# U.D. N° 07

## Le equazioni di primo grado ad una incognita

## Identità ed equazioni

Dicesi **identità** l'uguaglianza tra due espressioni algebriche verificata da tutti i possibili valori numerici assegnati a tutte le lettere che vi figurano. Con parole diverse possiamo dire che l'**identità** è una **uguaglianza incondizionata**. L'uguaglianza $(2x - y)^2 = y^2 + 4x^2 - 4xy$ è una **identità** in quanto qualunque siano i valori numerici attribuiti alla **x** ed alla **y** il primo membro è sempre numericamente uguale al secondo membro. Siano $A(x)$ e $B(x)$ due generici polinomi in x. L'uguaglianza $\mathbf{A(x) = B(x)}$ posta allo scopo di stabilire se esistono valori numerici della **x** che rendono il primo membro numericamente uguale al secondo membro dicesi **equazione ad una incognita**. Con altre parole possiamo dire che l' **equazione è una uguaglianza condizionata**, cioè una uguaglianza verificata un numero finito di volte. L'uguaglianza $x + 1 = 2x$ è una **equazione** in quanto l'uguaglianza tra i polinomi $x+1$ e $2x$ si verifica una sola volta, precisamente quando attribuiamo alla **x** il valore **1**.

**Osservazione**: Una **identità** esprime un **teorema**, una **equazione** esprime un **problema**

La variabile che figura nell'equazione dicesi **incognita** dell'equazione. I valori dell'incognita che verificano l'equazione sono le **soluzioni** o le **radici** dell'equazione. L'espressione algebrica scritta alla sinistra del segno di uguaglianza << = >> dicesi **primo membro** dell'equazione l'altra, posta alla destra del segno =, dicesi **secondo membro**. **Risolvere** una equazione significa trovare le soluzioni dell'equazione. Una equazione i cui termini hanno soltanto coefficienti numerici dicesi **equazione numerica**, mentre dicesi **equazione letterale** se almeno un termine di essa ha coefficiente letterale. Una **equazione** si dice **intera** se l'incognita non figura in nessun denominatore, altrimenti dicesi **fratta** o **frazionaria**. Due equazioni si dicono **equivalenti** se ogni soluzione della prima è soluzione della seconda e viceversa ogni soluzione della seconda è anche soluzione della prima.

La risoluzione delle equazioni si basa su alcuni principi fondamentali:

**Primo principio di equivalenza** Aggiungendo o togliendo ad ambo i membri di una equazione una stessa espressione algebrica si ottiene una equazione equivalente alla data. In simboli abbiamo:

$$A(x) = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) \pm M(x) = B(x) \pm M(x)$$

Dal principio di equivalenza si deducono i seguenti corollari

**COROLLARIO N°1** In una equazione si può trasportare un termine da un membro all'altro, purché lo si cambi di segno

**COROLLARIO N°2** Se nei due membri di un'equazione figurano due termini uguali e con lo stesso segno, essi si possono eliminare

**Secondo principio di equivalenza** Moltiplicando o dividendo i due membri di un'equazione per un numero diverso da zero o per una espressione algebrica diversa da zero e non contenente l'incognita si ottiene una equazione equivalente alla data.

**COROLLARIO** Cambiando il segno a tutti i termini del primo e del secondo membro di un'equazione (il significa **moltiplicare ambo i membri per** $-1$) si ottiene una equazione equivalente alla data.

**Terzo principio** Una equazione che sia il prodotto uguagliato a zero di polinomi contenenti l'incognita è equivalente alle equazioni che si ottengono uguagliando a zero i singoli polinomi

$A(x)\cdot B(x)\cdot C(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = 0$ oppure $B(x) = 0$ oppure $C(x) = 0$

**OSSERVAZIONE** Ogni equazione $A(x) = B(x)$ può essere ricondotta alla seguente forma:

$P(x) = 0$ dove $P(x)$ è un polinomio di grado **n** che dicesi anche **grado dell'equazione**.

Infatti basta eseguire tutte le operazioni indicate nei due membri dell'equazione, portare tutti i termini ottenuti al primo termine e sommare i termini simili.

## Equazione di primo grado ad una incognita

E' una equazione riconducibile alla seguente forma: $ax = b$ **[*]**

La soluzione dell'equazione [*] è una frazione che ha per numeratore il termine noto del secondo membro e per denominatore il coefficiente dell'incognita, cioè: $x = \frac{b}{a}$

$$\frac{14x-9}{11}-\frac{1}{3}\left[\frac{17}{2}x-(5-4x)\right]=\frac{1}{2}-\frac{8x+1}{3}$$

$$\frac{14x-9}{11}-\frac{1}{3}\left(\frac{17x-10+8x}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{8x+1}{3} \quad , \quad \frac{14x-9}{11}-\frac{25x-10}{6}=\frac{1}{2}-\frac{8x+1}{3}$$

$$6(14x-9)-11(25x-10)=33-22(8x+1) \; , \; 84x-54-275x+110=33-176x-2$$

$$84x - 275x + 176x = 33 - 22 + 54 - 110 \quad , \quad -15x = -45 \quad , \quad 15x = 45 \quad , \quad x = \frac{45}{15} = 3$$

$x = 3$ è la **soluzione** dell'equazione data.

La **verifica** dell'equazione si effettua nella seguente maniera:

**1)** nell'equazione data al posto della x si sostituisce la soluzione trovata

**2)** si eseguono tutti i calcoli nel primo membro e nel secondo membro dell'equazione

**3)** il membro deve essere numericamente uguale al secondo membro

$$\frac{14 \cdot 3 - 9}{11} - \frac{1}{3}\left[\frac{17 \cdot 3}{2} - (5 - 4 \cdot 3)\right] = \frac{1}{2} - \frac{8 \cdot 3 + 1}{3} \quad , \quad \frac{42 - 9}{11} - \frac{1}{3}\left(\frac{51}{2} + 7\right) = \frac{1}{2} - \frac{25}{3}$$

$$3 - \frac{65}{6} = \frac{3 - 50}{6} \quad , \quad -\frac{47}{6} = -\frac{47}{6}$$

$$\mathbf{\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{x^2}{x^2-1}} \qquad x \neq \pm 1 \quad \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} \quad , \quad m.c.m. = (x+1)(x-1)$$

$$(x + 1)^2 - 3(x - 1) = x^2 \quad , \quad x^2 + 2x + 1 - 3x + 3 = x^2 \quad , \quad x = 4$$

$$\mathbf{\frac{6x}{16x^2-9} - \frac{5x - 3}{6x-8x^2} + \frac{2x + 9}{8x^2+6x} = \frac{5}{4x-3}}$$

$$\frac{6x}{(4x + 3)(4x - 3)} - \frac{5x - 3}{2x(3 - 4x)} + \frac{2x + 9}{2x(4x + 3)} = \frac{5}{4x - 3}$$

$$\frac{6x}{(4x + 3)(4x - 3)} + \frac{5x - 3}{2x(4x - 3)} + \frac{2x + 9}{2x(4x + 3)} = \frac{5}{4x - 3} \qquad m.c.m. = 2x(4x + 3)(4x - 3)$$

$$x \neq 0 \quad , \quad x \neq \pm\frac{3}{4} \qquad 12x^2 + (5x - 3)(4x + 3) + (2x + 9)(4x - 3) = 10x(4x + 3)$$

$$12x^2 + 20x^2 + 15x - 12x - 9 + 8x^2 - 6x + 36x - 27 = 40x^2 + 30x$$

$$15x - 12x - 6x + 36x - 30x = 9 + 27 \quad , \quad 3x = 36 \quad , \quad x = \frac{36}{3} = 12$$

$$\mathbf{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{2x-4} - \frac{1}{2x+4}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2-4}}$$

$$\frac{3}{2x} - \frac{1}{4(x - 2)} - \frac{1}{4(x + 2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x + 2)(x - 2)} \, , \; m.c.m. = 4x(x+2)(x-2) \, , \quad x \neq 0, x \neq \pm 1$$

$$6(x^2 - 4) - x(x + 2) - x(x - 2) = 4(x^2 - 4) - 4x, \; 6x^2 - 24 - x^2 - 2x - x^2 + 2x = 4x^2 - 16 - 4x$$

$$-2x + 2x + 4x = -16 + 24 \quad , \quad 4x = 8 \quad , \quad x = 2 \quad \textbf{(R.N.A.)}$$