U.D. N° 06

Le frazioni algebriche

Frazioni algebriche

Dicesi **frazione algebrica** il quoziente indicato di due espressioni algebriche intere (monomi o polinomi). I termini delle frazioni algebriche si chiamano **numeratore** (o **dividendo**) e **denominatore** (o **divisore**). Se il denominatore di una frazione algebrica è **zero**, la frazione non ha significato.

Semplificazione di una frazione algebrica

PROPRIETA' INVARIANTIVA

Moltiplicando o **dividendo** il numeratore ed il denominatore di una stessa frazione algebrica per una stessa espressione algebrica non nulla si ottiene una frazione equivalente.

Questa proprietà ci consente di eseguire la semplificazione delle frazioni algebriche che consiste nella soppressione di eventuali fattori comuni ai due termini di una frazione. Una frazione algebrica si dice **ridotta ai minimi termini** o **irriducibile** quando il numeratore ed il denominatore non hanno alcun fattore in comune.

Per semplificare una frazione algebrica si procede come segue:

1) Si decompongono in fattori primi sia il numeratore che il denominatore

2) Si sopprimono i fattori comuni del numeratore e del denominatore

$$\frac{m^3 + 3m^2}{m^2 - 9} = \frac{m^2(m+3)}{(m+3)(m-3)} = \frac{m^2}{m-3} \quad , \quad \frac{a^2-4}{a^2+2a} = \frac{(a+2)(a-2)}{a(a+2)} = \frac{a-2}{a}$$

$$\frac{a^2-4}{3a+6} = \frac{(a+2)(a-2)}{3(a+2)} = \frac{a-2}{3}$$

$$\frac{4x^2-4x+1-y^2}{4x^2-4xy+y^2-1} = \frac{(2x-1)^2-y^2}{(2x-y)^2-1} = \frac{(2x-1+y)(2x-1-y)}{(2x-y+1)(2x-y-1)} = \frac{2x-1+y}{2x-y+1}$$

Riduzione di due o più frazioni algebriche al minimo comune denominatore

Per ridurre due o più frazioni algebriche al loro **minimo comune denominatore** si procede come segue:

1) Si riducono le frazioni algebriche ai minimi termini

2) Si calcola il $m.c.m.$ fra i denominatori di tutte le frazioni e lo si pone come **minimo comune denominatore**

3) Si divide il $m.c.m.$ fra i denominatori di tutte le frazioni e lo si pone come **minimo comune denominatore**

$$\frac{1}{x} \quad , \quad \frac{2a}{x-1} \quad , \quad \frac{-5b}{x+1} \quad , \quad \frac{4a^2-3b}{x^2-1} \qquad m.c.m. = x(x+1)(x-1)$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \quad , \quad \frac{2ax(x+1)}{x(x+1)(x-1)} \quad , \quad \frac{-5bx(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \quad , \quad \frac{x(4a^2-3b)}{x(x+1)(x-1)}$$

Somma algebrica di due o più frazioni algebriche

Per sommare due o più frazioni algebriche si procede come segue:

1) Si riducono tutte le frazioni algebriche al **minimo comune denominatore**

2) Si scrive una frazione algebrica che ha come denominatore il **minimo comune denominatore** precedentemente trovato e come numeratore la somma algebrica dei numeratori delle frazioni algebriche ridotte al **minimo comune denominatore**

3) Si eseguono tutte le operazioni indicate nel numeratore, si riducono i termini simili e si decompone in fattori primi il polinomio trovato. Se possibile, si semplifica la frazione ottenuta.

$$\frac{5}{x^2-2x} - \frac{4x(x+2)}{x^2-4} + \frac{3x+5}{2x} = \frac{5}{x(x-2)} - \frac{4x(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{3x+5}{2x} =$$

$$= \frac{10-8x^2+(3x+5)(x-2)}{2x(x-2)} = \frac{10-8x^2+3x^2-6x+5x-10}{2x(x-2)} = \frac{-5x^2-x}{2x(x-2)} =$$

$$= \frac{-x(5x+1)}{2x(x-2)} = \frac{-(5x+1)}{2(x-2)} = \frac{5x+1}{2(2-x)}$$

Moltiplicazione di due o più frazioni algebriche

Il **prodotto** di due o più frazioni algebriche è una frazione algebrica che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori .

OSSERVAZIONE

Conviene, per prima cosa, decomporre in fattori primi il numeratore ed il denominatore di ciascuna frazione, poi si semplifica ed infine si esegue la moltiplicazione.

$$\frac{a^2-x^2}{a+b}\cdot\frac{x\left(a^2-b^2\right)}{a+x}\cdot\frac{-2}{a-x}=\frac{\cancel{(a+x)}\,\cancel{(a-x)}}{\cancel{a+b}}\cdot\frac{x\,\cancel{(a+b)}\,(a-b)}{\cancel{a+x}}\cdot\frac{-2}{\cancel{a-x}}=-2x(a-b)=\mathbf{2x(b-a)}$$

Divisione di due frazioni algebriche

Il **quoziente** di due frazioni algebriche è la frazione algebrica che si ottiene moltiplicando la prima frazione algebrica per l'inversa della seconda.

$$\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\frac{(x-a)^4}{x+a}=\frac{(x-a)^3}{(x+a)}\cdot\frac{(x+a)}{(x-a)^4}=\frac{1}{x-a}$$

Potenza di una frazione algebrica

Per elevare a **potenza** una frazione algebrica basta elevare alla data potenza sia il numeratore che il denominatore.

$$\left[\frac{(x+y)^2}{a(x-y)^3}\right]^4=\frac{(x+y)^8}{a^4(x-y)^{12}}$$

OSSERVAZIONE

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{A}{B}\right)^n}=\frac{1}{\frac{A^n}{B^n}}=\frac{B^n}{A^n}=\left(\frac{B}{A}\right)^n$$