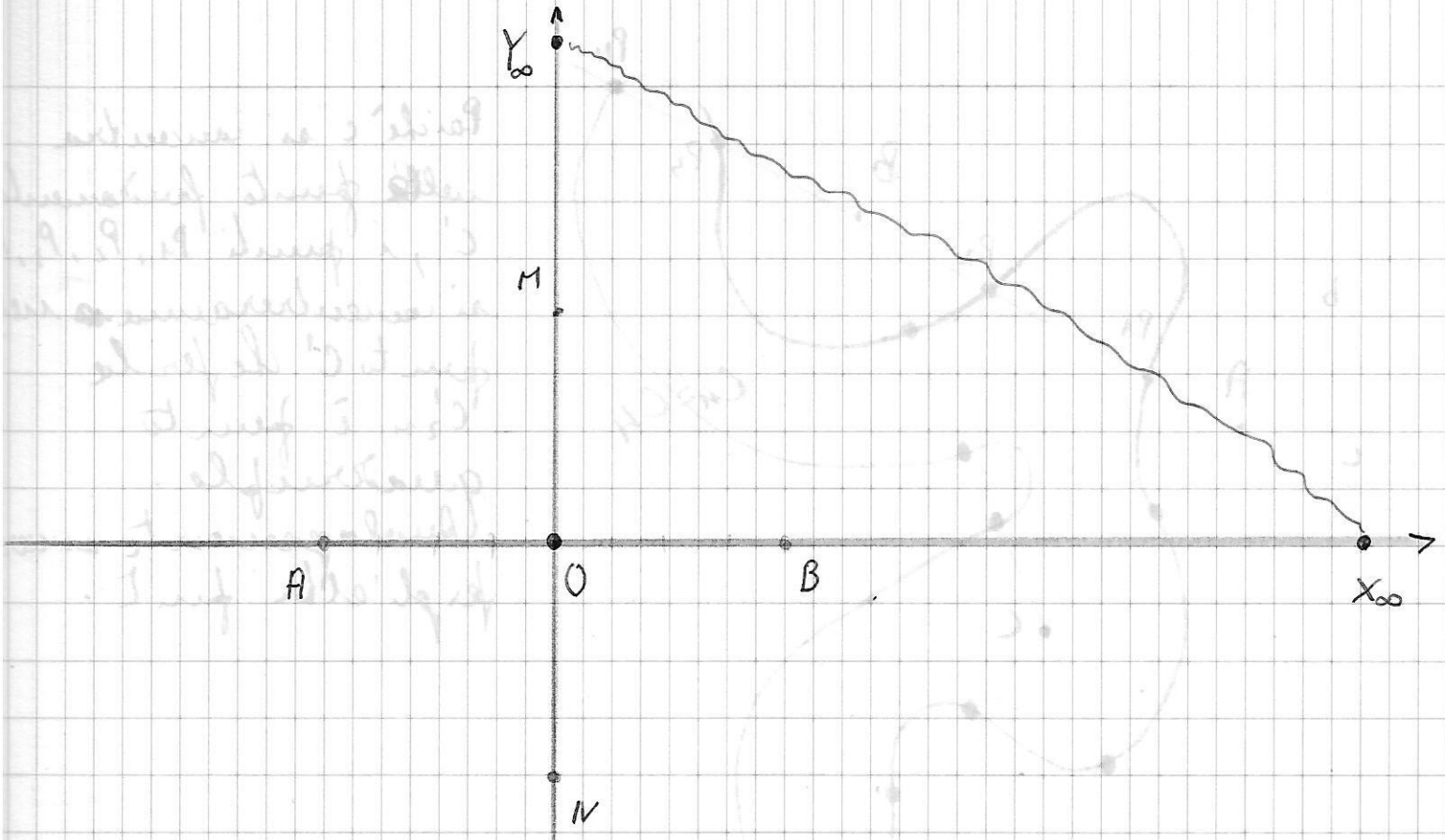
$\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$ sono le equazioni delle tangenti alla C_2 in A e B.

Tenendo presente la (xx) si ha: $\frac{1}{x'} = -1$; $x' = -1$; $\frac{1}{x'} = 1$; $x' = 1$

$x' = -1$; $x' = 1$ sono le tangenti alla C'_4 in Y'_∞.

Analogamente si ha per X_∞:

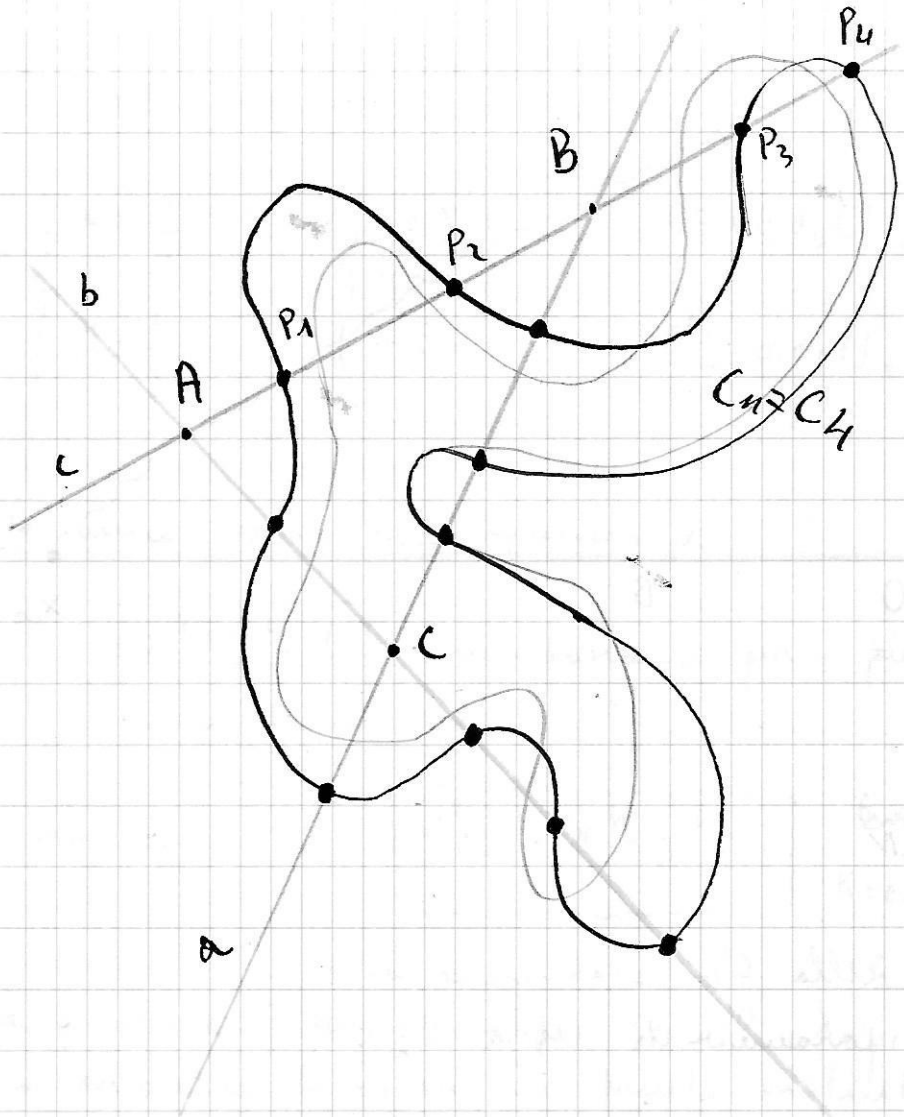
$\begin{cases} y = +1 \\ y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y' = 1 \\ y' = -1 \end{cases}$ Le tangenti in O' sono le rette risolv



Le equazioni parametriche della C'_2 si ottengono così:
Si trovano le equazioni parametriche della C_2:

$x = \cos t$; $y = \sin t$ e si applica la (**) ottenendo:

$$x' = \frac{1}{\cos t} = \sec t \; ; \quad y' = \frac{1}{\sin t} = \operatorname{cosec} t$$



Poiché c si mantiene
nello punto fondamen
C', i punti P1, P2, P
si concentreranno
punto C' che per la
C'2n è punto
quadruplo.
Analogamente
per gli altri punti.

CUBICHE - PIANE

Si hanno 3 tipi di cubiche:

δ	K	m	i	p	tipo di cubica	
0	0	6	9	1	Generale	Ellittica
1	0	4	3	0	Nodata	Razionali
0	1	3	1	0	Cuspidata	

La cubica di genere 1 (cubica generale) si dice ELLITTICA

La retta che unisce due flessi incontra la cubica in un terzo punto di flesso.

Una retta passante per 3 punti di flesso di una cubica si chiama RETTA-INFLESSIONALE o retta di Mac-Laurin.

I 9 flessi di una cubica senza punti doppi appartengono a 3 a 3 a 12 rette.

Per ogni flesso di una cubica senza punto doppio passano 4 rette inflessionali.

3 e soltanto 3 dei 9 flessi della cubica sono reali

La sua equazione generale è: $ax^3+bx^2y+cy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2+1=0$

la quale, mediante opportune trasformazioni, può farsi nella sua forma canonica:

$$x^3 + y^3 + \lambda xy + 1 = 0 \longrightarrow x_1^3 + x_3^3 + \lambda x_1 x_2 x_3 + x_3^3 = 0$$

CUBICHE - NODATE

— Da un punto di una cubica nodata escono due tangenti alla curva altrove.

— $\exists$ 3 flessi di una cubica nodata sono allineati; ed uno almeno, di essi è reale.

— La sua equazione generale è:

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + xy = 0$$

mentre la sua forma canonica è:

$$x^3 + y^3 - xy = 0 \longrightarrow x_1^3 + x_2^3 - x_1 x_2 x_3 = 0$$

— Le cubiche nodate sono fra loro proiettivamente identiche

— Una cubica con nodo reale possiede 3 flessi (allineati) di cui, uno reale e gli altri due immaginari e coniugati.

— Una cubica con nodo isolato possiede tre flessi (allineati) tutti reali.

— Le cubiche nodate sono curve razionali e pertanto è possibile per esse una rappresentazione parametrica.
Tale rappresentazione la si ottiene segando la cubica con il fascio di rette:

$$x = ty \qquad (x_1 = t x_2)$$

da cui si ottiene:

$$② \quad \begin{cases} \rho x_1 = x_1(t) \\ \rho x_2 = x_2(t) \\ \rho x_3 = x_3(t) \end{cases} \quad \text{fissato} \quad \begin{cases} \rho x_1 = t^2 \\ \rho x_2 = t \\ \rho x_3 = 1 + t^3 \end{cases} \quad (\beta)$$

— Vediamo qual'è la condizione di allineamento di 3 punti di una cubica nodata:

Sia $l: a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0$ una retta qualsiasi
Essa incontra la C_3 in 3 punti dati da:

$$\begin{cases} C_3 = 0 \\ l = 0 \end{cases} \qquad a x_1(t) + b x_2(t) + c x_3(t) = 0 \quad \text{cioè}$$

$$(\gamma) \quad \boxed{c t^3 + a t^2 + b t + c = 0}$$ e per le note proprietà delle radici:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{a}{c} \\ t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_2 = b/c \\ t_1 t_2 t_3 = -1 \end{cases}$$

essendo t_1, t_2, t_3 le soluzioni della (γ).

CUBICHE - CUSPIDATE

— Una cubica cuspidata possiede un solo flesso reale

— La forma canonica della sua equazione è:

$$x^3 - y^2 = 0 \qquad x_1^3 - x_2^2 x_3 = 0$$

— Sono curve razionali e quindi invertibili di rappresentazione parametrica.
Esse sono del Lifo (2) e sono: $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1 \\ x_3 = t^3 \end{cases}$ (20)

— La condizione di allineamento di 3 punti della cubica è:

$$\begin{cases} a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

$$c t^3 + a t + b = 0 \quad \Leftarrow \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 0 \\ t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = \frac{a}{c} \\ t_1 t_2 t_3 = -\frac{b}{c} \end{cases}$$

Quartiche bicircolari

— La quartica bicircolare è una quartica aventi i Punti Ciclici del piano quali punti doppi.
La sua equazione generale è del tipo:

$$(x^2+y^2)^2+(\alpha x+\beta y)(x^2+y^2)+a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+ \\ +2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (1)$$

con $P\equiv\left(-\frac{\alpha}{4},-\frac{\beta}{4}\right)$ punto fondamentale

Il punto fondamentale gode della proprietà di essere equidistante dai punti di intersezione della quartica con una retta passante per esso.

Se $P\equiv O$ la (1) diventa:

$$(x^2+y^2)^2+a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (2)$$

Quartiche bicircolari ottenute per proiezione stereografica delle intersezioni di una sfera con un cono

— Quartica sferica bicircolare

$$(x^2+y^2)^2-8(x^2+y^2)+16\frac{a^2}{c^2}x^2-16\frac{b^2}{c^2}y^2+16=0 \qquad (3)$$

La quartica è simmetrica rispetto all'ane delle x e delle y incontra in due punti reali l'ane delle y, due incontra l'ane delle x.

Non ha cuspidi e pertanto la curva è di genere 1 (o Ellittica).

La curva consta di due ovali esterni l'uno all'altro

La quartica bicircolare:

$$(x^2+y^2)^2 + 8(x^2+y^2) + 16\frac{a^2}{c^2}x^2 + 16\frac{b^2}{c^2}y^2 - 16 = 0 \qquad (4)$$

che differisce dalla (3) per il fatto che le due ovali sono uno interno all'altro

Riassumendo le caratteristiche della curva sono:

p	m	δ	K	τ	i
1	8	2	0	8	12

$$(b-np)(x^2+y^2)^2 + (4mx+4ny)(x^2+y^2) + 16ax^2 - 8b(x^2+y^2) + \\ - 16(m+n)y + 16(b+np) = 0 \qquad (5)$$

$P = \left(-\frac{m}{b-np}, -\frac{n}{b-np}\right)$ è simmetrico rispetto all'ane y, incontra ognuno degli assi in due punti reali e due immaginari.

— La quartica bicircolare razionale

$$p(b+c)(x^2+y^2)^2 + 4\left[pmx + (b-c)y\right](x^2+y^2) - 4p(b-c)(x^2+y^2) + 8apx^2 = 0 \qquad (6)$$

$$P \equiv \left(\frac{-m}{b+c}\ ,\ \frac{c-b}{p(b+c)}\right)$$

È simmetrica rispetto all'asse delle y

Nell'origine ha un nodo le cui tangenti t_1 e t_2 hanno equazione:

$$y = \pm\frac{\sqrt{2a-b+c}}{\sqrt{c-b}}\,x$$

t_1 e t_2 incontrano la curva in 4 punti coincidenti con l'origine che è perciò un punto doppio d'inflesso. Essa è razionale.

p	m	δ	K	τ	i
0	6	3	0	4	6

Salmon vol I pag 326

— Lemniscata iperbolica di Booth

$$\boxed{(x^2+y^2)^2 + 4\frac{a^2}{c^2}x^2 - 4\frac{b^2}{c^2}y^2 = 0} \quad (7)$$

è di forma simile alla precedente (6) ed ha le stesse caratteristiche di flesso:

O è un punto doppio con tangenti $y = \pm\frac{a}{b}x$ ed è punto doppio di inflessione.

— Lemniscata ellittica di Booth

$$\boxed{(x^2+y^2)^2 - 4\frac{a^2}{c^2}x^2 - 4\frac{b^2}{c^2}y^2 = 0} \quad (8)$$

Le caratteristiche flessionali sono identiche alla (9).

O è un punto doppio isolato con tangenti $y = \pm\frac{a}{b}x$

Se $a = b$ la curva si riduce al cerchio

$$x^2+y^2 = \frac{8a^2}{c^2}$$

ed alla retta immaginaria

$$x^2+y^2 = 0$$

— Lemniscata di Bernoulli

$$(x^2+y^2)^2 + 2k^2(x^2-y^2) = 0 \qquad (1)$$

O è un biflecnodo con tangenti $y = \pm x$

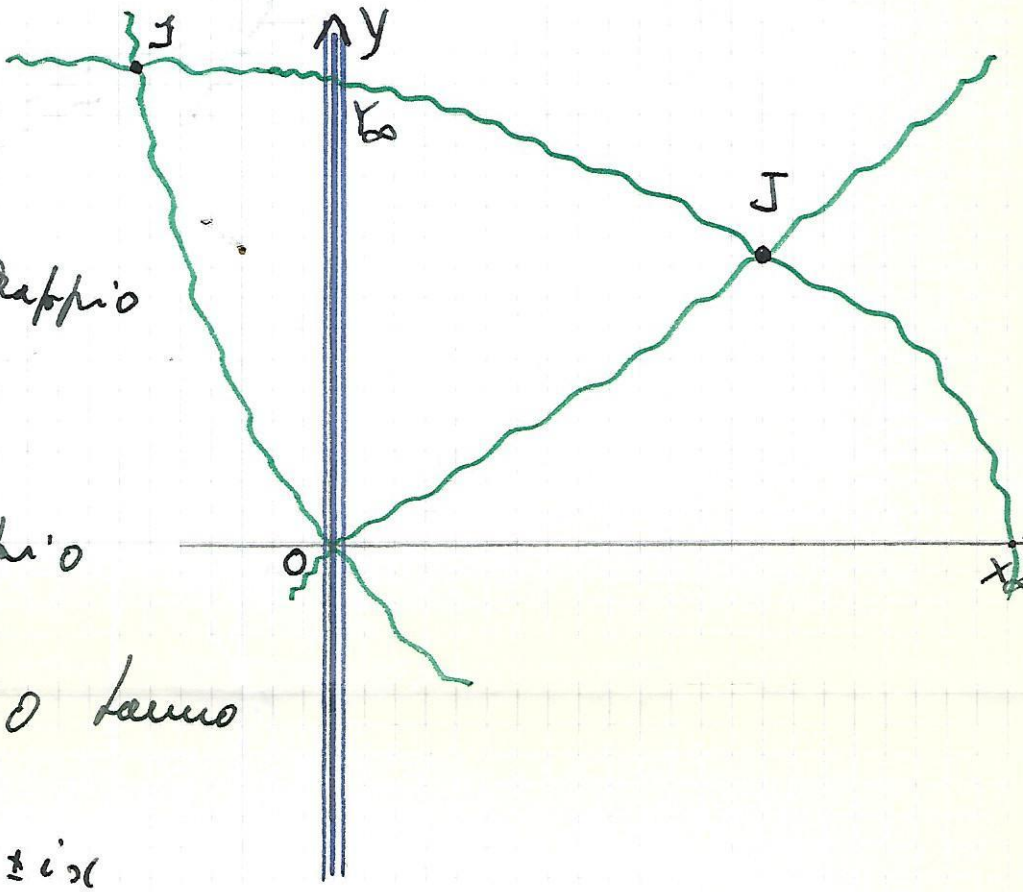
I punti ciclici sono ~~[illegible]~~ punti doppi di inflessione
le cui caratteristiche flessionali sono uguali alla (1).

C_3 : $x^3 - a(x^2+y^2) = 0$ appartiene al fascio:

$x^3 + \lambda(x^2+y^2) = 0$ individuato dalle cubiche riducibili:

$\Gamma_1 : x^3 = 0$ $\quad x_1^3 = 0$

$\Gamma_2 : (x^2+y^2) = 0$ $\quad (x_1^2 + x_2^2)x_3 = 0$



Γ_1 ha O come punto triplo

Γ_2 ha come punto doppio

Per cui:

O è punto doppio per C_3.

Le tangenti in O hanno equazioni:

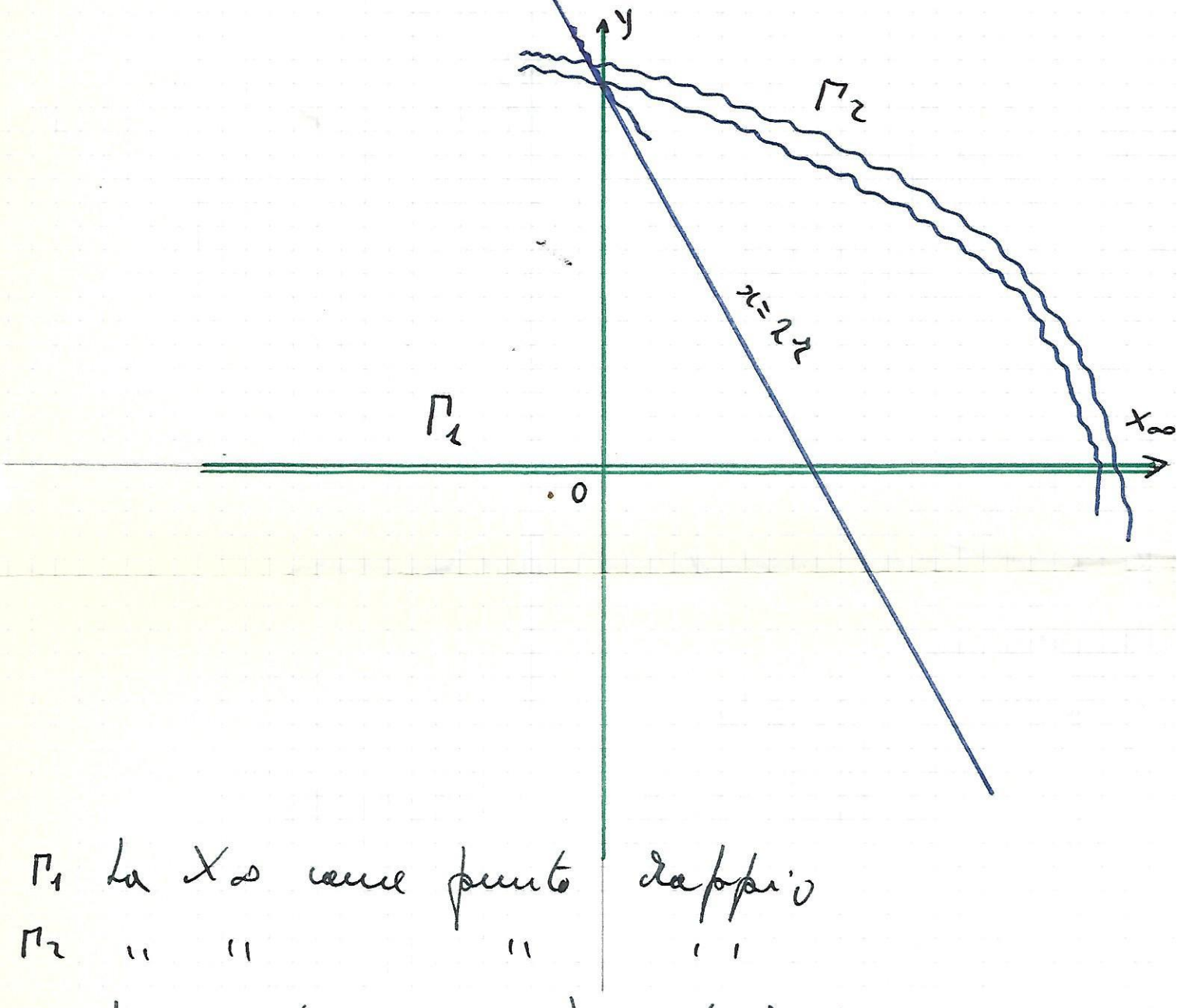
$x^2+y^2 = 0$ $\quad y = \pm ix$

O è Punto Doppio Isolato

C_3: $\boxed{xy^2 - a^2(2r - x) = 0}$

Γ_1: $xy^2 = 0$ cioè $x_1 x_2^2 = 0$

Γ_2: $(2r x_3 - x_1) x_3^2 = 0$



Γ_1 ha X_∞ come punto doppio

Γ_2 " " " " "

C_3 ha X_∞ come punto doppio

le tangenti in X_∞ alle C_3 sono:

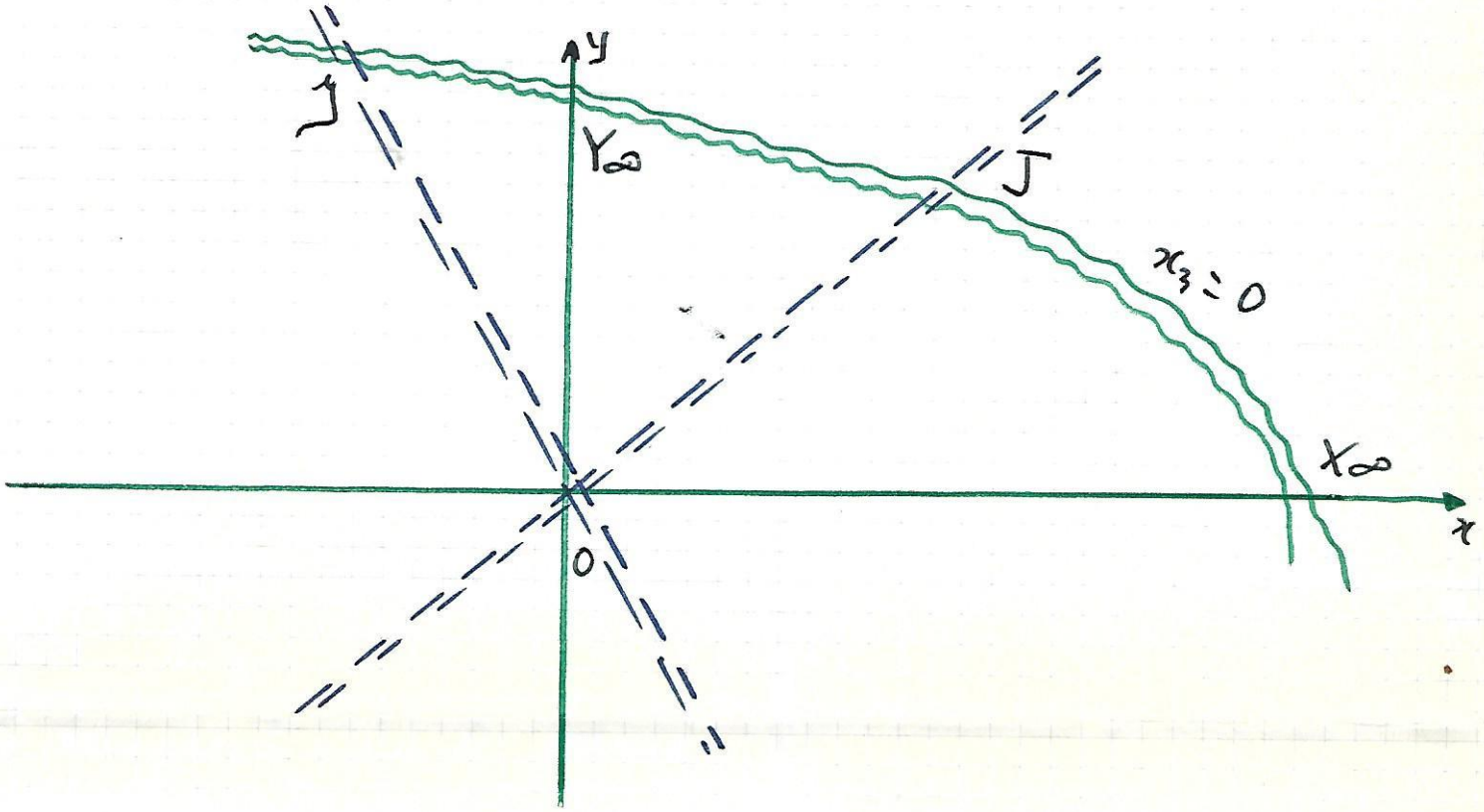
$y^2 + a^2 = 0$ $\quad y = \pm ai$

X_∞ è per la C_3 punto doppio isolato

C_4: $\boxed{(x^2+y^2)^2 - 2k^2xy = 0}$

Γ_1: $(x^2+y^2)^2 = 0$ ossia $(x_1^2+x_2^2)^2 = 0$

Γ_2: $x_1 x_2 x_3^2 = 0$



Γ_1: la O come punto quadruplo

Γ_2 la O come punto doppio

C_4 la O come punto doppio con tangenti:
$x=0$ $y=0$ O è un nodo per la C_4

Γ_1 la J e $\bar{J}$ come punti doppi

Γ_2 la J e $\bar{J}$ " " "

Quindi C_4 ha J e $\bar{J}$ come punti doppi che sono 2 nodi isolati