# U.D. N° 05

# La fattorizzazione dei polinomi

**01)** **La messa in evidenza totale**

**02)** **La messa in evidenza parziale**

**03)** **La differenza di due quadrati**

**04)** **Somma e differenza di due cubi**

**05)** **La decomposizione di fattori di un trinomio di secondo grado**

**06)** **La decomposizione in fattori mediante la regola di Ruffini**

**07)** **M.C.D. e m.c.m. di polinomi**

## Decomposizione in fattori di un polinomio

**Decomporre un polinomio in fattori** significa trovare un monomio o dei polinomi il cui **prodotto** è uguale al polinomio dato. Più semplicemente possiamo dire che **decomporre un polinomio in fattori** significa sostituirlo con un prodotto di fattori. La decomposizione di un polinomio in fattori è detta anche **fattorizzazione** del polinomio. Analizziamo adesso i casi più comuni di decomposizione in fattori di un polinomio.

## MESSA IN EVIDENZA TOTALE

Si applica questo metodo quando tutti i termini del polinomio ammettono un $M.C.D.$ diverso da $1$. In questo caso si raccoglie a fattore comune il $M.C.D.$ di tutti i termini.

$x^3 + x^2 + 6x = x\left(x^2 + x + 6\right)$ $\qquad$ $12a^3b^3 + 6a^2b + 2ab^2 = 2ab\left(6a^2b^2 + 3a + b\right)$

$$x(a+b) + 2y(a+b) + 4xy(a+b) = (a+b)(x+2y+4xy)$$

$$(2x+3y)(5x-4y) - 2(2x+3y)(2x+y) = (2x+3y)[5x-4y-2(2x+y)]$$

$$(x-3y)^2 - 2(x-3y)(4x-y) + y(x-3y) = (x-3y)\left[(x-3y) - 2(4x-y) + y\right] =$$
$$= (x-3y)(x-3y-8x+2y+y) = -7x(x-3y) = 7x(3y-x)$$

## MESSA IN EVIDENZA PARZIALE

Si applica questo procedimento quando è possibile la messa in evidenza a gruppi in modo che , mediante una successiva messa in evidenza totale , il polinomio dato viene decomposto nel prodotto di due polinomi . $ax + ay + bx + xy = a(b+y) + x(b+y) = (b+y)(a+x)$

$$20a^2x^2 - 25x^2y - 16a^2y + 20y^2 = 5x^2\left(4a^2 - 5y\right) - 4y\left(4a^2 - 5y\right) = \left(4a^2 - 5y\right)\left(5x^2 - 4y\right)$$

## Il polinomio da decomporre è un binomio differenza di due quadrati

La decomposizione si effettua tenendo presente la seguente identità: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$25x^4y^2 - \frac{1}{4}a^2 = (5x^2y)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \left(5x^2y - \frac{1}{2}a\right)\left(5x^2y + \frac{1}{2}a\right)$$

### Il polinomio da decomporre è un binomio somma o differenza di due cubi

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente le due seguenti identità :

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$27y^6 + 8a^3 = (3y^2)^3 + (2a)^3 = (3y^2 + 2a)(9y^4 - 6ay^2 + 4a^2)$$

$$\frac{1}{8}a^9b^3 - 125 = \left(\frac{1}{2}a^3b\right)^3 - (5)^3 = \left(\frac{1}{2}a^3b - 5\right)\left(\frac{1}{4}a^6b^2 + \frac{5}{2}a^3b + 25\right)$$

**Il polinomio da decomporre è un trinomio che è lo sviluppo del quadrato di un binomio**

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente le due seguenti identità :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$4a^4b^2 + 9c^2 - 12a^2bc = (2a^2b - 3c)^2 \qquad 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$$

**Il polinomio da decomporre è un quadrinomio che è lo sviluppo del cubo di un binomio**

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente le due seguenti identità:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3 \qquad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$$

$$8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = (2x - y)^3$$

$$8a^3x^3 - 60a^2x^2y + 150axy^2 - 125y^3 = (2ax - 5y)^3$$

## Il polinomio da decomporre è lo sviluppo del quadrato di un polinomio

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente una elle seguenti identità:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd = (a+b+c+d)^2$$

$$4x^2 + \frac{1}{9}y^2 + \frac{9}{16} - \frac{4}{3}xy - 3x + \frac{1}{2}y = \left(2x - \frac{1}{3}y - \frac{3}{4}\right)^2$$

**Il polinomio da decomporre è un trinomio del tipo** $x^2 + sx + p$

Se è possibile trovare due numeri **a** e **b** per i quali risulta $a + b = s$ $a \cdot b = p$ allora il polinomio si decompone tenendo presente la seguente identità: $x^2 + sx + p = (x + a)(x + b)$

$x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$ $a = -2$ , $b = +7$

$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$ $a = -3$ , $b = -5$

Il polinomio da decomporre è un trinomio avente la seguente forma: $ax^2 + bx + c$

Se è possibile trovare due numeri **m** ed **n** tali che $m + n = b$ , $m \cdot n = a \cdot c$ allora la decomposizione avviene sostituendo il numero **b** con la somma $m + n$ . Si ottiene:

$$ax^2+bx+c=ax^2+(m+n)x+c=ax^2+mx+nx+c$$

Si effettua prima un raccoglimento parziale e poi un raccoglimento totale.

$$6x^2+23x+7=6x^2+2x+21x+7=2x(3x+1)+7(3x+1)=(3x+1)(2x+7)$$

$b = 23, m = 2, n = 21,\ m + n = 2 + 21 = 23 = b\ ,\ m \cdot n = 2 \cdot 21 = 42 = a \cdot c = 6 \cdot 7 = 42$

**Se il polinomio da decomporre si annulla per un certo valore** $x = k$ della sua variabile, esso può essere decomposto applicando una o più volte la **regola di Ruffini**.

Un fattore è $x - k$, l'altro fattore è un polinomio (inferiore di un grado rispetto al polinomio da decomporre) i cui coefficienti si ricavano applicando la regola di Ruffini.

$$x^4-4x^3-7x^2+34x-24=(x-1)(x^3-3x^2-10x+24) =$$

$$= (x-1)(x-2)(x^2-x-12)=(x-1)(x-2)(x-4)(x+3)$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | -4 | -7 | +34 | -24 |
| 1 | | 1 | -3 | -10 | +24 |
| | 1 | -3 | -10 | +24 | # |
| 2 | | 2 | -2 | -24 | |
| | 1 | -1 | -12 | # | |
| -3 | | -3 | 12 | | |
| | 1 | -4 | # | | |

I numeri **k**, se sono numeri interi relativi, vanno ricercati tra i sottomultipli ( positivi o negativi) del termine noto del polinomio .

## Zeri di un polinomio

Sia $P(x)=a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ un polinomio di grado n a coefficienti interi. Il numero $\alpha$ dicesi **zero** del polinomio $P(x)$ se annulla il polinomio cioè se, dopo avere messo il numero $\alpha$ al posto della variabile x ed avere eseguito tutti i calcoli, troviamo come risultato finale il numero zero. In simboli abbiamo: $P(\alpha) = a_o\alpha^n + a_1 \cdot \alpha^{n-1} + a_2 \cdot \alpha^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot \alpha + a_n = 0$

$a_o$ è il **coefficiente del termine di grado massimo** del polinomio $P(x)$,

$a_n$ è il **termine noto** del polinomio $P(x)$.

Il numero $x=-2$ è uno **zero** del polinomio $P(x)=2x^5+3x^4-6x^3+6x^2-8x+3$ in quanto risulta

$$P(-2)=2(-2)^5+3(-2)^4-6(-2)^3+6(-2)^2-8(-2)+3=0$$

come si verifica facilmente eseguendo tutti i calcoli.

## Zeri interi relativi di un polinomio

**Condizione necessaria ma non sufficiente** perché il numero intero relativo $m \in Z$ sia uno **zero** del polinomio $P(x)=a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ è che esso sia un divisore (positivo o negativo) del termine noto $a_n$. Questo significa che se il numero intero relativo $m \in Z$ annulla il polinomio esso è sicuramente un sottomultiplo del termine noto $a_n$. Viceversa, **m** può essere un sottomultiplo del termine noto $a_n$ **senza essere uno zero** del polinomio $P(x)$.

## Zeri razionali di un polinomio

Un numero razionale è un numero che si può scrivere sotto forma di frazione, cioè un numero del tipo $\frac{m}{n}$ (con $m \in N$ ed $n \in N^*$ primi tra di loro).

**Condizione necessaria ma non sufficiente** perché il numero razionale $\frac{m}{n}$ (con $m \in N$ ed $n \in N^*$ primi tra di loro) sia uno **zero** del polinomio $P(x)=a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ è che:

**1)** **m** sia divisore (positivo o negativo) del termine noto $a_n$

**2)** **n** sia divisore (positivo o negativo) del coefficiente $a_o$ del termine di grado più elevato $a_o x^n$

Questo significa che se il numero razionale $\frac{m}{n}$ è uno **zero** del polinomio $P(x)$, allora **m** va ricercato tra i sottomultipli (positivi o negativi) del termine noto $a_n$ ed **n** va ricercato tra i sottomultipli (positivi o negativi) del coefficiente $a_o$ del termine di grado più elevato $a_o x^n$.

Tuttavia il numero razionale $\frac{m}{n}$ può verificare i requisiti **1)** e **2)** senza essere uno zero del polinomio $P(x)$, perché noi sappiamo che si tratta di una condizione necessaria ma non sufficiente.

**N.B.** Una **condizione necessaria** rappresenta una tesi, una **condizione sufficiente** rappresenta una ipotesi.

Consideriamo il polinomio $P(x)=2x^5+3x^4-6x^3+6x^2-8x+3$ I suoi eventuali **zeri interi relativi** vanno ricercati tra i sottomultipli (positivi o negativi) del **termine noto** 3, cioè tra i numeri: $\pm 1$, $\pm 3$ , mentre i suoi eventuali **zeri razionali** vanno ricercati tra i numeri $\pm\frac{1}{2}$ , $\pm\frac{3}{2}$

Concludendo possiamo affermare che gli eventuali zeri razionali del polinomio $P(x)=2x^5+3x^4-6x^3+6x^2-8x+3$ vanno ricercati tra i seguenti numeri: $\pm 1$ , $\pm 3$ , $\pm\frac{1}{2}$ , $\pm\frac{3}{2}$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | -6 | 6 | -8 | 3 |
| 1 | | 2 | 5 | -1 | 5 | -3 |
| | 2 | 5 | -1 | 5 | -3 | // |
| -3 | | -6 | 3 | -6 | 3 | |
| | 2 | -1 | 2 | -1 | // | |
| $\frac{1}{2}$ | | 1 | 0 | 1 | | |
| | 2 | // | 2 | // | | |

$x_1 = 1$

$x_2 = -3$

$x_3 = \frac{1}{2}$

Il polinomio proposto decomposto in fattori assume la forma:

$$P(x)=2x^5+3x^4-6x^3+6x^2-8x+3=(x-1)(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2)=2(x-1)(x+3)(2x-1)(x^2+1)$$

Non è superfluo osservare che il numero $x=\frac{3}{2}$ pur avendo come numeratore un divisore del termine noto e come denominatore un divisore del coefficiente del termine di grado massimo non è uno zero del nostro polinomio.

## ALTRI ESEMPI DI DECOMPOSIZIONE IN FATTORI

$$x^5 - xy^4 - x^4y + y^5 = x\left(x^4 - y^4\right) - y\left(x^4 - y^4\right) = \left(x^4 - y^4\right)(x - y) =$$

$$= \left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 - y^2\right)(x - y) = \left(x^2 + y^2\right)(x + y)(x - y)(x - y) = \left(x^2 + y^2\right)(x + y)(x - y)^2$$

$$x^4 + y^4 + x^2y^2 + x^3 + y^3 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - x^2y^2 + (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)^2 =$$

$$= \left(x^2 + y^2 - xy\right)\left(x^2 + y^2 - xy\right) + (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)^2 =$$

$$= \left(x^2 + y^2 - xy\right)\left(x^2 + y^2 + xy + x + y\right)$$

$$a^3 + b^3 + a^2 - b^2 + a^2b + ab^2 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right) + (a - b)(a + b) + ab(a + b) =$$

$$= (a + b)\left(a^2 - ab + b^2 + a - b + ab\right) = (a + b)\left(a^2 + b^2 + a - b\right)$$

$$x^3 - y^3 - x^2 + y^2 = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right) - (x - y)(x + y) =$$

$$= (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 - x - y\right)$$

$$a^4 + a^2 - b^4 - b^2 = \left(a^2 + b^2\right)\left(a^2 - b^2\right) + \left(a^2 - b^2\right) = \left(a^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2 + 1\right) =$$

$$= (a - b)(a + b)\left(a^2 + b^2 + 1\right)$$

$$x^2 - 4y^2 - x^3 - 8y^3 = (x - 2y)(x + 2y) - \left(x^3 + 8y^3\right) =$$

$$= (x - 2y)(x + 2y) - (x + 2y)\left(x^2 + 2xy + 4y^2\right) =$$

$$= (x + 2y)\left(x - 2y - x^2 + 2xy - 4y^2\right)$$

$$a^3 - ab^2 + a^2b - b^3 = a\left(a^2 - b^2\right) + b\left(a^2 - b^2\right) = \left(a^2 - b^2\right)(a + b) =$$

$$= (a + b)(a + b)(a - b) = (a + b)^2(a - b)$$

## $M.C.D.$ e $m.c.m.$ di polinomi

Prima bisogna decomporre in **fattori primi** (cioè non ulteriormente decomponibili) i polinomi di cui vogliamo calcolare il $M.C.D.$ o il $m.c.m.$. Il $M.C.D.$ di due o più polinomi è uguale al prodotto dei fattori comuni presi una sola volta con l'esponente minore. Il $m.c.m.$ di due o più polinomi è uguale al prodotto dei fattori comuni e non comuni presi una sola volta con l'esponente maggiore.

### Calcolare il $M.C.D.$ ed il $m.c.m.$ dei seguenti polinomi:

$a^2 - 4ab + b^2$ $\quad$ $a^2 - 4b^2$ $\quad$ $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$

$a^2 - 4ab + b^2 = (a-2b)^2$ , $a^2 - 4b^2 = (a-2b)(a+2b)$ , $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3 = (a-2b)^3$

$M.C.D. = a - 2b$ $\qquad$ $m.c.m. = (a + 2b)(a - 2b)^3$