

Unità Didattica N°01**Gli insiemi e le inequazioni algebriche**

- 01)** Il concetto d'insieme ed i primi elementi di logica matematica.....
- 02)** La rappresentazione di un insieme
- 03)** Sottoinsieme di un insieme
- 04)** Intersezione di due o più insiemi
- 05)** Unione di due o più insiemi
- 06)** Differenza di due insiemi
- 07)** Insieme delle parti
- 08)** Partizione di un insieme
- 09)** Prodotto cartesiano di insiemi
- 10)** Simbolismo di particolari insiemi numerici
- 11)** I concetti di costante e variabile
- 12)** Concetto di intervallo
- 13)** Concetto di intorno
- 13)** Altri elementi di logica matematica
- 14)** Inequazioni algebriche

Il concetto di insieme ed i primi elementi di logica matematica

• I concetti di **insieme** e di **elemento di un insieme** sono **concetti primitivi**, cioè non definibili mediante altri concetti più semplici. Il termine **insieme** è sinonimo di collezione, raccolta, aggregato. Cantor scrisse: << **Un insieme è una collezione di oggetti determinati e distinti, facenti parte del mondo della nostra intuizione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico; tali oggetti si dicono elementi dell'insieme**>>.

Questa, però, non è la definizione di insieme ma è soltanto la sua descrizione in quanto non è stato definito il significato di collezione mediante nozioni più semplici. Un insieme esiste come ente matematico quando è possibile stabilire se un dato oggetto è o non è elemento dell'insieme.

Gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino: **A, B, C, D, E, F, G, ...**

Gli **elementi di un insieme** si indicano con le lettere minuscole dell'alfabeto latino:

x, y, a, b, c..

Di solito noi avremo a che fare con uno dei seguenti insiemi numerici:

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ = insieme dei **numeri naturali**

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ = insieme dei **numeri interi relativi**

Q = insieme dei **numeri razionali** , R = insieme dei **numeri reali**

C = insieme dei **numeri complessi**

Se **G** é un insieme, con la scrittura $x \in G$ (si legge: **x appartiene** a G, oppure, **x è un elemento dell'insieme G**) si indica che x è uno degli elementi che costituiscono l'insieme **G**.

Il segno $\in$ è detto **simbolo di appartenenza**. Il simbolo $\notin$ è la negazione della relazione di appartenenza. Con la scrittura $x \notin G$ (si legge: x non appartiene a G) si vuole significare che

l'elemento x non fa parte dell'insieme G. Esempi: $2 \in N$, $\frac{1}{4} \notin N$. Il **principio di**

estensione degli insiemi consiste nell'affermare che un insieme è individuato dai suoi elementi.

Se **E** ed **F** sono simboli di insiemi, scriveremo $E = F$ se gli elementi che costituiscono l'insieme rappresentato dal simbolo **E** sono gli stessi che costituiscono l'insieme rappresentato dal simbolo **F**.

Il **principio di estensione** fornisce un criterio per individuare un insieme.

La negazione dell'uguaglianza $E=F$ si indica con la notazione $E \neq F$. Essa significa che esiste almeno un elemento appartenente ad uno dei due insiemi che non appartiene all'altro.

E' opportuno osservare che esiste una sola **copia** di ogni ente denominato insieme, per cui, quando si individua un insieme mediante i suoi elementi si scrive, di solito, una sola volta il simbolo di ogni suo elemento.

L'insieme delle lettere che compaiono nella parola **tutto** coincide con l'analogo insieme relativo alla parola **tuo** ed è costituito dagli elementi **o, t, u**, è cioè l'insieme $\{o, t, u\}$. In altri termini, gli insiemi sono **aggregati caotici** di elementi.

L'esempio precedente mostra come si possa assegnare un insieme costituito da un numero finito di elementi semplicemente mediante un elenco di tali elementi inseriti in un ordine qualunque.

- La necessità di considerare insiemi aventi infiniti elementi indusse **Cantor** all'idea di introdurre le **proprietà** (o **predicati**). La **proprietà** di un ente è tutto ciò per cui ciascun ente si distingue dagli altri. Ad esempio, $\langle\langle x \text{ è un libro} \rangle\rangle$ è una **proprietà** in quanto fissato l'elemento x possiamo stabilire se esso è o non è un libro. Si dirà che x è una **variabile** e la **proprietà** sarà indicata con $P(x)$. Una **proprietà** può contenere più variabili. L'idea di **Cantor** è la seguente:

(principio di astrazione): assegnata la proprietà $P(x)$ contenente la sola variabile **x**, esiste l'insieme **A** costituito dagli elementi **x** per i quali la proprietà $P(x)$ è vera. In simboli abbiamo:

$$A = \{x | P(x)\} \text{ e si legge: } A \text{ è l'insieme degli elementi } x \text{ per i quali è vera la proprietà } P(x).$$

Ci accorgiamo subito che in tal modo viene ammessa l'esistenza di un insieme $\emptyset$, privo di elementi, detto **insieme vuoto**. Esso si ottiene quando si considera una proprietà $P(x)$ falsa per ogni **x**, ad esempio la proprietà $x \neq x$.

$$\emptyset = \{x : x \neq x\} = \{\}$$

$P(x)$ è detta anche **funzione proposizionale** o **funzione enunciativa in una variabile**.

Una proprietà $P(x)$ si dice **definita nell'insieme U** se per ogni elemento di **U** è possibile stabilire se $P(x)$ è vera o falsa. L'insieme **U** è detto **insieme universo** o **insieme ambiente** o **insieme totale**. Diciamo **insieme verità** della funzione enunciativa $P(x)$

l'insieme **A** formato dagli elementi $x \in U$ per i quali risulta vera la proprietà $P(x)$. Ogni qualvolta un insieme viene determinato mediante una proprietà caratteristica dei suoi elementi, bisogna

specificare l'insieme U (**insieme universo** o **insieme ambiente** o **insieme totale**) da cui prelevare gli elementi che costituiscono l'insieme. Quando non vi è possibilità di equivoci, l'insieme ambiente può essere trascurato.

Se U è l'insieme universo e $P(x)$ la **proprietà caratteristica** che individua l'insieme A , scriviamo:

$$A = \{x | P(x) \wedge x \in U\}$$

e leggiamo: << **A è l'insieme formato dagli elementi x prelevati dall'insieme U per i quali risulta vera la proprietà caratteristica $P(x)$** >>.

$A = \{x : x = 2n \wedge x \in N\}$ rappresenta l'insieme dei **numeri pari**.

- Le frasi **qualunque sia** oppure **per ogni** ed equivalenti si esprimono col simbolo $\forall$ detto **quantificatore universale**. Così la scrittura $\forall x \in A$ si legge: <<per ogni elemento x appartenente all'insieme A >> oppure <<qualunque sia l'elemento x appartenente all'insieme A >>. Analogamente la scrittura $\forall x, y \in A$ si legge: <<qualunque siano gli elementi x ed y appartenenti all'insieme A >>.

- Spesso la frase << **tale che** >> si indica con uno dei seguenti simboli $\mid$ oppure $:$
- Le frasi <<**esiste almeno un**>> ed equivalenti si indicano col simbolo $\exists$ detto **quantificatore esistenziale**. Così la scrittura $\exists x \in A$ si legge <<**esiste almeno un elemento x appartenente all'insieme A** >>. La frase <<**esiste ed è unico**>> viene indicata col simbolo $\exists^*$. Ad esempio la scrittura $\exists^* x \in N : x + 2 = 8$ si legge << **esiste ed è unico** il numero x tale che $x + 2 = 8$ >>. Il numero in questione è il numero 6. La scrittura $\exists x \in A : (\exists x \in A \mid)$ si legge: << **esiste almeno un elemento x appartenente all'insieme A tale che**>>.

Due importanti **connettivi logici** che compongono due proposizioni sono:

- e** (sarebbe l'**et** latino) con cui si forma la proposizione p e q (p et q) che viene indicata col simbolo $p \wedge q$
- o** con cui si forma la proposizione p o q che viene indicata col simbolo $p \vee q$
- Molte grammatiche definiscono la **proposizione** come << un giudizio della mente espresso con parole >>. La **logica matematica** respinge questa definizione in quanto essa ammette come già noto

il significato del termine **giudizio**. Per la logica matematica **proposizione** è una combinazione di parole o di simboli a cui compete uno solo dei seguenti attributi: <<vero>> o <<falso>>.

Tali attributi saranno simbolicamente indicati con le lettere **V**, **F**. <<Roma è una città bella>> non rappresenta una **proposizione** in quanto non possiamo stabilire se la circostanza è vera o falsa. Rappresenteremo le nostre proposizioni mediante lettere, ad esempio **p**, **q**,... . La terra è un pianeta è una **proposizione vera**, la luna è una stella è una **proposizione falsa**.

Quando una **proposizione q** è la conseguenza di una **proposizione p** si dice che **p** implica **q** e si scrive: $p \Rightarrow q$ (**p** implica **q**). Questa scrittura vuole dire che << se è vera la proposizione **p** è vera anche la proposizione **q** >>: **p** dicesi **premessa** o **ipotesi**, **q** conseguenza o **tesi**.

In matematica ogni teorema del tipo: << **p** è condizione sufficiente per **q** >> oppure, ed è la stessa cosa, << **q** è condizione necessaria per **p** >> si può esprimere semplicemente scrivendo:

$p \Rightarrow q$, cioè ogni **teorema** avente **p** come **ipotesi** e **q** come **tesi** si esprime dicendo che **p** è **condizione sufficiente** per **q**, mentre **q** è **condizione necessaria** per **p**.

Quando l'implicazione $p \Rightarrow q$ è vera si dice che è un **TEOREMA**, **p** si chiama **ipotesi**, **q** **tesi**.

Quindi, in ogni teorema la verità dell'ipotesi è **condizione sufficiente** per la verità della tesi, mentre la verità della tesi è **condizione necessaria** (ma in generale non sufficiente) per la verità dell'ipotesi; cioè **una condizione sufficiente va posta come ipotesi, una condizione necessaria come tesi**. Il segno $\Rightarrow$ rappresenta il simbolo di **implicazione logica**. Il simbolo $\nRightarrow$ si legge <<**non implica**>>. Se è vera l'implicazione $p \Rightarrow q$ non è detto che debba risultare vera l'implicazione inversa $q \Rightarrow p$.

Esempio: Paolo è torinese $\Rightarrow$ Paolo è italiano, mentre Paolo è italiano $\nRightarrow$ Paolo è torinese.

Se **p** e **q** sono due proposizioni per le quali risulta contemporaneamente $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ allora diremo che le proposizioni **p** e **q** sono **equivalenti** e scriviamo: $p \Leftrightarrow q$ e leggiamo:

<< **p equivale logicamente a q** >> oppure più semplicemente <<**p equivale a q**>> oppure <<**p coimplica q**>>.

$\Leftrightarrow$ **simbolo di equivalenza logica** o di **doppia implicazione** o di **coimplicazione**

si legge: << *equivale logicamente* oppure **coimplica** >> $\nRightarrow$ non equivale a

In matematica, ogni teorema del tipo <<**p è condizione necessaria e sufficiente perché valga q**>> si può esprimere semplicemente scrivendo: $p \Leftrightarrow q$

La coesistenza di un teorema e del suo inverso determina le cosiddette **condizioni necessarie e sufficienti**. Precisamente una **condizione C**, rispetto ad una proprietà **P** si dice che è:

1) necessaria quando considerando **P** come ipotesi si deduce **C** come tesi

2) sufficiente quando considerando **C** come ipotesi si deduce **P** come tesi

OSSERVAZIONI

- Un insieme si dice **astratto** quando non è precisata la natura degli elementi che lo costituiscono. Un insieme si dice **numerico** quando i suoi elementi sono numeri

- Il simbolo di appartenenza $\in$ fu introdotto da **Giuseppe Peano** e si chiama pertanto **simbolo di Peano**

- Diremo che un insieme A è **finito** se esiste un numero naturale n tale che ad A appartengono n elementi, cioè quando non può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme. Diremo invece che A è **infinito** se, qualunque sia il numero naturale n, all'insieme appartengono più di n elementi, cioè un insieme è **infinito** se può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

- L'insieme formato da un solo elemento si dice un **singolo** e si indica col simbolo $\{a\}$. Risulta sempre $\{a\} \neq a$. L'insieme formato da due elementi si dice un **paio** e si indica col simbolo $\{a, b\}$. L'insieme privo di elementi si dice **insieme vuoto** e si indica con $\emptyset = \{\}$

In particolare risulta: $\{\emptyset\} \neq \emptyset$

- L'ordine secondo cui sono elencati gli elementi di un insieme non ha importanza, cioè gli insiemi $\{a, b, c\}$ e $\{b, a, c\}$ rappresentano lo stesso insieme.

La rappresentazione di un insieme

Un insieme può essere rappresentato in diverse maniere:

1) Rappresentazione tabulare

Si elencano gli elementi che costituiscono l'insieme; essi vengono racchiusi fra due parentesi graffe.

Si ha così la **rappresentazione tabulare** (o per **elencazione** o **analitica** o in **estensione**) dell'insieme. Esempi: $A = \{a, e, i, o, u\}$ $B = \{1, 3, 8, 17, 25\}$

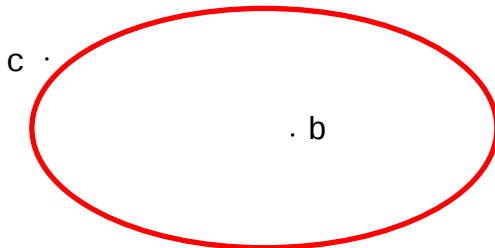
2) Rappresentazione caratteristica

Si possono definire gli elementi dell'insieme con una **proprietà** che permette di ricavarli senza ambiguità. Basta enunciare tale proprietà: si ha la **rappresentazione caratteristica** (o *sintetica* dell'insieme). $A = \{x: P(x) \wedge x \in I\}$ $A = \{x: x < 8 \wedge x \in N\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Si legge: **A** è l'insieme i cui elementi sono numeri naturali minori di 8, oppure: **A** è l'insieme degli elementi x appartenenti all'insieme dei numeri naturali tali che siano minore del numero 8.

3) Rappresentazione grafica

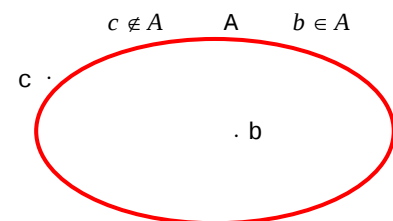
$c \notin A$ A $b \in A$



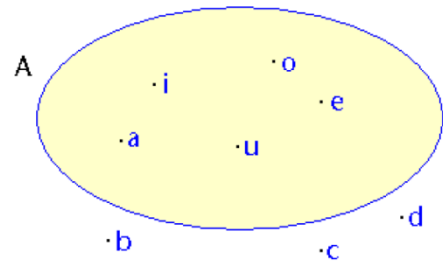
Per rendere suggestiva la considerazione di un insieme astratto A si usa dare una **rappresentazione grafica** mediante curve piane chiuse prive di nodi, limitanti delle superfici sulle quali sono rappresentate i punti che individuano gli elementi dei vari insiemi. *Il contorno non può contenere alcun elemento dell'insieme.*

Ogni punto disegnato all'interno della curva chiusa priva di nodi rappresenta un elemento dell'insieme; ogni punto disegnato esternamente rappresenta un elemento non appartenente all'insieme.

Si disegna una linea chiusa priva di nodi nella cui regione interna si immagina siano racchiusi gli elementi dell'insieme. *Il contorno non può contenere alcun elemento dell'insieme.* Ogni punto disegnato all'interno della curva chiusa priva di nodi rappresenta un elemento dell'insieme; ogni punto disegnato esternamente rappresenta un elemento non appartenente all'insieme.



Rappresentazione mediante i diagrammi di **Eulero - Venn** dell'insieme **A** delle vocali dell'alfabeto italiano. Gli elementi inseriti all'interno della linea chiusa appartengono all'insieme considerato, gli elementi lasciati fuori non appartengono all'insieme **A**.



OSSERVAZIONI

- Quando si rappresentano insiemi finiti vi sono punti interni al contorno che non rappresentano nulla (Qualche volta si tratteggia la parte di superficie priva di elementi)
- Quando si rappresentano insieme infiniti tutti i punti della superficie limitata dalla curva sono elementi dell'insieme
- Le figure che così si ottengono si dicono **diagrammi di Venn** (logico inglese 1834-1927) o **diagrammi di Eulero** (matematico svizzero 1707-1783)

Sottoinsieme di un insieme

Si dice che un insieme **A** è un **sottoinsieme proprio** dell'insieme **B** se ogni elemento di **A** è anche elemento di **B**, ma esiste almeno un elemento di **B** che non appartiene ad **A**. Questa relazione fra insiemi, detta **relazione d'inclusione stretta**, si scrive: $A \subset B$

e si legge : << **A** è sottoinsieme proprio di **B**, oppure **A** è parte propria di **B**, oppure **A** è incluso (o contenuto) propriamente (o in senso stretto) in **B**. Il simbolo $\subset$ è detto **simbolo di inclusione stretta**. Si dice anche che **B** include o contiene **A** e si scrive $B \supset A$.

Se invece **A** non è incluso in **B** si scrive : $A \not\subset B$ oppure $B \not\supset A$

$$A \subset B \Leftrightarrow \{ \forall x \in A \Rightarrow \exists x \in B \wedge : x \notin A \}$$

Dati due insiemi **A** e **B** se ogni elemento di **A** è anche elemento di **B** si dice che **A** è un **sottoinsieme** di **B** od anche che è contenuto o incluso in **B**. In questo caso scriviamo: $A \subseteq B$ e si legge: << **A** è un sottoinsieme di **B** oppure **A** è incluso in **B**>>. Il simbolo $\subseteq$ è il **simbolo di inclusione larga** nel senso che questa volta non si esclude che ogni elemento di **B** possa appartenere ad **A**. Si legge: <<L'insieme **A** è contenuto o coincide con l'insieme **B**>>. Dalla

definizione di sottoinsieme si deduce che fra i sottoinsiemi di un certo insieme **B** c'è l'**insieme vuoto** $\emptyset$ e c'è l'insieme **B**. Si abbia l'insieme $B = \{a, b, c\}$. I **sottoinsiemi** di **B** sono:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

Quando **A** è un sottoinsieme non vuoto di **B** e che non coincide con **B**, si dice che **A** è un **sottoinsieme proprio** di **B**, mentre l'insieme vuoto e l'insieme **B** si chiamano **sottoinsiemi impropri** di **B**. Il simbolo $\subset$ si legge: <<**contenuto**>>.

La relazione di **inclusione in senso largo** gode delle tre seguenti proprietà formali:

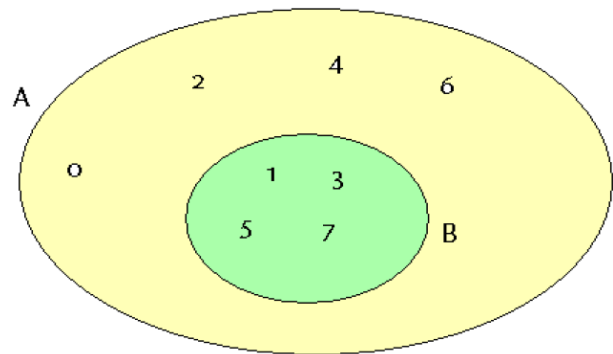
1) RIFLESSIVA: $A \subseteq A$

2) TRANSITIVA: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

3) ANTISIMMETRICA: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$

Un esempio di sottoinsieme:

Consideriamo i due seguenti insiemi: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Notiamo che ogni elemento di **B** è anche un elemento di **A**. Questo ci consente di affermare che **B** è un sottoinsieme di **A**.



In simboli scriviamo: $B \subset A$ e leggiamo “l'insieme **B** è un sottoinsieme di **A**”; oppure: $A \supset B$ e leggiamo “l'insieme **A** contiene l'insieme **B**”.

Il modo più naturale ed usato per assegnare un sottoinsieme **A** di **B** è quello di fornire una proprietà $P(x)$ che faccia inequivocabilmente decidere se un dato elemento $x \in B$ goda oppure no della proprietà $P(x)$.

In tal caso si parla di **proprietà** (o *legge*) **caratteristica** di **A** dentro **B**. Con la scrittura:

$$A = \{x \in B : P(x)\}$$

intenderemo l'insieme **A** costituito dagli elementi $x \in B$ per cui è vera la **proprietà caratteristica** $P(x)$. Se $J \subset U$, definiamo **complementare di J rispetto ad U**

l'insieme $C_U J$ costituito dagli elementi di **U** che non appartengono a **J**. In simboli abbiamo:

$$C_U J = \{x : x \in U \wedge x \notin J \wedge J \subset U\}$$

Insieme ambiente o insieme universo o insieme totale

Quando si assegna un insieme **A** mediante una **proprietà caratteristica** $P(x)$, occorre indicare l'**ambiente** dal quale estrarre gli elementi x dell'insieme. Questo ambiente dal quale preleviamo gli elementi x dell'insieme **A** è, a sua volta, un insieme denominato **insieme ambiente**, o **insieme universo** o **insieme totale** e, di solito, viene indicato col simbolo **U**. Se **U** è l'insieme universo e $P(x)$ la **proprietà caratteristica** che individua l'insieme **A**, scriviamo:

$$A = \{x | P(x) \wedge x \in U\}$$

e leggiamo: << **A** è l'insieme formato dagli elementi x prelevati dall'insieme **U** per i quali risulta vera la proprietà caratteristica $P(x)$ >>.

$A = \{x : x = 2n \wedge x \in N\}$ rappresenta l'insieme dei **numeri pari**.

- Diremo che un insieme **A** è **finito** se esiste un numero naturale n tale che ad **A** appartengono n elementi, cioè quando non può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme. Quindi, si chiamano finiti gli insiemi composti da un numero di elementi che è possibile contare fino all'esaurimento.
- L'insieme formato da un solo elemento si dice un **singolo** e si indica col simbolo $\{a\}$. L'insieme formato da due elementi si dice un **paio** e si indica col simbolo $\{a, b\}$. L'insieme privo di elementi si dice **insieme vuoto** e si indica con $\emptyset = \{\}$. Tali insiemi sono tutti insiemi finiti.
- L'ordine secondo cui sono elencati gli elementi di un insieme non ha importanza, cioè gli insiemi $\{a, b, c\}$ e $\{b, a, c\}$ rappresentano lo stesso insieme.

Diremo invece che **A** è **infinito** se, qualunque sia il numero naturale n , all'insieme appartengono più di n elementi, cioè un insieme è infinito se può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Intersezione di due o più insiemi

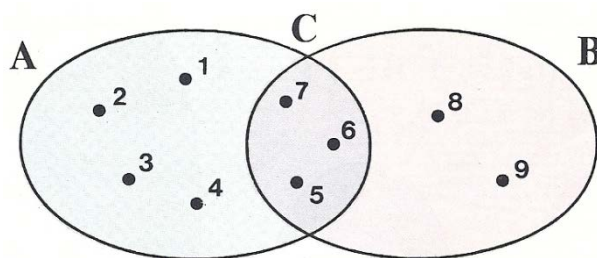
- Dati due insiemi **A** e **B**, l'insieme **C** formato dagli elementi comuni ad **A** e **B** si chiama **insieme intersezione** o **intersezione** di **A** e **B**. Scriviamo $C = A \cap B$ e leggiamo: << **C** è uguale ad **A** intersecato **B** >>. In simboli abbiamo: $C = A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

$\cap$ è il **simbolo di intersezione**

<< Dire che x appartiene all'intersezione di **A** con **B** equivale a dire che x appartiene contemporaneamente ad **A** e **B** >>.

Consideriamo ancora i seguenti insiemi:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{e} \quad B = \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$



Si ha: $A \cap B = C$, essendo $C = \{5, 6, 7\}$.

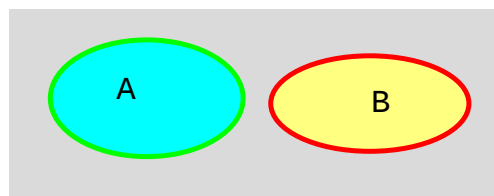
I numeri 5, 6 e 7 sono infatti comuni ai due insiemi.

Due insiemi **A** e **B** si dicono **disgiunti** se non hanno elementi in comune, cioè se $A \cap B = \emptyset$

Immagine grafica di due insiemi **disgiunti**

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \quad \text{oppure} \quad B = \emptyset$$

oppure **A** e **B** sono **insiemi disgiunti**.



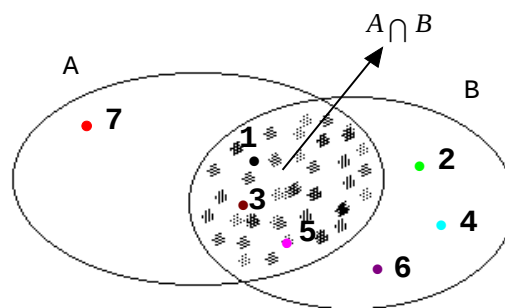
Graficamente l'insieme intersezione è rappresentato dalla parte spruzzata.

$$A = \{1, 3, 5, 7\} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$C = A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

Per convenzione si pone:

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad \emptyset \cap A = \emptyset$$



L'intersezione di due insiemi gode delle seguenti proprietà formali:

1) proprietà iterativa o di **idempotenza**

$$A \cap A = A$$

2) proprietà commutativa

$$A \cap B = B \cap A$$

3) proprietà associativa

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

La definizione di intersezione si estende anche al caso di tre o più insiemi. L'intersezione degli insiemi $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ è l'insieme C formato dagli elementi comuni a tutti gli insiemi dati -

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_k = \bigcap_{i=1}^k A_i$$

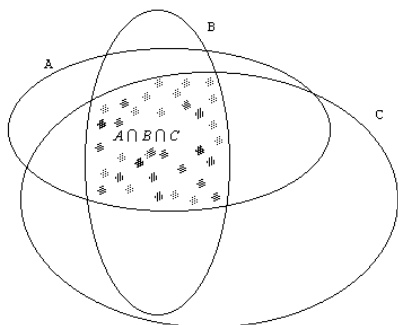


Diagramma di Eulero-Venn relativo all'intersezione di tre insiemi.

Unione di due insiemi

Definiamo **unione** di due insiemi **A** e **B** l'insieme **C** costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi, cioè dagli elementi che appartengono ad **A** o **B** o ad entrambi.

(Gli elementi comuni agli insiemi **A** e **B** vanno presi una sola volta). In simboli abbiamo:

$$C = A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$

e si legge <<**U** uguale **A** unito **B**>>. Qui il significato di **oppure** ($\vee$) non ha valore esclusivo, cioè il significato di $\vee$ è quello di **vel** latino e non di aut. Quindi un elemento appartiene all'unione se:

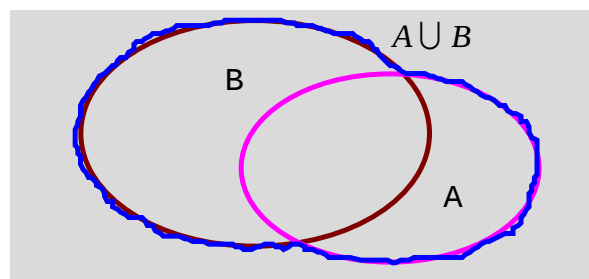
1) appartiene ad **A** **2)** oppure appartiene a **B** **3)** oppure appartiene ad entrambi gli insiemi.

$\cup$ è il **simbolo di unione**.

$$A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{2, 3, 4, 7\}, B = \{5, 9\} \Rightarrow C = A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

La parte di piano delimitata dal contorno azzurro a tratto pieno rappresenta $A \cup B$



Per l'unione di due insiemi valgono le seguenti **proprietà formali**:

- 1) $A \cup A = A$ idempotenza
- 2) $A \cup B = B \cup A$ commutativa
- 3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ associativa
- 4) $A \cup \emptyset = A$ $\emptyset$ è l'**elemento neutro**

Si dice unione di più insiemi **A, B, C, D,...** l'insieme **X** formato dagli elementi appartenenti ad uno almeno di tali insiemi.

$$X = A \cup B \cup C \cup D \dots$$

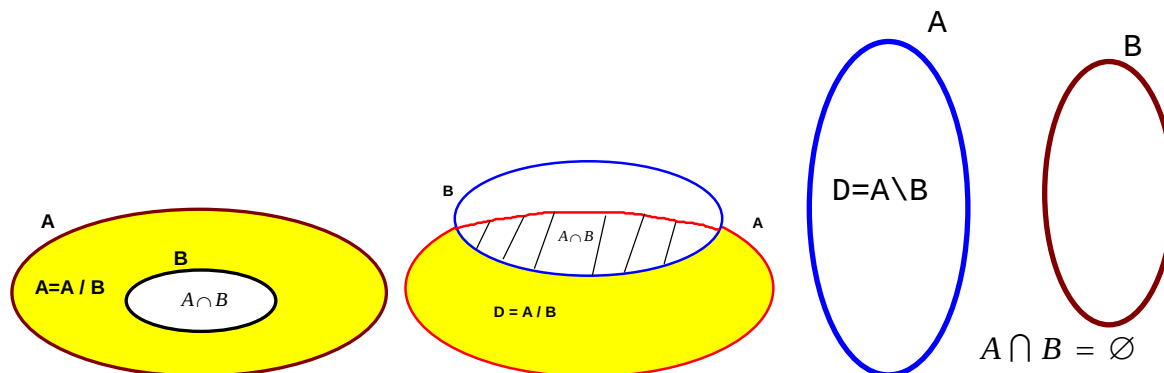
Differenza di due insiemi

Si dice **differenza** di due insiemi **A** e **B** (in questo ordine) l'insieme **D** costituito dagli elementi dell'insieme **A** che non appartengono all'insieme **B**. In simboli abbiamo:

$$D = A \setminus B = A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

e si legge <<**D uguale A meno B**>>

I seguenti **diagrammi di Eulero-Venn** visualizzano la situazione nei vari casi. La differenza è rappresentata dalla parte di piano riempita con lo spruzzo.



$\forall A$ risulta : $A - \emptyset = A$, $A - A = \emptyset$, $A - B \neq B - A$

Se in particolare risulta $A \subset B$ allora l'insieme differenza $D = A \setminus B$ si dice il **complementare di B rispetto ad A**, si scrive $C_A B$ (vedere **primo diagramma di Eulero-Venn**) e si indica con

$$C_A B = A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

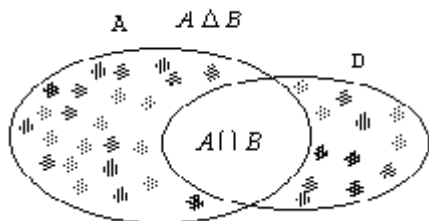
e si legge: << **differenza complementare di B rispetto ad A**>>

Osservazione: Le operazioni di intersezione e di unione corrispondono, volendo fare una analogia con le operazioni aritmetiche, al prodotto ed alla somma.

Si definisce **differenza simmetrica** di due insiemi **A** e **B** l'insieme i cui elementi sono quelli non comuni ad **A** e **B**. In simboli abbiamo:

$$A \Delta B = \{x : x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A \cap B\} = (A - B) \cup (B - A)$$

e si legge : << **differenza simmetrica fra gli insiemi A e B**>>



La **differenza simmetrica** con i **diagrammi di Eulero-Venn**. La parte di piano macchiata rappresenta la differenza simmetrica fra gli insiemi **A** e **B**

Insieme delle parti di un insieme

Si definisce **insieme delle parti** di un insieme non vuoto **A** e si indica col simbolo $P(A)$ l'insieme che ha come elementi tutti i possibili sottoinsiemi di **A**, compresi l'insieme stesso **A** e l'insieme vuoto $\emptyset$.

Dato l'insieme $A = \{a, b, c\}$, tutti i suoi possibili sottoinsiemi sono:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Si dimostra che un insieme con n elementi ha 2^n sottoinsiemi. In particolare, un insieme con 3 elementi ha $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ sottoinsiemi, come constatiamo dall'esempio precedente.

Partizione di un insieme

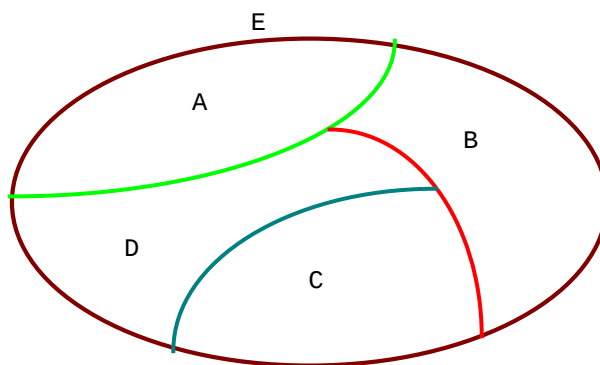
Dato un insieme **E** consideriamo i suoi sottoinsiemi **A**, **B**, **C**, **D**, che verificano le seguenti condizioni:

1) nessuno dei sottoinsiemi è vuoto **2)** due sottoinsiemi distinti sono **disgiunti**, cioè la loro intersezione è l'insieme vuoto **3)** l'unione di tali sottoinsiemi è l'insieme dato **E**. In tali condizioni si dice che i sottoinsiemi **A**, **B**, **C**, **D**, costituiscono una **partizione** dell'insieme **E**.

- L'insieme dei **numeri naturali pari** e quello dei **numeri naturali dispari** costituiscono una partizione dell'insieme dei numeri naturali.
- L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ammette come sottoinsiemi i multipli del 3 (insieme **A**), i multipli del 5 (insieme **B**), i multipli del 6 (insieme **C**), i numeri primi (insieme **D**). Tuttavia

questi sottoinsiemi (A, B, C, D) non costituiscono una partizione di N. Infatti, ad esempio, il numero 15 appartiene sia ai multipli di 3 che ai multipli di 5 ($15 \in A$, $15 \in B$) e quindi due sottoinsiemi distinti (A e B) non risultano disgiunti. Vi sono, poi, numeri come il 14, 16 ed altri che non appartengono a nessuno dei sottoinsiemi di considerati. Questo significa che l'unione dei sottoinsiemi **A, B, C, D**, non dà l'insieme N.

I sottoinsiemi **A, B, C, D**, costituiscono una **partizione** dell'insieme **E** perché sono insiemi non vuoti a due a due **disgiunti** e la loro unione è l'insieme **E**



Coppie ordinate

Siano dati due insiemi **A** e **B** non vuoti. Col simbolo (a, b) con $a \in A$, $b \in B$ indichiamo una **coppia ordinata** avente come **prima componente** (o **primo elemento**) un elemento $a \in A$ e come **seconda componente** (o **secondo elemento**) un elemento $b \in B$. Non bisogna fare confusione tra la coppia ordinata (a, b) e l'insieme $\{a, b\}$. Nella coppia ordinata (a, b) è essenziale l'ordine in cui vengono considerate le componenti, mentre nell'insieme $\{a, b\}$ l'ordine in cui si considerano gli elementi non ha importanza. Il concetto di **coppia ordinata** può essere meglio precisato stabilendo un opportuno **criterio di uguaglianza**.

Per i nostri scopi risulta necessario stabilire che due coppie ordinate (a, b) e (c, d) sono **uguali** se, e solo se, $a = c \wedge b = d$.

In particolare abbiamo $(a, b) = (b, a)$ se, e solo se, $a = b$, mentre è $(a, b) \neq (b, a)$ se $a \neq b$.

Quindi per gli insiemi risulta sempre $\{a, b\} = \{b, a\}$, per le coppie ordinate $(a, b) \neq (b, a)$ a meno che non sia $a = b$.

Prodotto cartesiano

Siano **A** e **B** due insiemi non vuoti (distinti o non). Si chiama **prodotto cartesiano** di **A** per **B** e si indica col simbolo $A \times B$ (si legge **A** cartesiano **B** oppure **A** per **B**) un nuovo insieme che ha per elementi tutte le coppie ordinate che hanno come prima componente un elemento di **A** e come seconda componente un elemento di **B**, cioè: $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$

$A \times B =$ **prodotto cartesiano di A per B**

Il prodotto cartesiano di un insieme **A** per se stesso si indicherà anche col simbolo A^2 .

Risulta pertanto: $A \times A = A^2 = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in A\}$

$$A = \{1, 3, 5\} \quad , \quad B = \{2, 4\} \quad , \quad A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$$

$$B \times A = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$$

$$A \times A = A^2 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

Dagli esempi precedenti si può concludere che il prodotto cartesiano non è commutativo, cioè in generale risulta: $A \times B \neq B \times A$ in quanto si tratta di insiemi i cui elementi sono coppie ordinate.

Si può, anzi, dimostrare che se **A** e **B** sono insiemi non vuoti, si ha: $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$

Si può dimostrare che se l'insieme **A** contiene **m** elementi e l'insieme **B** contiene **n**, allora l'insieme $A \times B$ contiene $m \cdot n$ elementi.

E' particolarmente importante il caso in cui il secondo insieme è uguale al primo $A=B$. Allora tra le coppie ordinate di $A \times B = A \times A = A^2$ ve ne sono di quelle costituite dagli stessi elementi, cioè del tipo:

$$(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_4), \dots$$

Esse costituiscono un sottoinsieme di $A \times A$ detto **sottoinsieme diagonale** di A^2 . Si conviene inoltre di porre:

$$A \times \emptyset = \emptyset \quad , \quad \emptyset \times A = \emptyset \quad , \quad \emptyset \times \emptyset = \emptyset$$

Proprietà formali del prodotto cartesiano:

1) proprietà distributiva rispetto all'intersezione:

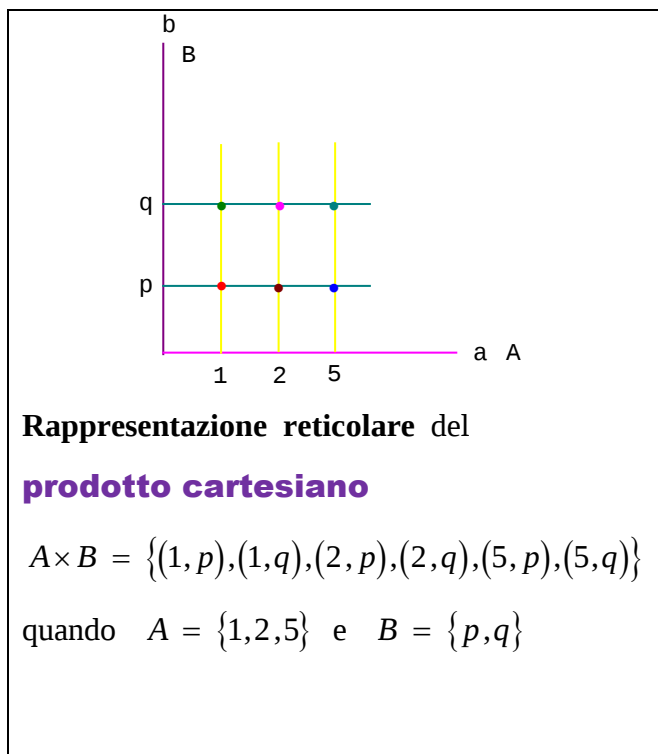
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad , \quad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

2) proprietà distributiva rispetto all'unione

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad , \quad (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

Rappresentazione reticolare di un prodotto cartesiano

Gli elementi (coppie ordinate) di un prodotto cartesiano possono essere indicati mediante i **nodi** delle maglie di un reticolo. Conviene disegnare due semirette fra loro ortogonali e con l'origine in comune, rappresentando sulla semiretta orizzontale a gli elementi dell'insieme **A** e sulla semiretta verticale b tutti gli elementi dell'insieme **B**.



$$A \times B = \{(1, p), (1, q), (2, p), (2, q), (5, p), (5, q)\}$$

quando $A = \{1, 2, 5\}$ e $B = \{p, q\}$

Le rette condotte per i punti di a che rappresentano gli elementi di **A** parallele alla semiretta b e le rette condotte per i punti di b che rappresentano gli elementi di B parallele alla semiretta a individuano dei **nodi** che rappresentano simbolicamente gli elementi del prodotto cartesiano $A \times B$.

Poiché nel prodotto cartesiano l'ordine è importante, può essere utile convenire di considerare come **primo insieme A** quello rappresentato sulla semiretta a disposta orizzontalmente ed il **secondo insieme B** sulle semiretta b disposta verticalmente.

Il prodotto cartesiano di due insiemi **A** e **B** può essere visualizzato anche mediante una tabella rettangolare, detta **tabella a doppia entrata**, nella quale:

- 1)** ogni riga è contrassegnata da una sola ascissa
- 2)** ogni ascissa contrassegna una sola riga
- 3)** ogni colonna è contrassegnata da una sola ordinata
- 4)** ogni ordinata contrassegna una sola colonna
- 5)** nell'intersezione della riga contrassegnata con $a \in A$ e della colonna contrassegnata con $b \in B$ si colloca la coppia ordinata (a, b) .

L'elemento che contrassegna una determinata riga prende il nome di **indirizzo di riga**,

l'elemento che contrassegna una determinata colonna prende il nome di **indirizzo di colonna**.

	p	q
1	(1, p)	(1, q)
2	(2, p)	(2, q)
5	(5, p)	(5, q)

Visualizzazione del **prodotto cartesiano** $A \times B$ mediante una tabella

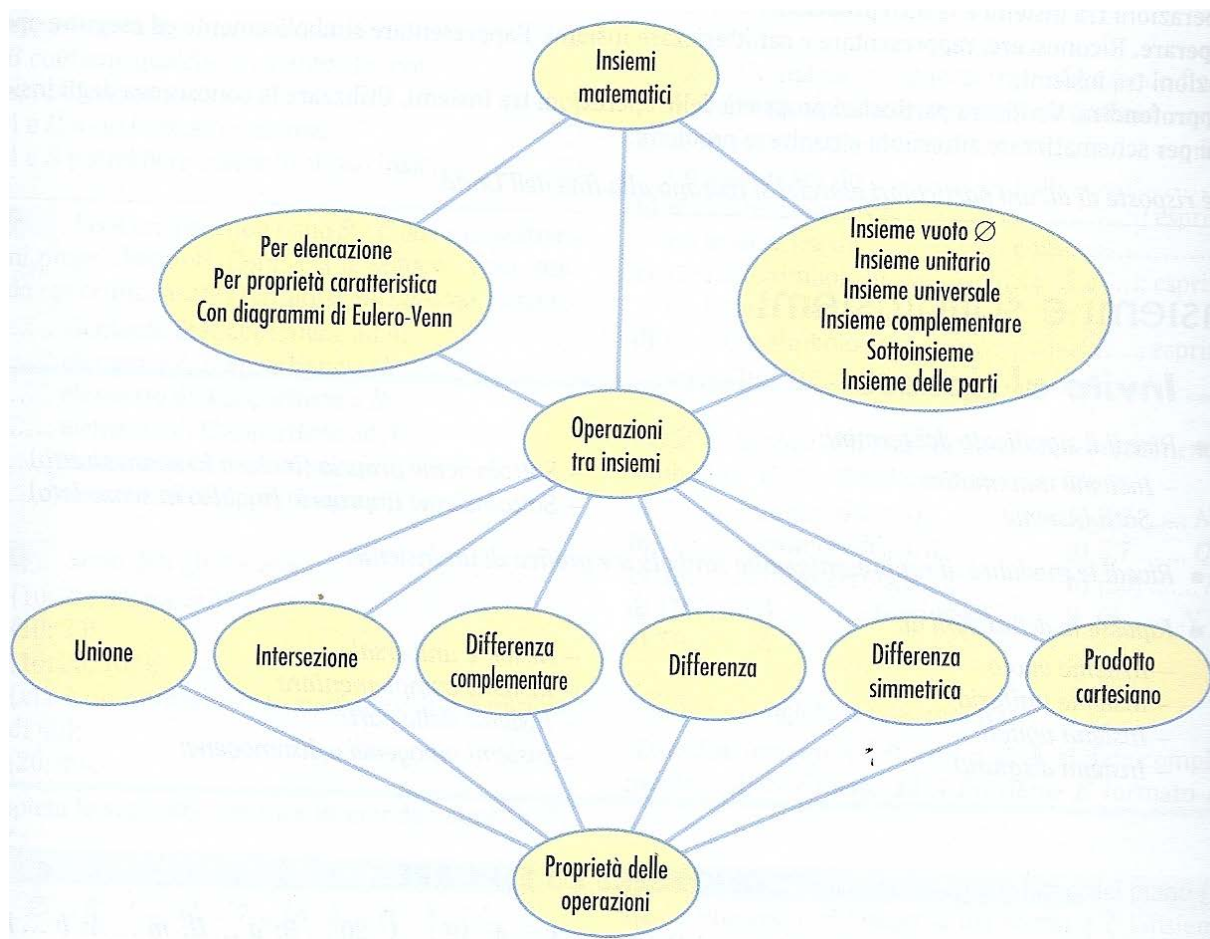
a doppia entrata quando $A = \{1, 2, 5\}$ e $B = \{p, q\}$

Prospetto riassuntivo dei simboli finora introdotti.

Simbolo di	Letture	Significato
appartenenza 	$a \in A$ a appartiene all'insieme A	significa che l'elemento a appartiene all'insieme A
non appartenenza 	$b \notin A$ b non appartiene all'insieme A	significa che l'elemento b non appartiene all'insieme A
insieme vuoto 	$A = \emptyset$ A insieme vuoto	significa che l'insieme A è privo di elementi
inclusione 	$B \subset A$ l'insieme B è incluso in A	significa che l'insieme B è un sottoinsieme di A
intersezione 	$A \cap B = C$ A intersecato B uguale a C	significa che l'insieme C è costituito dagli elementi che appartengono sia ad A , sia a B
insiemi disgiunti $A \cap B = \emptyset$ 	$A \cap B = \emptyset$ A intersecato B uguale a un insieme vuoto	significa che l'intersezione degli insiemi A e B è un insieme vuoto, cioè i due insiemi non hanno alcun elemento in comune
unione 	$A \cup B = C$ A unito B uguale a C	significa che l'insieme C ha come elementi tutti gli elementi dei due insiemi A e B e solo quelli; se A e B hanno elementi comuni, ciascuno di questi figura una sola volta in C

Che cosa?	Definito come?	Esempi
Uguaglianza tra insiemi proprietà riflessiva proprietà simmetrica proprietà transitiva	Due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi $A = A$ Se $A = B$, allora $B = A$ Se $A = B$ e $B = C$, allora $A = C$	
Sottoinsieme di un insieme Sottoinsieme proprio di un insieme	B è sottoinsieme di A ($B \subseteq A$) se A contiene tutti gli elementi di B B è un sottoinsieme proprio di A ($B \subset A$) se B è un sottoinsieme di A e A non è un sottoinsieme di B	L'insieme dei numeri pari è un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri naturali
Differenza tra insiemi Insieme complementare	La differenza tra A e B è l'insieme $A - B$ che contiene solo gli elementi di A che non appartengono anche a B Il complementare $\bar{A}$ di un insieme A contiene tutti gli elementi dell'insieme universo che non appartengono ad A	$\{1, 2, 3, 7, 9\} - \{1, 2, 3\} = \{7, 9\}$ Il complementare rispetto a $\mathcal{N}$ dell'insieme dei numeri pari è l'insieme dei numeri dispari
Unione di insiemi Proprietà commutativa Proprietà associativa	L'unione di A e B è l'insieme $A \cup B$ i cui elementi appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B $A \cup B = B \cup A$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$\{1, 2, 3\} \cup \{4, 8, 9\} = \{4, 8, 9\} \cup \{1, 2, 3\}$ $(\{1, 2, 3\} \cup \{4, 8, 9\}) \cup \{7, 9\} = \{1, 2, 3\} \cup (\{4, 8, 9\} \cup \{7, 9\})$
Intersezione di insiemi Proprietà commutativa Proprietà associativa Proprietà distributiva	L'intersezione di A e B è l'insieme $A \cap B$ i cui elementi appartengono sia ad A sia a B $A \cap B = B \cap A$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{4, 6\} = \{4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\}$ $(\{1, 4\} \cap \{2, 4\}) \cap \{4\} = \{1, 4\} \cap (\{2, 4\} \cap \{4\})$ $\{4\} \cap (\{1, 4\} \cup \{2, 4\}) = (\{4\} \cap \{1, 4\}) \cup (\{4\} \cap \{2, 4\})$
Corrispondenza biunivoca tra insiemi	Tra due insiemi A e B si può stabilire una corrispondenza biunivoca se a ogni elemento di A si può far corrispondere un solo elemento di B e a ogni elemento di B si può far corrispondere un solo elemento di A	Gli insiemi $\{1, 2, 3\}$ e $\{\text{uno}, \text{due}, \text{tre}\}$ si possono mettere in corrispondenza biunivoca facendo corrispondere (per esempio): 1. a uno 2. a due 3. a tre
Coppia ordinata Uguaglianza tra coppie ordinate	Insieme di due elementi con un ordine $(a, b) = (c, d)$ se e solo se $a = c$ e $b = d$	$(2, 3) \neq (3, 2)$ $(2, 3) = (x, y)$ se e solo se $x = 2$ e $y = 3$
Prodotto cartesiano di due insiemi	$A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con a elemento di A e b elemento di B	$\{1, 2\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

Insiemi e sottoinsiemi. Operazioni tra insiemi



Simbolismo di particolari insiemi numerici

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ insieme dei **numeri naturali**, zero compreso

$N^* = N_o = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ insieme dei **numeri naturali**, zero escluso

$Z = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ insieme dei **numeri interi** relativi, zero compreso

$Z^* = Z_o = \{\dots - 3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ insieme dei **numeri interi non nulli**

.....insieme dei **numeri interi relativi**, zero escluso

$Z^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ insieme dei **numeri interi positivi**

$Z^- = \{\dots - 5, -4, -3, -2, -1\}$ insieme dei **numeri interi negativi**

Q insieme dei **numeri razionali relativi**, zero incluso
 $Q^* = Q_0$ insieme dei **numeri razionali relativi**, zero escluso
 Q^+ insieme dei **numeri razionali relativi positivi**
 Q^- insieme dei **numeri razionali relativi negativi**
 R insieme dei **numeri reali relativi**, zero compreso
 R^+ insieme dei **numeri reali relativi positivi**
 R^- insieme dei **numeri reali relativi negativi**
 $R - Q$ insieme dei **numeri irrazionali** relativi
 C insieme dei **numeri complessi**
 Q_a insieme dei **numeri razionali assoluti**, zero compreso
 R_a insieme dei **numeri reali assoluti**, zero compreso
 $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ **insieme R ampliato**
 Quindi con **R** intendiamo l'insieme dei numeri reali finiti .

$$\begin{array}{l}
 N \subset Q^+ \subset R^+ \\
 \cap \quad \cap \quad \cap \\
 Z \subset Q \subset R \subset C
 \end{array}$$

Nei tre insieme **Q** , **R** , **C** sono illimitatamente possibili le 4 operazioni razionali (addizione , sottrazione , moltiplicazione , divisione) . Per questa notevole proprietà si dice che ciascuno dei tre insiemi numerici costituisce un **campo numerico** .

I concetti di costante e di variabile

Nello studio di determinati problemi assumono particolare importanza i concetti di **costante** e di **variabile**. Definiamo **variabile** (numerica) in un dato insieme (numerico) **A** una lettera (ad esempio **x**) o un qualsiasi altro simbolo atto a rappresentare un elemento (numero) qualsiasi dell'insieme (numerico) **A**. Definiamo **costante** (numerica) in un dato insieme (numerico) **A** una lettera (ad esempio **a**) o qualsiasi altro segno atto a rappresentare un ben determinato elemento (numero) dell'insieme (numerico) **A**. Di solito riserviamo alle costanti le prime lettere dell'**alfabeto latino** (a , b, c, d,...) ed alle variabili le ultime lettere dell'**alfabeto latino** (x, y, z, u, v,...).

In particolare parleremo di **variabile intera** se $x \in \mathbb{Z}$, di **variabile razionale** se $x \in \mathbb{Q}$, di **variabile reale** se $x \in \mathbb{R}$, di **variabile complessa** se $x \in \mathbb{C}$.

Concetto di intervallo

Detti **a** e **b** due qualsiasi numeri reali con $a < b$, definiamo **intervallo limitato**

e chiuso di estremi **a** e **b** il seguente insieme numerico: $a \text{ --- } b$

$[a, b] = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$ = **intervallo limitato e chiuso** di estremi **a** e **b**

a è detto **estremo inferiore** (o **estremo sinistro**), **b** **estremo superiore** (o **estremo destro**), $b - a$ **ampiezza dell'intervallo**, $\frac{b - a}{2}$ **raggio**

dell'intervallo, $\frac{a + b}{2}$ **centro** dell'intervallo. Un intervallo limitato e chiuso ha

la seguente immagine geometrica:



Se **a** o **b** oppure entrambi non appartengono all'intervallo, allora questi dicesi **aperto**, in particolare abbiamo:

$[a, b[= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b\}$ = **intervallo limitato, chiuso a sinistra ed aperto a destra**

$a \text{ --- } b$

$]a, b] = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\}$ = **intervallo limitato, chiuso a destra ed aperto a sinistra**

$a \text{ --- } b$

$]a, b[= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$ = **intervallo limitato aperto** $a \text{ --- } b$

L'immagine geometrica di un intervallo limitato è un segmento. Esistono anche **intervalli illimitati** per i quali **a** o **b** o entrambi assumono valore infinito.

$[a, +\infty[= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq a\}$ = **intervallo illimitato a destra** (o illimitato superiormente)

e **chiuso a sinistra** (o di estremo inferiore **a**)

$]a, +\infty[= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > a\}$ = **intervallo illimitato a destra** (o illimitato

superiormente) **ed aperto a sinistra** (o di estremo inferiore a)



$[-\infty, a] = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \leq a\}$ = **intervallo illimitato a sinistra** (o illimitato

inferiormente) **e chiuso a destra** (o di estremo superiore a)

$[-\infty, a[= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x < a\}$ = **intervallo illimitato a sinistra** (o illimitato inferiormente) **e**

aperto a destra (o di estremo superiore a)



L'immagine geometrica di uno di questi intervalli illimitati è una semiretta.

$R =]-\infty, +\infty[= \{x : x \in \mathbb{R}\}$ = **intervallo illimitato**



La sua immagine geometrica è l'intera retta



$R^+ =]0, +\infty[= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$



$R^- =]-\infty, 0[= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x < 0\}$



Concetto di intorno

■ Si definisce **intorno completo del punto** $x_0 \in \mathbb{R}$ e si denota col simbolo $I(x_0)$, un qualunque intervallo $]a, b[=]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2[$ che abbia x_0 al suo interno.

$$I(x_0) =]a, b[=]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2[\quad \forall \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$$

Per $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 = 0$ otteniamo l'**intorno sinistro**: $I^-(x_0) =]x_0 - \delta_1, x_0[\quad \forall \delta_1 \in \mathbb{R}^+$

Per $\delta_2 > 0$ e $\delta_1 = 0$ otteniamo l'**intorno destro**: $I^+(x_0) =]x_0, x_0 + \delta_2[\quad \forall \delta_2 \in \mathbb{R}^+$

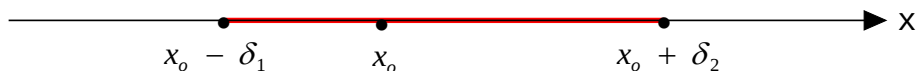


Immagine geometrica di un intorno completo

Per $\delta_1 = \delta_2 = \delta > 0$ abbiamo l'**intorno circolare di centro** x_0 e **raggio** $\delta \in \mathbb{R}^+$, o

intorno simmetrico del punto x_0 .

$$I(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} \quad \forall \delta \in \mathbb{R}^+$$

L'insieme $\mathcal{I}(x_0, \delta)$ è soluzione della inequazione $|x - x_0| < \delta \in \mathbb{R}^+$.

Quest'ultimo è il modo in cui talvolta viene indicato **un intorno circolare** di x_0 .

Se si vuole escludere dall'intorno il punto x_0 stesso, si scrive:

$$0 < |x - x_0| < \delta \in \mathbb{R}^+$$

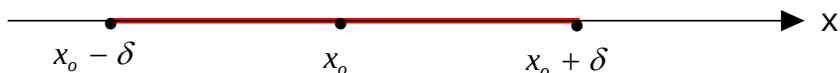


Immagine geometrica di intorno simmetrico

Dicesi **intorno di più infinito** un qualsiasi intervallo aperto a sinistra ed illimitato superiormente:

$$I(+\infty) =]h, +\infty[= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > h\} \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Dicesi **intorno di meno infinito** un qualsiasi intervallo aperto a destra ed illimitato inferiormente:

$$I(-\infty) =]-\infty, k[= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x < k\} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Definiamo **intorno di infinito** l'unione dell'intorno di $-\infty$ e dell'intorno di $+\infty$

$$I(\infty) = I(-\infty) \cup I(+\infty) =]-\infty, k[\cup]h, +\infty[\quad \forall h, k \in \mathbb{R}$$

Spesso è utile considerare il seguente **intorno simmetrico di ∞** :

$$I(\infty) = I(-\infty) \cup I(+\infty) =]-\infty, -k[\cup]k, +\infty[\quad \forall k \in \mathbb{R}^+$$

$$I(\infty) = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge |x| > k\} \quad \forall k \in \mathbb{R}^+$$

Ineguazioni razionali intere di primo grado ad una incognita

Sono inequazioni che possono essere ricondotte ad una delle seguenti forme:

$$ax > b \quad ax < b$$

Per risolvere una inequazione di primo grado ridotta a forma canonica basta dividere ambo i membri per **a**, ricordando di cambiare il senso dell'inequazione se è $a < 0$.

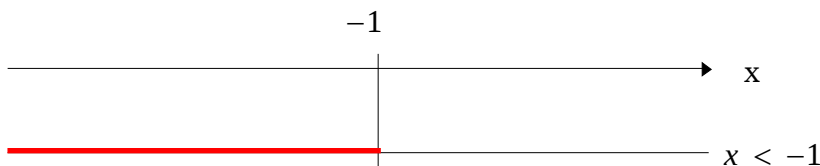
$$ax > b \Rightarrow x > \frac{b}{a} \text{ se } a > 0, \quad x < \frac{b}{a} \text{ se } a < 0$$

$$ax < b \Rightarrow x < \frac{b}{a} \text{ se } a > 0, \quad x > \frac{b}{a} \text{ se } a < 0$$

ESEMPI

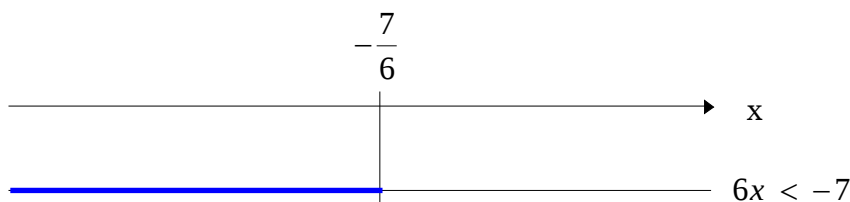
$$\frac{2-x}{4} - \frac{2+x}{2} > \frac{2x+7}{4} - \frac{2x+5}{3} \quad \text{per} \quad x < -1$$

$$6 - 3x - 12 - 6x > 6x + 21 - 8x - 20 \quad ; \quad -7x > 7 \quad , \quad 7x < -7 \quad ; \quad x < -1$$



$$(x+1)^3 + 3x + 3 < x^3 + 3(x+1)(x-1) \quad \text{per} \quad x < -\frac{7}{6}$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3x + 3 < x^3 + 3x^2 - 3 \quad , \quad 6x < -7 \quad , \quad x < -\frac{7}{6}$$



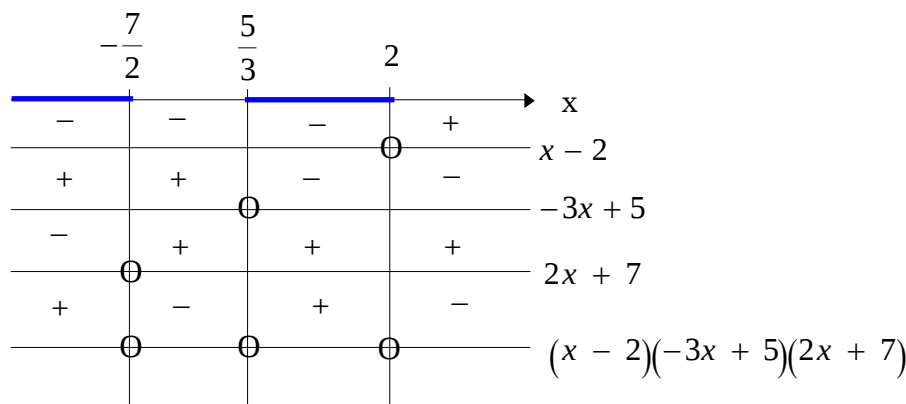
Attraverso lo studio del segno di un binomio di primo grado è possibile risolvere inequazioni di grado superiore al primo. Naturalmente il primo membro dell'inequazione ridotta a forma canonica deve essere decomposto in fattori di primo grado.

IL **segno** del binomio di primo grado $ax + b$ coincide col segno di a alla destra dello zero del binomio. Questo significa che il segno del binomio di primo grado $ax + b$ coincide col segno di a per valori della x maggiori dello zero del binomio $ax + b$.

$$-6x^3 + x^2 + 57x - 70 > 0 \quad (x-2)(-3x+5)(2x+7) > 0 \quad \text{per} \quad x < -\frac{7}{2} \quad \text{e} \quad \frac{5}{3} < x < 2$$

Si calcolano gli **zeri** dei tre fattori di primo grado e si compila il seguente prospetto.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad , \quad -3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \quad , \quad 2x + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$$



Segno di un trinomio di secondo grado ad una incognita

Consideriamo un trinomio di secondo grado nella variabile x : $T(x) = ax^2 + bx + c$ [5]

con a, b, c numeri reali relativi costanti (cioè numeri dati indipendenti da x) ed $a \neq 0$.

Col simbolo $T(\alpha)$ intendiamo il numero che si ottiene quando nella [5] al posto della x poniamo α cioè il valore numerico che assume il trinomio per $x = \alpha$.

Se poniamo: $ax^2 + bx + c = 0$ [6]

otteniamo una equazione di secondo grado in x (detta **equazione associata al trinomio**) le cui radici x_1 ed x_2 si chiamano **zeri** del trinomio. Per convenzione poniamo $x_1 < x_2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = \text{DISCRIMINANTE del trinomio} \quad [7]$$

01) $\Delta > 0$: **il trinomio ammette due zeri reali e distinti**

02) $\Delta = 0$: **il trinomio ammette due zeri reali e coincidenti**

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

03) $\Delta < 0$: **il trinomio ammette due zeri complessi e coniugati**, il trinomio non si annulla mai $\forall x \in \mathbb{R}$.

L'intervallo limitato ed aperto $]x_1, x_2[$ è detto **intervallo delle radici**.

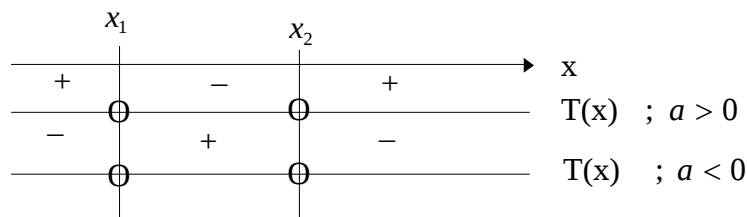
Se $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ diciamo che la variabile x assume **valori esterni all'intervallo delle radici**. Dall'algebra sappiamo che:

$$T(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad [8]$$

Studiare il segno del trinomio significa stabilire per quali valori della variabile x esso assume valori positivi, negativi, nulli. Dobbiamo distinguere tre casi:

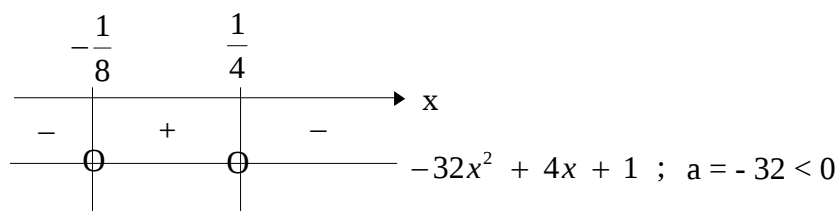
01) $\Delta > 0$ **Il trinomio assume lo stesso segno di a per valori della x esterni all'intervallo delle radici, segno opposto ad a per valori della x interni all'intervallo delle radici.**

Sinteticamente possiamo scrivere:



Studiare il segno del trinomio $T(x) = -32x^2 + 4x + 1$

L'equazione associata al trinomio è: $32x^2 - 4x - 1 = 0$, $x_1 = -\frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{1}{4}$ (zeri del trinomio)



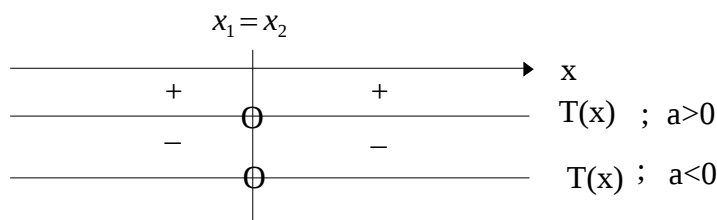
$$T(x) > 0 \quad \forall x \in \left] -\frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right[\quad \left(\text{cioè per } -\frac{1}{8} < x < \frac{1}{4} \right]$$

$$T(x) < 0 \quad \forall x \in \left] -\infty, -\frac{1}{8} \right[\cup \left] \frac{1}{4}, +\infty \right[\quad \left(\text{cioè per } x < -\frac{1}{8} \text{ ed } x > \frac{1}{4} \right]$$

$$T(x) = 0 \quad \text{per } x = -\frac{1}{8} \text{ ed } x = \frac{1}{4}$$

02) $\Delta = 0$: il trinomio assume sempre lo stesso segno di a e si annulla per $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

Quindi il segno di $T(x)$ coincide col segno di a , tranne che per $x = x_1$ in corrispondenza del quale il trinomio si annulla.

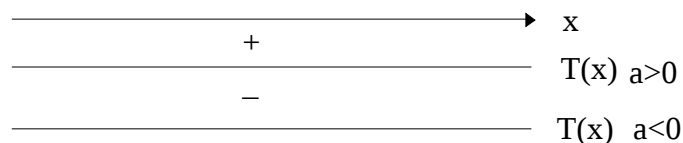


Studiare il segno del trinomio $T(x) = -4x^2 + 12x - 9 = 0$

$$\Delta = 0, a = -4 < 0, x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$$

$$T(x) > 0 \quad \forall x \in \emptyset, \quad T(x) < 0 \quad \forall x \neq \frac{3}{2}, \quad T(x) = 0 \quad \text{per } x = \frac{3}{2}$$

03) $\Delta < 0$ Il trinomio assume sempre lo stesso segno di a .



Studiare il segno del trinomio $T(x) = 4x^2 - 12x + 1$

$$\Delta < 0, \quad a > 0, \quad T(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad T(x) \leq 0 \quad \forall x \in \emptyset$$

Inequazioni razionali intere di secondo grado

Sono inequazioni riconducibili ad una delle due seguenti forme:

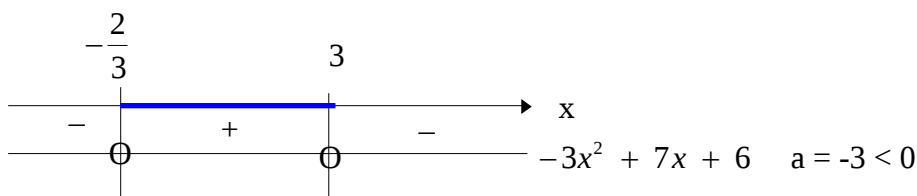
$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

Per risolvere una inequazione di secondo grado ad una incognita ridotta a forma canonica basta ricordare le proprietà del segno del trinomio.

$$-3x^2 + 7x + 6 > 0 \quad \forall x \in \left] -\frac{2}{3}, 3 \right[\quad \left(-\frac{2}{3} < x < 3 \right)$$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0, \quad x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = 3$$



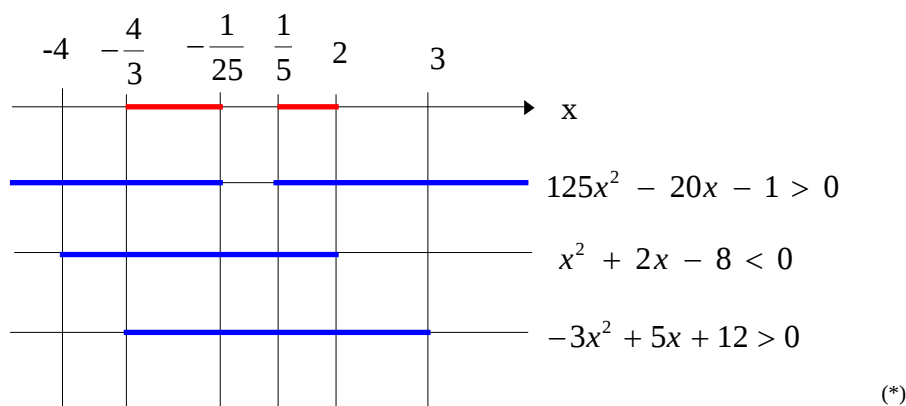
Sistemi di inequazioni in una incognita

Dicesi **sistema di inequazioni in una incognita** l'insieme di due o più incognite di cui vogliamo trovare, quando esistono, le soluzioni comuni. Un sistema di inequazioni dicesi **possibile** se ammette soluzioni, **impossibile** se non ammette soluzioni. In quest'ultimo caso le inequazioni che compongono il sistema sono fra loro **incompatibili**.

Per risolvere un sistema di inequazioni si procede come segue:

- si trovano le soluzioni di tutte le inequazioni che compongono il sistema. Come sappiamo tali soluzioni sono intervalli numerici
- L'intervallo o gli intervalli numerici comuni a tutti gli intervalli precedentemente trovati sono le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} 125x^2 - 20x - 1 > 0 & \text{per } x < -\frac{1}{25} \text{ e } x > \frac{1}{5} \\ x^2 + 2x - 8 < 0 & \text{per } -4 < x < 2 \\ -3x^2 + 5x + 12 > 0 & \text{per } -\frac{4}{3} < x < 3 \end{cases}$$



Il sistema dato è verificato per $-\frac{4}{3} < x < -\frac{1}{25}$ e $\frac{1}{5} < x < 2$ cioè $\forall x \in \left]-\frac{4}{3}, -\frac{1}{25}\right[\cup \left]\frac{1}{5}, 2\right[$

Inequazioni razionali fratte ad una incognita

Sono inequazioni che possono essere ricondotte ad una delle due seguenti forme:

[1] $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ [2] con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi in x .

Per risolvere queste inequazioni bisogna scartare i valori della x che annullano il denominatore $B(x)$, cioè bisogna porre:

$$B(x) \neq 0$$

Le soluzioni dell'inequazione $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ coincidono con le soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni dell'inequazione $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ coincidono con le soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$$

(*) Gli intervalli soluzioni delle singole inequazioni vengono messi in evidenza mediante linee continue colorate serpentine. Le linee continue colorate disegnate sull'asse orientato ci dicono quali sono le soluzioni del sistema dato.

Nella pratica, però, conviene risolvere una inequazione frazionaria attraverso lo studio del segno dei **fattori di primo e di secondo grado** in cui possono essere decomposti i polinomi $A(x)$ e $B(x)$.

I seguenti esempi serviranno a chiarire quanto detto.

$$\frac{2(7-x)(3x^2+4x-15)}{3(-2x^2+3x+2)} > 0 \quad \text{per } -3 < x < -\frac{1}{2}, \frac{5}{3} < x < 2, x > 7$$

$$7-x=0 \Rightarrow x=7, 3x^2+4x-15=0 \Rightarrow x=-3 \quad x=\frac{5}{3}$$

$$-2x^2+3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}, x=2$$

