Integrali tripli estesi ad un dominio limitato misurabile

Il calcolo di un integrale triplo si può ricondurre a tre successive integrazioni semplici. Le considerazioni che seguono fanno vedere che il calcolo di un integrale triplo si può effettuare anche con due sole integrazioni, di cui una semplice ed una doppia. Rimanendo nell'ambito delle tre variabili [1] diciamo che un insieme $E \subset R^3$ [(§)] è un **dominio normale rispetto al piano** xy se esso può essere rappresentato nella forma:

$$E=\{(x,y,z)\in R^3 : (x,y)\in D \wedge \alpha(x,y)\le z\le \beta(x,y)\}$$

con **D** dominio normale del piano Oxy ed $\alpha(x,y)$ e $\beta(x,y)$ funzioni **continua** su **D**.

Per un dominio normale rispetto al piano Oxy vale la seguente proprietà:

- Una retta parallela all'asse **z** e passante per il punto $P_1(x_1,y_1)\in D$ ha in comune con la frontiera dell'insieme **E** [(*)] due soli punti oppure un segmento parallelo all'asse delle z.

Per un dominio $E\subset\mathbb{R}^3$ normale rispetto al piano Oxy e per una funzione $f(x,y,z)$ definita e continua in **E** vale la seguente formula di riduzione detta **formula di integrazione per fili**:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Se il **dominio** fosse normale rispetto al piano Oxz oppure rispetto al piano Oyz si avrebbero, rispettivamente, le seguenti formule di riduzione:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A dx\,dz \int_{\gamma(x,z)}^{\delta(x,z)} f(x,y,z)\,dy \qquad \iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_B dy\,dz \int_{\omega(y,z)}^{\rho(y,z)} f(x,y,z)\,dx$$

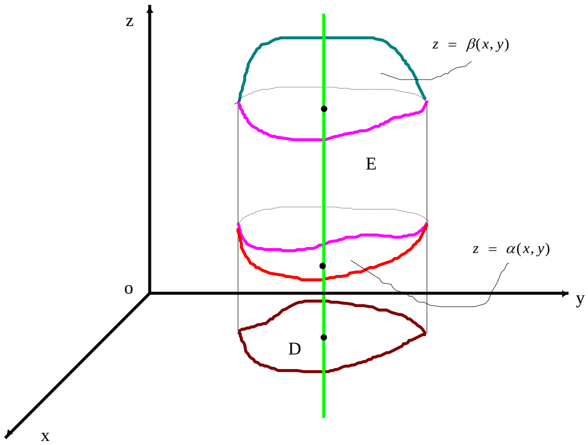
Nel caso in cui il dominio **E** sia normale rispetto a tutti e tre i piani si utilizzerà quella formula di riduzione la cui applicazione conduce a calcoli più semplici.

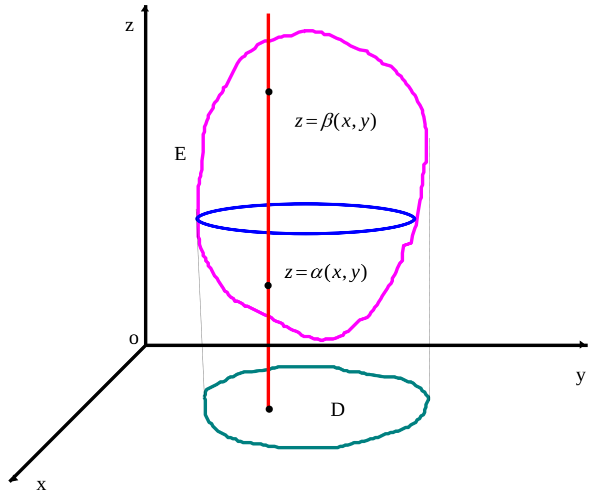
---

[1] Spazio R^3

[(§)] L'insieme **E** è un solido dello spazio tridimensionale

[(*)] La frontiera dell'insieme **E** è una superficie gobba S. Questa superficie può essere formata da due pezzi di superficie aventi rispettivamente equazioni $z=\alpha(x,y)$, $z=\beta(x,y)$ con $\alpha(x,y)\le\beta(x,y)$ ed (x,y) variabile nel dominio **D** del piano Oxy entro cui si proietta ortogonalmente il dominio **E**. Detti pezzi di superficie saranno raccordati tra loro da un pezzo di superficie cilindrica a generatrici parallele all'asse **z** ed avente come **direttrice** sul piano Oxy la frontiera di **D**. Qualche volta la frontiera del dominio **E** è incontrata in due soli punti da ogni parallela all'asse delle z .- In questo caso l'equazione della frontiera è data in forma implicita ed assume la forma $F(x,y,z)=0$ sicché essa risulta costituita da due falde le cui equazioni sono rispettivamente $z=\alpha(x,y)$, $z=\beta(x,y)$ con $\alpha(x,y)\le\beta(x,y)$





Se il dominio **E** non è normale rispetto a nessuno dei tre piani coordinati, ma è decomponibile in un numero finito di domini normali rispetto ad almeno uno dei tre piani coordinati, allora l'integrale triplo calcolato rispetto al dominio **E** è la somma di opportuni integrali tripli relativi ad opportuni domini normali.

Nel caso particolare in cui vogliamo calcolare il **volume** del dominio normale **E** (che è un solido) basta porre $f(x,y,z)=1$ e si ottiene:

$$V(E)=\iiint_E dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} dz=\iint_D [\beta(x,y)-\alpha(x,y)]\,dx\,dy$$

Se $\alpha(x,y) = 0$ il solido individuato dal dominio **E** diventa un **cilindroide** ed il suo volume è dato da:

$$V(E)=\iiint_E dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} dz=\iint_D \beta(x,y)\,dx\,dy$$

Si ha così un'interpretazione geometrica dell'integrale doppio come volume di un cilindroide.

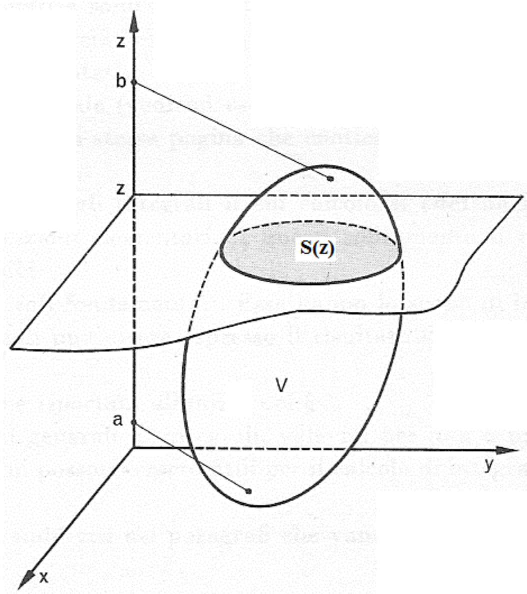
Formula di integrazione per strati

Se il dominio normale **E** è compreso tra i piani $z = a$ e $z = b$ $(a < b)$, se il generico piano perpendicolare all'asse **z** tagli il dominio **E** secondo una superficie quadrabile, se l'integrale doppio $\iint_{S(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy$, che è sicuramente funzione di **z**, è funzione **continua** nell'intervallo $[a,b]$ allora l'integrale triplo della funzione $f(x,y,z)$ esteso al dominio normale **E** si calcola con la seguente formula di riduzione:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \iint_{S(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy$$

detta **formula di integrazione per strati**.

$S(z)$ è l'area della generica sezione del dominio **E** col piano z=costante ed a, b sono rispettivamente il **minimo assoluto** ed il **massimo assoluto** di **z** in **E**.



In particolare il dominio **E** può essere un **parallelepipedo trirettangolo** con facce parallele ai piani cartesiani definito da $a_1 \le x \le a_2$, $b_1 \le y \le b_2$, $c_1 \le z \le c_2$. In tal caso abbiamo:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{c_1}^{c_2} dz \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{a_1}^{a_2} f(x,y,z)\,dz$$

in cui l'ordine delle integrazioni può essere scelto arbitrariamente.

L'integrale triplo $\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ contrariamente a quanto avviene sia per gli integrali semplici che gli integrali doppi non ha una interpretazione geometrica.

Cambio di variabili nell'integrale triplo

Anche il calcolo di un integrale triplo può risultare più semplice mediante un opportuno cambiamento di variabili. Se tale cambiamento è dato da: $\begin{cases} x = x(u,\mathrm{v},\mathrm{w}) \\ y = y(u,\mathrm{v},\mathrm{w}) \\ z = z(u,\mathrm{v},\mathrm{w}) \end{cases}$ $\begin{cases} u = u(x,y,z) \\ \mathrm{v} = \mathrm{v}(x,y,z) \\ \mathrm{w} = \mathrm{w}(x,y,z) \end{cases}$, se tali funzioni sono continue assieme alle loro derivate prime e seconde allora esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio $Oxyz$ ed i punti dello spazio $Ou\mathrm{vw}$. Le suddette trasformazioni fanno corrispondere al dominio $E \subset \mathbb{R}^3$ dello spazio $Oxyz$ il dominio $E' \subset \mathbb{R}^3$ dello spazio $Ouvw$, ed alla superficie S che racchiude il solido $E\subset\mathbb{R}^3$ la superficie S' che racchiude il solido $E'\subset\mathbb{R}^3$. Sotto queste condizioni abbiamo la seguente formula di trasformazione:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{E'} f\left[x(u,\mathrm{v},\mathrm{w}),y(u,\mathrm{v},\mathrm{w}),z(u,\mathrm{v},\mathrm{w})\right]\cdot|J|\,du\,d\mathrm{v}\,d\mathrm{w}$$

dove J è il determinante jacobiniano della trasformazione: $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,\mathrm{v},\mathrm{w})}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{v}} & \dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{w}}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{w}} & \dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{w}}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial \mathrm{w}} & \dfrac{\partial z}{\partial \mathrm{w}}\end{vmatrix}\neq 0$

- Passaggio dalle coordinate cartesiane ortogonali (x,y,z) alle coordinate polari (ρ,ϑ,φ)

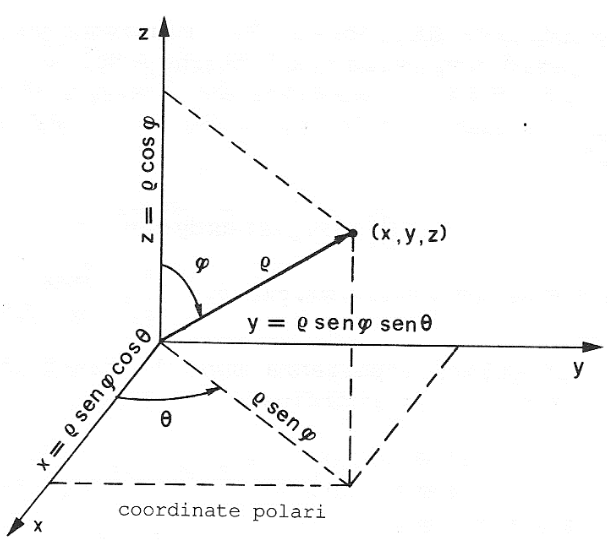
$$\begin{cases}x=\rho\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi\\ y=\rho\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi\\ z=\rho\cdot\cos\vartheta\end{cases}\qquad J=\rho^2\cdot\sin\vartheta$$

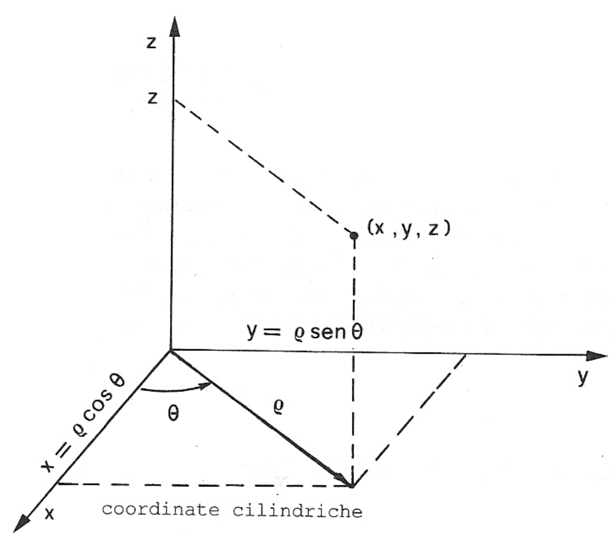
$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{E'} f(\rho\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi,\rho\cdot\cos\vartheta)\cdot\rho^2\cdot|\sin\vartheta|\cdot d\rho\cdot d\vartheta\cdot d\varphi$$

- Passaggio dalle coordinate cartesiane ortogonali (x,y,z) alle **coordinate cilindriche** (ρ,ϑ,z)

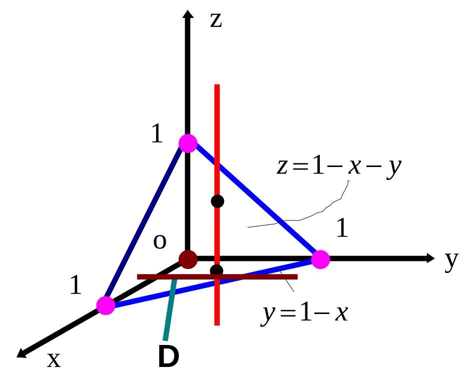
$$\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\vartheta\\ y=\rho\cdot\sin\vartheta\\ z=z\end{cases}\qquad J=\rho$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{E'} f(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\vartheta,z)\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\vartheta\cdot dz$$





Calcolare l'integrale triplo $\iiint_E (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ sull'insieme E individuato dai piani coordinati cartesiani di equazioni $x=0$, $y=0$, $z=0$ e dal piano di equazione $x+y+z=1$.



L'insieme **E** è costituito dalla piramide indicata in figura. L'integrazione rispetto alla variabile z va effettuata tra $z=0$ e $z=1-x-y$. Pertanto, indicando con **D** la proiezione del dominio **E** sul piano Oxy otteniamo:

$$\iiint_E (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)\,dz = \iint_D \left[(x+y)z+\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-(x-y)} dx\,dy =$$

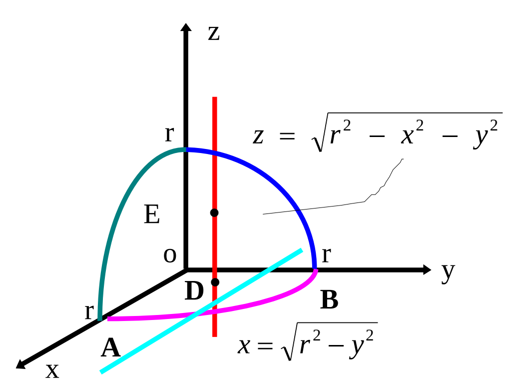
$$=\iint_D \left[(x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right] dx\,dy$$

Il dominio **D** del piano Oxy è il **triangolo** i cui lati appartengono alle rette di equazioni $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ ed è normale rispetto all'asse x.

$$\iiint_E (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[(x+y)-(x+y)^2+\frac{1}{2}(1-x-y)^2\right]\cdot d\,y =$$

$$=\int_0^1 dx \left[\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{(x+y)^3}{3}+\frac{(1-x-y)^3}{6}\right]_0^{1-x-y} = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}+\frac{x^3}{3}+\frac{(1-x)^3}{6}\right] dx = \frac{1}{8}$$

Calcolare l'integrale triplo $\iiint_E x\,dx\,dy\,dz$ ove E è il dominio $x^2+y^2+z^2\le r^2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.



$$E=\left\{(x,y,z)\in R^3 \wedge (x,y)\in R^2 : x^2+y^2+z^2\le r^2 \wedge x\ge 0 \wedge y\ge 0 \wedge z\ge 0\right\}$$

Applichiamo la formula di integrazione per fili. Il dominio **D**, proiezione di **E** sul piano Oxy, è il quarto di cerchio **OAB** di equazione $x^2+y^2=r^2$. La frontiera del dominio **E** è l'ottava parte della superficie sferica $x^2+y^2+z^2=r^2$ contenuta nel primo ottante. Risulta pertanto:

$z=\alpha(x,y)=0$, $z=\beta(x,y)=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$. D è un dominio normale sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y. Noi lo considereremo normale rispetto all'asse y. $x=\sqrt{r^2-y^2}$ q

$$\iiint_E x\,dx\,dy\,dz=\iint_D x\,dx\,dy\int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz=\iint_D x\sqrt{r^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

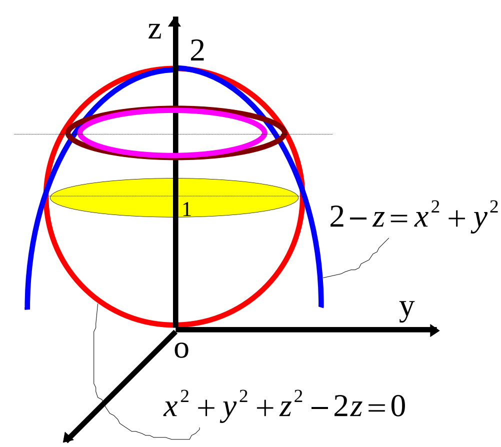
$$=\int_0^r dy\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} x\sqrt{r^2-x^2-y^2}\cdot dx=-\frac{1}{2}\int_0^r dy\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}}(r^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot d(r^2-x^2-y^2)=$$

$$= =-\frac{1}{3}\int_0^r\left[(r^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{r^2-y^2}}\cdot dy=\frac{1}{3}\int_0^r(r^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}\cdot dy\ =\frac{1}{3}\int_0^r(r^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}\cdot dy$$

Posto $y=r\cdot\sin t$ otteniamo:

$$\iiint_E x\,dx\,dy\,dz=\frac{r^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt=\frac{r^4}{24}\Big[3t+3\sin t\cos t+2\cos t\cos^3 t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi r^4}{16}$$

Calcolare l'integrale triplo $\iiint_E z\,dx\,dy\,dz$ ove E è il dominio è il dominio formato dai punti esterni al paraboloide $2-z=x^2+y^2$ ed interni alla sfera $x^2+y^2+z^2-2z=0$



Conviene applicare il metodo di **integrazione per strati** con piani z=costante osservando che $1\le z\le 2$ e che l'intersezione del paraboloide con la sfera si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases}2-z=x^2+y^2\\ x^2+y^2+z^2-2z=0\end{cases}$$

$S(z)$ rappresenta l'area della corona circolare delimitata dalle circonferenze di equazioni:

$x^2+y^2=2-z \qquad x^2+y^2=2z-z^2$ con z = costante.

$$\iiint_E z\,dx\,dy\,dz = \int_1^2 z\,dz \iint_{S(z)} dx\,dy$$

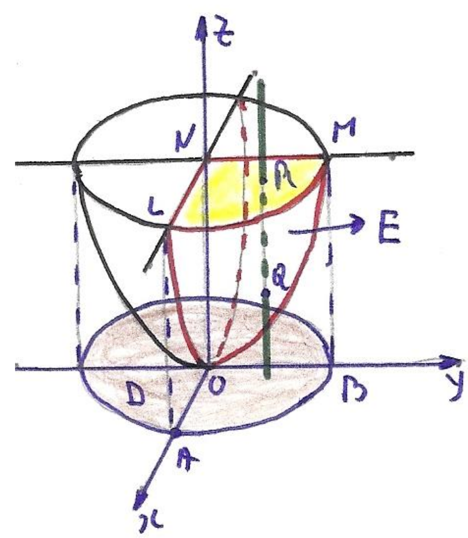
L'integrale doppio $\iint_{S(z)} dx\,dy$ può essere calcolato per via elementare in quanto rappresenta l'area di una corona circolare. Poiché risulta $R^2=2z-z^2$, $r^2=2-z$, otteniamo:

$$\iint_{S(z)} dx\,dy = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2-r^2) = \pi(2z-z^2-2+z) = \pi(-z^2+3z-2)$$

e quindi: $$\iiint_E z\,dx\,dy\,dz = \pi\int_1^2(-z^2+3z-2)\,dz = \pi\left[-\frac{z^4}{4}+z^3-z^2\right]_1^2 = \frac{\pi}{4}$$

Calcolare l'integrale triplo $\iiint_E xy\,dx\,dy\,dz$ esteso al dominio

$$E=\left\{(x,y,z)\in R^3 : x\geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2+y^2 \leq z \leq 3\right\}$$



Il dominio $E\subset\mathbb{R}^3$ è il solido delimitato dal paraboloide circolare di equazione $z=x^2+y^2$ e dai piani di equazioni $x=0$, $y=0$, $z=3$.

Per $z=3$ abbiamo: $x^2+y^2=3$ che rappresenta l'equazione cartesiana della circonferenza di centro $N(0,0,3)$ e raggio $R=\sqrt{3}$. Questo significa che il settore circolare LNM che delimita superiormente il dominio $E\subset\mathbb{R}^3$, ha per vertici i punti: $L(\sqrt{3},0,3)$, $N(0,0,3)$, $M(0,\sqrt{3},3)$

$\alpha(x,y)=x^2+y^2 \quad \beta(x,y)=3$

La proiezione ortogonale del dominio $E\subset\mathbb{R}^3$ sul piano Oxy è il quarto di circonferenza $x^2+y^2=3$ con $z=0$ e rappresenta il dominio $D\subset\mathbb{R}^2$ che è normale sia all'asse x, che all'asse y.

Si ha pure: $0\leq x\leq\sqrt{3}$, $0\leq y\leq\sqrt{3}$

Osservato che una generica retta parallela all'asse z, condotta da un generico punto $P(x,y)$ del settore circolare OAB, penetra nel dominio $E\subset\mathbb{R}^3$ nel punto Q(punto della superficie gobba di equazione $z=\alpha(x,y)=x^2+y^2$) e ne esce dal punto R (punto del piano di equazione $z=3$)

$$\iiint_E xy\,dx\,dy\,dz=\iint_D xy\,dx\,dy\int_{x^2+y^2}^{3}d\,z=\int_0^{\sqrt{3}}x\,d\,x\int_0^{\sqrt{3-x^2}}y\,d\,y\,[z]_{x^2+y^2}^{3}=\int_0^{\sqrt{3}}x\,d\,x\int_0^{\sqrt{3-x^2}}y\cdot\left(3-x^2-y^2\right)d\,y$$

$$\iiint_E xy\,dx\,dy\,dz=\int_0^{\sqrt{3}}x\left[\frac{\left(3-x^2\right)^2}{2}-\frac{\left(3-x^2\right)^2}{4}\right]=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}}x\left(3-x^2\right)d\,x=\frac{1}{4}\left[\frac{9}{2}x^2-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{6}x^6\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{9}{8}$$