Calcolo della massa m di un solido

Consideriamo un solido T di massa m, volume V e superficie S. Supponiamo che il corpo abbia **massa volumica** (densità) ρ dipendente dalle coordinate (x, y, z) di un punto P interno o sulla superficie del solido, cioè supponiamo che sia: $\rho=\rho(x, y, z)$

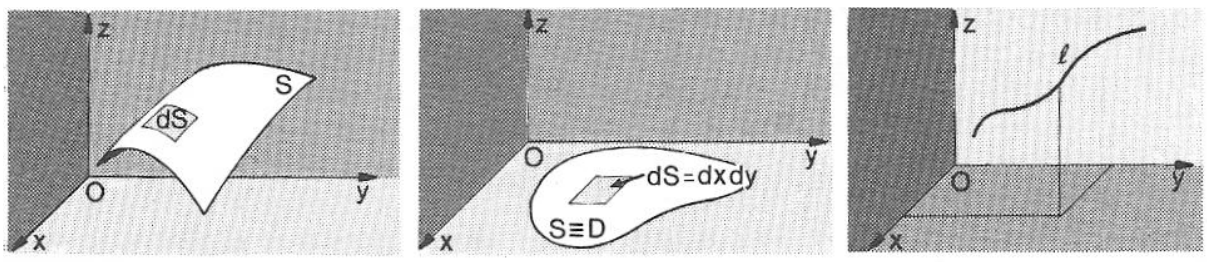
Per una massa infinitesima dm occupante il volume infinitesimo $dV=dx\,dy\,dz$ vale l'uguaglianza:

$$\rho=\frac{dm}{dV}=\frac{dm}{dx\,dy\,dz} \quad \Rightarrow \quad dm=\rho\cdot dV=\rho(x, y, z)\cdot dx\,dy\,dz$$

Se vogliamo conoscere la massa totale m del solido di volume V dobbiamo effettuare una integrazione su tutto il volume V. Otteniamo: $m=\iiint_V dm=\iiint_V \rho\cdot dV=\iiint_V \rho(x, y, z)\cdot dx\,dy\,dz$

Se la massa volumica del solido è costante, cioè la massa è distribuita uniformemente, $\rho=$costante abbiamo:

$$m=\iiint_V dm=\rho\cdot\iiint_V dV=\rho\cdot\iiint_V dx\,dy\,dz=\rho\cdot V \qquad \rho=\frac{m}{V}$$



Se il solido si riduce ad una superficie gobba S abbiamo:

$$dm=\rho(x, y, z)\cdot dS \quad \Rightarrow \quad m=\iint_S \rho(x, y, z)\cdot dS \qquad dS=dx\,dy$$

cioè la massa viene calcolato mediante un integrale di superficie.

Se il solido si riduce ad una superficie piana abbiamo, ad esempio nel piano Oxy abbiamo:

Determinazione di masse, baricentri e momenti di inerzia

$$d\,m=\rho\cdot d\,S=\rho(x,y)\cdot dx\,dy \qquad m=\iint_S \rho(x,y)\cdot d\,S=\iint_D \rho(x,y)\cdot dx\,dy$$

Se il solido si riduce ad una linea sghemba di lunghezza ℓ abbiamo:

$$d\,m=\rho(x,y,z)\cdot d\,\ell \quad \Rightarrow \quad m=\int_\ell \rho(x,y,z)\cdot d\,\ell$$

cioè il calcolo della massa si effettua mediante un integrale di linea. Per linee piane abbiamo:

$$d\,m=\rho(x,y)\cdot d\,\ell \quad \Rightarrow \quad m=\int_\ell \rho(x,y)\cdot d\,\ell$$

Calcolo del baricentro G di un corpo

Il **baricentro** di un corpo è il punto dove è applicata la sua forza peso. Nel **baricentro** $G(x_G,y_G,y_G)$ possiamo pensare concentrata tutta la massa m del corpo. Risulta:

$$x_G=\frac{\iiint_V x\cdot\rho(x,y,z)\cdot d\,V}{m}=\frac{\iiint_V x\cdot\rho(x,y,z)\cdot d\,V}{\iiint_V \rho(x,y,z)\cdot d\,V} \qquad y_G=\frac{\iiint_V y\cdot\rho(x,y,z)\cdot d\,V}{m}=\frac{\iiint_V y\cdot\rho(x,y,z)\cdot d\,V}{\iiint_V \rho(x,y,z)\cdot d\,V}$$

$$z_G=\frac{\iiint_V z\cdot\rho(x,y,z)\cdot d\,V}{m}=\frac{\iiint_V x\cdot\rho(x,y,z)\cdot d\,V}{\iiint_V \rho(x,y,z)\cdot d\,V}$$

Le coordinate del **baricentro** di un corpo bidimensionale non piano si ottengono dalle precedenti formule sostituendo gli integrali di volume con gli integrali di superficie:

$$x_G=\frac{\iint_S x\cdot\rho(x,y,z)\cdot d\,S}{m}=\frac{\iint_S x\cdot\rho(x,y,z)\cdot d\,S}{\iint_S \rho(x,y,z)\cdot d\,S} \qquad y_G=\frac{\iint_S y\cdot\rho(x,y,z)\cdot d\,S}{m}=\frac{\iint_S y\cdot\rho(x,y,z)\cdot d\,S}{\iint_S \rho(x,y,z)\cdot d\,S}$$

$$z_G=\frac{\iint_S z\cdot\rho(x,y,z)\cdot d\,S}{m}=\frac{\iint_S z\cdot\rho(x,y,z)\cdot d\,S}{\iint_S \rho(x,y,z)\cdot d\,S}$$

Per una superficie piana, giacente ad esempio nel piano Oxy abbiamo:

$$x_G = \frac{\iint_S x \cdot \rho(x,y) \cdot dx\,dy}{m} = \frac{\iint_S x \cdot \rho(x,y) \cdot dx\,dy}{\iint_S \rho(x,y) \cdot dx\,dy} \qquad y_G = \frac{\iint_S y \cdot \rho(x,y) \cdot dx\,dy}{m} = \frac{\iint_S y \cdot \rho(x,y) \cdot dx\,dy}{\iint_S \rho(x,y) \cdot dx\,dy}$$

Per una linea sghemba abbiamo:

$$x_G = \frac{\int_\ell x \cdot \rho(x,y,z) \cdot d\,\ell}{m} = \frac{\int_\ell x \cdot \rho(x,y,z) \cdot d\,\ell}{\int_\ell d\,\ell} \qquad y_G = \frac{\int_\ell y \cdot \rho(x,y,z) \cdot d\,\ell}{m} = \frac{\int_\ell y \cdot \rho(x,y,z) \cdot d\,\ell}{\int_\ell d\,\ell}$$

$$z_G = \frac{\int_\ell z \cdot \rho(x,y,z) \cdot d\,\ell}{m} = \frac{\int_\ell z \cdot \rho(x,y,z) \cdot d\,\ell}{\int_\ell d\,\ell}$$

Per una linea piana ad esempio nel piano Oxy abbiamo:

$$x_G = \frac{\int_\ell x \cdot \rho(x,y) \cdot d\,\ell}{m} = \frac{\int_\ell x \cdot \rho(x,y) \cdot d\,\ell}{\int_\ell \rho(x,y) \cdot d\,\ell} \qquad y_G = \frac{\int_\ell y \cdot \rho(x,y) \cdot d\,\ell}{m} = \frac{\int_\ell y \cdot \rho(x,y) \cdot d\,\ell}{\int_\ell \rho(x,y) \cdot d\,\ell}$$

Se il corpo è omogeneo ha massa volumica (densità) costante $\rho = \frac{m}{V}$ e può essere portata fuori dal simbolo di integrale.

Per un corpo solido abbiamo: $$x_G = \frac{\iiint_V x \cdot dV}{V} = \frac{\iiint_V x \cdot dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz}$$

$$y_G = \frac{\iiint_V y \cdot dV}{V} = \frac{\iiint_V y \cdot dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz} \qquad z_G = \frac{\iiint_V z \cdot dV}{V} = \frac{\iiint_V x \cdot dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz}$$

Per una superficie gobba abbiamo:

$$x_G = \frac{\iint_S x \cdot d\,S}{S} = \frac{\iint_S x \cdot dx\,dy}{\iint_S dx\,dy} \qquad y_G = \frac{\iint_S y \cdot d\,S}{S} = \frac{\iint_S y \cdot dx\,dy}{\iint_S dx\,dy} \qquad z_G = \frac{\iint_S z \cdot d\,S}{S} = \frac{\iint_S z \cdot dx\,dy}{\iint_S dx\,dy}$$

Per una linea sghemba abbiamo:

$$x_G = \frac{\int_\ell x \cdot d\ell}{\ell} = \frac{\int_\ell x \cdot d\ell}{\int_\ell d\ell} \qquad y_G = \frac{\int_\ell y \cdot d\ell}{\ell} = \frac{\int_\ell y \cdot d\ell}{\int_\ell d\ell} \qquad z_G = \frac{\int_\ell z \cdot d\ell}{\ell} = \frac{\int_\ell z \cdot d\ell}{\int_\ell d\ell}$$

Per una linea piana ad esempio nel piano Oxy abbiamo:

$$x_G = \frac{\int_\ell x \cdot d\ell}{\ell} = \frac{\int_\ell x \cdot d\ell}{\int_\ell d\ell} \qquad y_G = \frac{\int_\ell y \cdot d\ell}{\ell} = \frac{\int_\ell y \cdot d\ell}{\int_\ell d\ell}$$

Le coordinate del **baricentro** di una linea piana o di una superficie piana possono essere calcolate utilizzando uno dei due teoremi di Guldino Pappo.

- Coordinate del **baricentro di un arco di curva piana**.

Primo teorema di Pappo Guldino: Se un arco di curva piana ruota attorno ad una retta del suo piano che non l'attraversa, l'area della superficie generata dall'arco è uguale al prodotto della lunghezza dell'arco per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo **baricentro**.

Per determinare le coordinate del **baricentro** di un arco di curva γ lungo ℓ basta considerare le superfici di rotazione, una volta intorno all'asse x (per avere y_G) ed una volta intorno all'asse y (per avere y_G).

$$S_y = 2\pi \cdot y_G \cdot \ell \quad \Rightarrow \quad y_G = \frac{S_y}{2\pi\,\ell} \qquad S_x = 2\pi \cdot x_G \cdot \ell \quad \Rightarrow \quad x_G = \frac{S_x}{2\pi\,\ell}$$

- Coordinate del **baricentro di un dominio piano**.

Secondo teorema di Pappo Guldino: Se una superficie piana ruota attorno ad una retta del suo piano la quale non l'attraversa, il volume generato è uguale al prodotto dell'area della superficie per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo **baricentro**.

Determinazione di masse, baricentri e momenti di inerzia

Per determinare le coordinate del **baricentro** di un dominio piano A di area S basta considerare i volumi di rotazione, una volta intorno all'asse x (per avere y_G) ed una volta intorno all'asse y (per avere y_G). $V_y = 2\pi \cdot y_G \cdot S \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_G = \dfrac{V_y}{2\pi S}} \qquad V_x = 2\pi \cdot x_G \cdot S \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_G = \dfrac{V_x}{2\pi S}}$

Momenti di inerzia

Nello studio delle rotazioni rigide il momento d'inerzia assume un ruolo fondamentale, analogo a quello della massa nella legge fondamentale di Newton: a parità di momento applicato un corpo assume un'accelerazione angolare maggiore o minore a seconda del valore del momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione. C'è però una profonda differenza nel paragone tra il ruolo della massa e del momento d'inerzia. Mentre possiamo associare ad ogni corpo una certa massa, non ha senso parlare di momento d'inerzia di un corpo di determinata forma e data massa, ma bisogna specificare l'asse di rotazione a cui si fa riferimento.

Definizione: Il **momento d'inerzia** di un punto materiale di massa m rispetto ad un asse è uguale al prodotto della massa per il quadrato della sua distanza dall'asse.

$\mathcal{J}_r = m \cdot r^2$ = **momento d'inerzia** della massa m rispetto ad una retta

$\mathcal{J}_x = m \cdot \left(y^2 + z^2\right)$ = **momento d'inerzia** della massa m rispetto all'asse x

$\mathcal{J}_y = m \cdot \left(x^2 + z^2\right)$ = **momento d'inerzia** della massa m rispetto all'asse y

$\mathcal{J}_z = m \cdot \left(x^2 + y^2\right)$ = **momento d'inerzia** della massa m rispetto all'asse z

Consideriamo un corpo di massa m, volume V e massa volumica $\rho = \rho(x, y, z)$

Il **momento d'inerzia** del corpo rispetto a ciascun asse del riferimento $Oxyz$ è rispettivamente:

$$\mathcal{J}_x = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right) \cdot \rho \cdot dV = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right) \cdot \rho \cdot dx\, dy\, dz$$

$$\mathcal{J}_y = \iiint_V \left(x^2 + z^2\right) \cdot \rho \cdot dV = \iiint_V \left(x^2 + z^2\right) \cdot \rho \cdot dx\, dy\, dz$$

$$\mathcal{J}_z = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho \cdot dV = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho \cdot dx\, dy\, dz$$

Il **momento d'inerzia** del corpo rispetto all'origine degli assi cartesiani $Oxyz$ è:

$$\mathcal{J} = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \rho \cdot dV = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \rho \cdot dx\, dy\, dz$$

Per una superficie sghemba tale formule diventa:

$$\mathcal{J} = \iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \rho\left(x, y, z\right) \cdot dS = \iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \rho\left(x, y, z\right) \cdot dx\, dy$$

Per una superficie piana, ad esempio nel piano Oxy, tale formule diventa:

$$\mathcal{J} = \iint_S \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho\left(x, y\right) \cdot dS = \iint_S \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho\left(x, y\right) \cdot dx\, dy$$

Per una linea sghemba tale formule diventa: $\mathcal{J} = \int_\ell \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \rho\left(x, y, z\right) \cdot d\ell$

Per una linea piana, ad esempio nel piano Oxy, tale formule diventa: $\mathcal{J} = \int_\ell \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho\left(x, y\right) \cdot d\ell$

I momenti d'inerzia rispetto ai piani coordinati sono:

$$M_{xy} = \iiint_V z \cdot \rho\left(x, y, z\right) \cdot dx\, dy\, dz \qquad M_{xz} = \iiint_V y \cdot \rho\left(x, y, z\right) \cdot dx\, dy\, dz \qquad M_{yz} = \iiint_V x \cdot \rho\left(x, y, z\right) \cdot dx\, dy\, dz$$