## Elementi di logica matematica

Molte grammatiche definiscono la **proposizione** come “**un giudizio della mente espresso con parole**”, cioè da un punto di vista grammaticale la parola proposizione sta ad indicare l’espressione di un pensiero compiuto, formato da almeno un soggetto e da un predicato (cui possono fare eventualmente seguito alcuni complementi). La **logica matematica** respinge questa definizione e per la logica matematica la **proposizione** è una combinazione di parole o di simboli a cui compete uno solo dei seguenti attributi: **vero** o **falso.** Tali attributi saranno simbolicamente indicati con le lettere **V, F**.

**Definizione**: Nella logica matematica si definisce **proposizione** una frase per la quale si può stabilire se è vera o se è falsa. << Roma è una città bella>> non rappresenta una **proposizione** in quanto non possiamo stabilire se la circostanza è vera o falsa. Rappresenteremo le nostre proposizioni mediante lettere, ad esempio **p, q,**. La terra è un pianeta è una **proposizione vera**, la luna è una stella è una **proposizione falsa**.

**Definizione**: Si chiama **variabile logica** ogni lettera utilizzata al posto di una proposizione.

**Definizione**: Se la proposizione **p** è vera, diremo che il valore di verità di **p** è **V** o anche che il valore di verità di **p** è **1** . Se la proposizione **q** è falsa, diremo che il valore di verità di **q** è **F** o anche che il valore di verità di **q** è **0** .

La **logica formale** alla quale intendiamo riferirci si occupa unicamente di quelle proposizioni alle quali compete uno ed uno solo degli attributi **vero** o **falso**. Si tratta di una **logica bivalente**. In tale logica sussistono ancora i **principi fondamentali della logica aristotelica**, che sono:

**(1)** il **principio di identità** secondo il quale ogni oggetto del pensiero logico è identico a se stesso e a nessun altro oggetto

**(2)** il **principio di non contraddizione** secondo il quale una proposizione non può essere sia vera che falsa

**(3)** il **principio del terzo escluso** (**tertium non datur**) secondo il quale i valori di verità di una proposizione sono soltanto due e sono il **vero** o il **falso** non potendo esistere un terzo valore di verità.

**Definizione**: Una proposizione si dice **semplice** o **atomica** o **elementare** se non può essere scomposta in proposizioni più semplici; altrimenti si dice **composta** o **molecolare**.

La parte della logica che si occupa delle operazioni con le proposizioni prende il nome di **calcolo delle proposizioni** o **logica delle proposizioni.**

## Le tavole di verità

Attribuire un **valore di verità** ad una singola particolare proposizione significa affermare che essa è vera oppure falsa. Se invece consideriamo una proposizione generica **A**, dobbiamo esaminare i casi possibili: **A** è vera, oppure **A** è falsa. In questo caso usiamo una tabella, chiamata tavola di verità formata da una colonna perché la proposizione esaminata è una. Se le proposizioni da analizzare sono due, **A** e **B**, si possono presentare i seguenti quattro casi: sono entrambe vere, la prima è vera e la seconda è falsa, la prima è falsa e la seconda è vera, sono entrambe false. Se le proposizioni sono tre, **A**, **B**, **C** si presentano $2^3 = 8$ casi. Se le proposizioni presi in considerazione sono $n$ allora i casi possibili sono $2^n$.

| $A$ |
|---|
| $V$ |
| $F$ |

| $A$ | $B$ |
|---|---|
| $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ |

| $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

## I connettivi logici

Abbiamo visto che si possono eseguire operazioni con gli insiemi. Anche con le proposizioni si possono eseguire operazioni: due o più proposizioni si possono connettere tra loro mediante opportuni connettivi in modo da ottenere una nuova proposizioni. Ad ognuno di questi connettivi corrisponde un'operazione elementare. Mediante uno di questi connettivi a due proposizioni date in un certo ordine corrisponde una terza nuova proposizione.

**Definizione**: Nella logica matematica, due proposizioni **p**, **q** possono essere unite mediante opportune particelle dette **connettivi** o **operatori logici** per formare una nuova proposizione.

## Il connettivo $\wedge$, cioè la congiunzione logica

Si definisce **congiunzione** di due proposizioni **p** e **q** e si indica col simbolo $p \wedge q$ (si legge **p** e **q** oppure **p** et **q**) la proposizione composta che è vera se **p** e **q** sono contemporaneamente vere, mentre è falsa in ogni altro caso.

La tavola di verità della proposizione composta $p \wedge q$ .

La prima riga della tavola si legge: "Se p è vera, se q è vera , allora $p \wedge q$ è vera." La seconda riga si legge: "Se p è vera, se q è falsa , allora $p \wedge q$ è falsa."

| p | q | p∧q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

## Il connettivo $\vee$, cioè la disgiunzione inclusiva

Si definisce **disgiunzione inclusiva** di due proposizioni **p** e **q** e si indica col simbolo $p \vee q$ (si legge "**p** o **q**" ed anche "**p** vel **q**") la proposizione composta che è vera se almeno una delle due proposizioni è vera, ed è falsa se entrambe le proposizioni sono false.

La tavola di verità della proposizione composta $p \vee q$ è:

| p | q | p∨q |
|---|---|---|
| V | F | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

## Il connettivo $\dot{\vee}$, cioè la disgiunzione esclusiva

Si definisce **disgiunzione esclusiva** di due proposizioni **p** e **q** e si indica col simbolo $p\dot{\vee}q$ (si legge "**p** o **q**" ed anche "**p** aut **q**") la proposizione composta che è vera se una soltanto delle due proposizioni è vera, falsa in tutti gli altri casi.

La tavola di verità della proposizione composta $p\dot{\vee}q$ è:

| p | q | $p\dot{\vee}q$ |
|---|---|---|
| V | *V* | *F* |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

## Il connettivo di negazione $\neg$

La negazione di una proposizione **p**, che si indica col simbolo $\neg$ (oppure con $\overline{p}$) è la proposizione che è vera se p è falsa ed è falsa se p è vera.

| p | ¬p | ¬(¬p) |
|---|---|---|
| V | F | V |
| F | V | F |

## L'implicazione materiale

Si definisce **implicazione materiale** di due proposizioni p e q e si indica col simbolo $p \to q$ (si legge "se **p** ….allora **q**" oppure "**p** implica **q**") la proposizione che risulta falsa se solo se **p** è vera e **q** è falsa. In tutti gli altri casi è vera.

| p | q | $p \to q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

| A | B | $\bar{A}$ | $\bar{A} \vee B$ | $A \to B$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | *F* | V | V |
| V | F | F | *F* | F |
| F | V | V | *V* | *V* |
| F | F | V | V | V |

## Coimplicazione materiale

Si definisce **coimplicazione materiale** di due proposizioni **p** e **q** e si indica col simbolo $p \leftrightarrow q$ (si legge "**p se e solo se q**, oppure **p *coimplica* q**") la proposizione che è vera quando p e **q** hanno lo stesso valore di verità ed è falsa in caso contrario.

| $\mathbf{p}$ | $\mathbf{q}$ | $\mathbf{p \leftrightarrow q}$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | *F* |
| **F** | **F** | **V** |

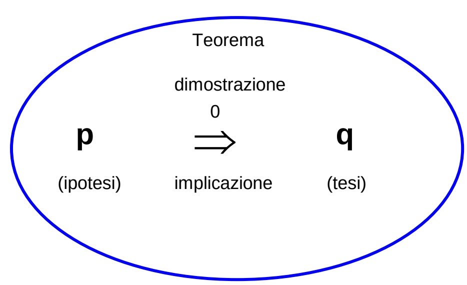
| $\mathbf{A}$ | $\mathbf{B}$ | $\mathbf{A \rightarrow B}$ | $\mathbf{B \rightarrow A}$ | $\mathbf{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)}$ |
|---|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | **V** | **F** |
| **F** | **V** | **V** | **F** | **F** |
| **F** | **F** | **V** | **V** | **V** |

La doppia implicazione equivale alla congiunzione di delle due implicazioni $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$, come si vede dalla tavola di verità. I valori di verità $\mathbf{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)}$ coincidono con i valori $A \leftrightarrow B$.

## Deduzione logica

Un importantissimo concetto fondamentale è quello di **deduzione o implicazione logica**. Se $p$ e $q$ sono due proposizioni, se dalla verità di $p$ deduciamo, attraverso ragionamenti logici, la verità di $q$, diciamo che p implica q e scriviamo $p \Rightarrow q$ e questo procedimento del ragionamento logico matematico si chiama **implicazione** o **deduzione logica**. La proposizione $p$ si chiama **ipotesi**, la proposizione $q$ si chiama **tesi**, il ragionamento che ci permette di passare dalla verità di p alla verità di q si chiama **dimostrazione**.

Il simbolo $\Rightarrow$ si dice simbolo di **implicazione logica**. **Ipotesi**, **dimostrazione** e **tesi** costituiscono il teorema come risulta dallo schema realizzato nella figura accanto.




A volte succede che si verifichino contemporaneamente le due seguenti implicazioni:

$$p \Rightarrow q \text{ e } q \Rightarrow p$$

In tal caso si dice che le proposizioni p e q sono logicamente equivalenti e si scrive $p \Leftrightarrow q$

Quando una **proposizione** **q** è la conseguenza di una **proposizione** **p** si dice che **p** implica **q** *e si scrive:* $p \Rightarrow q$ (p implica **q**). Questa scrittura vuole dire che << se è vera la proposizione **p** è vera anche la proposizione **q** >>: **p** dicesi **premessa** o ipotesi, **q** **conseguenza** o tesi.

In matematica ogni teorema del tipo: <<**p** **è condizione sufficiente per q** >> oppure, ed è la stessa cosa, << **q è condizione necessaria *per* p** >> si può esprimere semplicemente scrivendo: $p \Rightarrow q$ , cioè ogni **teorema** avente **p** come **ipotesi** e **q** come **tesi** si esprime dicendo che **p** è condizione sufficiente per **q**, mentre **q** **è condizione necessaria per p** .

Quando l'implicazione $p \Rightarrow q$ è vera si dice che è un TEOREMA, **p** si chiama **ipotesi**, **q** **tesi**.

Quindi, in ogni teorema la verità dell'ipotesi è **condizione sufficiente** per la verità della tesi, mentre la verità della tesi è **condizione necessaria** (ma in generale non sufficiente) per la verità dell'ipotesi; cioè **una condizione sufficiente va posta come ipotesi, una condizione necessaria come tesi**. Il segno $\Rightarrow$ rappresenta il simbolo di **implicazione logica**. Il simbolo $\not\Rightarrow$ si legge <<**non implica**>>. Se è vera l'implicazione $p \Rightarrow q$ non è detto che debba risultare vera l'implicazione inversa $q \Rightarrow p$.

Esempio: $\text{Paolo è torinese} \Rightarrow \text{Paolo è italiano}$, mentre $\text{Paolo è italiano} \not\Rightarrow \text{Paolo è torinese}$.

Se **p** e **q** sono due proposizioni per le quali risulta contemporaneamente $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ allora diremo che le proposizioni **p** e **q** sono equivalenti e scriviamo: $p \Leftrightarrow q$ e leggiamo: << **p equivale logicamente a q** >> oppure più semplicemente << **p equivale a q** >> oppure << **p coimplica q** >>.

$\Leftrightarrow$ simbolo di **equivalenza logica** o di *doppia implicazione* o di **coimplicazione**

si legg : << *equivale logicamente* oppure **coimplica** >> $\not\Leftrightarrow$ non equivale a

In matematica, ogni teorema del tipo << **p è condizione necessaria e sufficiente perché valga q** >> si può esprimere semplicemente scrivendo: $p \Leftrightarrow q$

La coesistenza di un teorema e del suo inverso determina le cosiddette **condizioni necessarie e sufficienti**. Precisamente una **condizione C**, rispetto ad una proprietà **P** si dice che è:

**1) necessaria** quando considerando **P** come ipotesi si deduce **C** come tesi

**2) sufficiente** quando considerando **C** come ipotesi si deduce **P** come tesi

## Le tautologie

**Definizione**: Una proposizione composta è una **tautologia** se risulta **sempre vera**, qualunque valore di verità si attribuisce alle proposizioni elementari di cui è composta.

La formula $(p \wedge q) \wedge \rightarrow p$ è una tautologia, come si verifica costruendo la seguente tavola di verità:

| p | q | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \rightarrow p$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | V |

Come si vede, qualunque sia il valore di verità attribuito alle lettere p e q, la formula $(p \wedge q) \wedge \rightarrow p$ risulta sempre vera.

## Le contraddizioni

**Definizione**: Una proposizione composta è una **contraddizione** se risulta **sempre falsa**, qualunque valore di verità si attribuisce alle proposizioni elementari di cui è composta.

La proposizione "11 è un numero primo ed ha 3 divisori" è una contraddizione. Infatti essa può essere così formalizzata: $p \wedge \overline{p}$ ed equivale all'affermazione " 11 è un numero primo e non lo è".

Verifichiamo che la proposizione $p \wedge \overline{p}$ è una contraddizione, cioè che è sempre falsa, attraverso la seguente tavola di verità:

| p | $\overline{p}$ | $p \wedge \overline{p}$ |
|---|---|---|
| V | F | F |
| F | V | F |

## Le proprietà formali delle operazioni logiche

**Proprietà di idempotenza**: $p \wedge p = p \qquad p \vee p = p$

**Proprietà commutativa**: $p \wedge q = q \wedge p \qquad p \vee q = q \vee p \qquad p \dot{\vee} q = q \dot{\vee} p$

**Proprietà associativa**: $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) \qquad (p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

$$(p \dot{\vee} q) \dot{\vee} r = p \dot{\vee} (q \dot{\vee} r)$$

**Proprietà distributiva**: $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

**Proprietà della doppia negazione**: $\neg(\neg p) = \overline{\overline{p}} = p$

**Proprietà della negazione**: $p \wedge \overline{p} = F \qquad p \vee \overline{p} = V$

**Leggi di assorbimento**: $p \wedge (p \vee q) = p \qquad p \vee (p \wedge q) = p$

**Prima legge di De Morgan**: $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$ ed anche $\overline{(p \wedge q)} = \overline{p} \vee \overline{q}$

La negazione della congiunzione di due proposizioni è equivalente alla disgiunzione inclusiva delle negazioni delle due proposizioni.

**Seconda legge di De Morgan**: $\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$ ed anche $\overline{(p \vee q)} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

La negazione della disgiunzione inclusiva di due proposizioni è equivalente alla congiunzione delle negazioni delle due proposizioni.

## I ragionamenti logici

Per **ragionamento logico** o **inferenza deduttiva** intendiamo un procedimento attraverso il quale, a partire da una o più proposizioni vere, le **premesse**, otteniamo una o più proposizioni altrettanto vere, le **conclusioni**. Un esempio di ragionamento logico usato di solito in matematica è la dimostrazione di un teorema.

Un ragionamento è **valido** se ci assicura che da premesse vere giungiamo ad una conclusione vera.

In questo caso esso prende il nome di **deduzione logica**.

Esistono diverso forme di deduzione logica; noi ne analizziamo due: il **modus ponens** ed il **modus tollens**.

## Modus ponens

Lo schema di un ragionamento che utilizza il **modus ponens** è il seguente: $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$

Se sono vere le proposizioni $p \to q$ e $p$ allora è vera anche la proposizione $q$.

"Se studio apprendo ( $p \to q$ ) e studio ( $p$ ), dunque apprendo ( $q$ ).

**Regola fondamentale di inferenza**: ogni qualvolta un'implicazione $p \to q$ è vera ed anche $p$ è accettata come vera, dobbiamo accettare come vera la proposizione $q$, cioè la conclusione.

## Modus tollens

Lo schema di un ragionamento che utilizza il **modus tollens** è il seguente: $(p \to q) \wedge \overline{p} \Rightarrow \overline{q}$

Se è vera la proposizione $p \to q$ ed è vera la negazione di $p$, cioè $\overline{p}$, allora deve essere vera anche la negazione della proposizione $q$, cioè deve essere vera $\overline{q}$.

"Se ho sete bevo ( $p \to q$ ) ma non bevo ( $\overline{p}$ ) quindi n on ho sete ( $\overline{q}$ ).

## L'implicazione materiale e la deduzione logica

Il simbolo $\Rightarrow$ che abbiamo utilizzato per la deduzione logica non deve essere confuso col simbolo $\to$ dell'implicazione materiale, in quanto la deduzione logica indica un ragionamento mentre l'implicazione materiale è un connettivo.

L'**implicazione materiale** "se $p$ allora $q$" è un connettivo logico che ci consente di costruire una nuova proposizione a partire da due proposizioni $p$ e $q$. La verità della nuova proposizione dipende soltanto dai valori di verità delle proposizioni che la compongono.

L'**implicazione logica** indica che bisogna effettuare una serie di ragionamenti che partendo dalla verità della premessa si deduce la verità della conclusione.

## Metodi di dimostrazione di un teorema

Per dimostrare un teorema si utilizzano due tipi di ragionamento: il **metodo diretto** o il **metodo indiretto**, detto anche **ragionamento per assurdo**.

**Metodo diretto**: La **dimostrazione col metodo diretto** si realizza attraverso una successione di ragionamenti che partendo dalle verità dell'ipotesi (I), si perviene alla verità della tesi (T).

**Metodo indiretto o per assurdo**: Il **metodo indiretto** o **ragionamento per assurdo** consiste nel supporre falsa la tesi ( $\overline{T}$ ) e nel dimostrare, attraverso una successioni di ragionamenti corretti, che anche l'ipotesi è falsa ( $\overline{I}$ ). Ma l'ipotesi di un teorema è sempre vera e non può essere negata e quindi la tesi non può essere falsa. Se la tesi non può essere negata è vera ed il teorema è dimostrato.

**Definizione**: Si definisce **predicato** o **enunciato aperto** un'affermazione contenente una o più variabili che diviene una proposizione dopo avere sostituito dei valori (scelti in un insieme universo U) alle variabili.

Considero la proposizione " $-6$ **è un numero negativo**". A tale proposizione possiamo attribuire soltanto il valore "**vero**". Consideriamo l'affermazione "**x è un numero negativo**". La lettera x rappresenta una variabile alla quale possiamo attribuire un determinato valore scelto in un insieme universo, che può essere l'insieme $\mathbb{N}$, l'insieme $\mathbb{Q}$, l'insieme $\mathbb{R}$ o un qualsiasi altro insieme. A differenza della proposizione precedente non possiamo dire se è vero o è falso. Per questo motivo tale affermazione prende il nome di **predicato** o **enunciato aperto**. Le scrittura del tipo $A(x)$. $B(x,y)$, $C(x,y,z)$ stanno ad indicare predicati ad una, due, tre variabili.

**Definizione**: Un predicato in una o più variabili è **soddisfatto da certi valori delle variabili** se tali valori lo trasformano in una proposizione vera. E' evidente che ad ogni predicato $A(x)$, definito in un insieme universo U, è associato un sottoinsieme di U i cui elementi soddisfano $A(x)$.

**Definizione**: Per **insieme verità** di un predicato si intende un sottoinsieme dell'insieme universo U contenente tutti i possibili valori che soddisfano il predicato. Quindi si chiama **insieme verità** di un enunciato aperto ad una variabile l'insieme di tutti i valori scelti in un insieme universo U che, sostituiti nella variabile, trasformano il predicato in una proposizione vera.

**Esempio**: Consideriamo il predicato $P(x)$:"x è divisore di 256", con $x \in \mathbb{N}$

L'insieme dei divisori di 256 è: $P = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$

P è l'insieme verità del predicato $P(x)$, cioè la totalità dei valori della x che soddisfano $P(x)$. Tale insieme, scritto in forma compatta, diventa: $P = \{x \in \mathbb{N} : P(x)\}$.

## Condizione necessaria e sufficiente

- La verità dell'implicazione $p(x) \Rightarrow q(x)$ si può esprimere dicendo che la verità di $q(x)$ è **condizione necessaria** perché $p(x)$ sia vera.

- La verità dell'implicazione $p(x) \Rightarrow q(x)$ si può esprimere dicendo che la verità di $p(x)$ è **condizione sufficiente** perché $q(x)$ sia vera.

- La verità della doppia implicazione $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ si esprime dicendo che **condizione necessaria** e **sufficiente** perché $p(x)$ e che sia vera $q(x)$, oppure che **condizione necessaria** e **sufficiente** perché $q(x)$ e che sia vera $p(x)$.

Osservazione: Occorre non confondere i simboli $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ con i simboli $\Rightarrow$ ed $\Leftrightarrow$. I primi indicano l'implicazione e la coimplicazione materiale. Sono quindi dei connettivi logici che consentono di costruire un nuovo predicato, partendo da due predicati. I secondi simboli si riferiscono alla implicazione logica ed alla equivalenza logica. Non sono dei connettivi ma dei simboli di relazioni tra predicati. Le scritture $p(x) \Rightarrow q(x)$ e $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ non indicano dei nuovi predicati, bensì affermano che tra i predicati $p(x)$ e $q(x)$ valgono determinare relazioni.