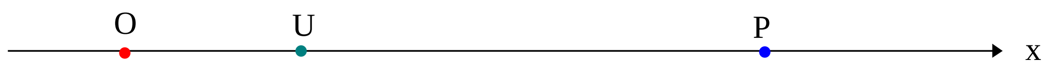
U.D. N° 08

I sistemi di primo grado a due incognite

Coordinate cartesiane

Su di una retta **r** consideriamo un punto **O**, detto **origine**, un **verso positivo** indicato con una freccia ed un **segmento unitario** $\overline{OU}$. In questo caso la retta **r** dicesi **asse delle ascisse** e viene indicata col simbolo x e di solito è disegnata in posizione orizzontale.



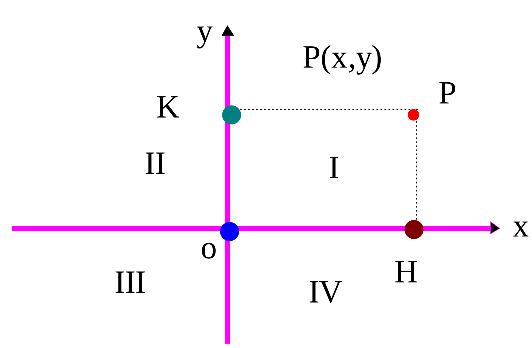
Ogni punto $P \in r$ individua il segmento $\overline{OP}$. Noi sappiamo che $\frac{\overline{OP}}{\overline{OU}}$ è un numero reale che esprime la misura del segmento $\overline{OP}$ rispetto al segmento $\overline{OU}$ assunto come segmento unitario .

Adesso poniamo: $\frac{\overline{OP}}{\overline{OU}} = x$ e conveniamo di considerare x **positivo** (**negativo**) se P si trova alla **destra** (**sinistra**) di **O**. Il numero x dicesi **ascissa del punto P**.

Da quanto abbiamo detto è evidente che esiste una **corrispondenza biunivoca** fra i numeri reali relativi $\mathbb{R}$ ed i punti **P** di una retta **r** sulla quale abbiamo fissato un **punto origine** **O**, un **verso positivo**, una **unità di misura** per i segmenti.

Adesso consideriamo due rette orientate **x** ed **y** fra loro perpendicolari. La retta **x** è orientata da sinistra verso destra, la retta **y** è orientata dal basso verso l'alto. Sia **O** il punto comune alle rette x ed y. Sia **P** un punto qualsiasi del piano. Sia **H** la proiezione ortogonale di P sulla retta x e K la proiezione ortogonale di P sulla retta y.

Sia $x = \frac{\overline{OH}}{\overline{OU}}$ l'ascissa del punto H rispetto alla retta orientata x, sia $y = \frac{\overline{OK}}{\overline{OU}}$ l'ascissa del punto K rispetto alla retta orientata y. I numeri reali relativi x ed y si dicono le **coordinate cartesiane** del punto **P**.



Si scrive $P(x,y)$ e si legge <<**P di coordinate x ed y**>>. x è detta **ascissa** del punto P, y è detta **ordinata** del punto P. La retta orientata **x** è detta **asse delle ascisse** o **asse delle x**, la retta orientata y è detta **asse delle ordinate** o **asse delle y**.

Le due rette x ed y costituiscono un **sistema di assi cartesiani ortogonali**. Il punto **O** è detto **origine degli assi**. Da quanto si è detto si deduce che esiste una **corrispondenza biunivoca** fra le coppie ordinate di numeri reali ed i punti di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani. Le rette **x** ed **y** dividono il piano in 4 parti ciascuna delle quali prende il nome di **quadrante**. Le rette **x** ed **y** e le loro due bisettrici dividono il piano in **8** parti, ciascuna delle quali prende il nome di **ottante**.

Sistema di primo grado a due incognite

Sistema di primo grado a due incognite è l'insieme di due equazioni di primo grado a due incognite di cui vogliamo trovare, quando esiste, la **soluzione comune**. Ridotto a forma **normale** o **canonica** o **tipica**, assume la seguente forma: $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$

dove x ed y sono le **incognite**, **a** ed a_1 sono i coefficienti dell'incognita x, **b** e b_1 sono i **coefficienti dell'incognita y,** c **e** c_1 sono **i termini noti**.

Un sistema di primo grado a due incognite può essere risolto con 4 metodi diversi:

1) metodo del confronto **2) metodo di sostituzione** **3) metodo di addizione e sottrazione** detto anche **metodo di riduzione** **4) metodo di Cramer**.

METODO DI SOSTITUZIONE

Si procede come segue:

1) Si risolve una delle due equazioni rispetto alla x (rispetto alla y)

2) L espressione così ricavata si sostituisce nell'altra equazione al posto della x (della y). Si ottiene una equazione di primo grado in y (x) la cui soluzione dà il valore della y (x)

3) Il valore trovato per la y (per la x) viene sostituito nell'espressione precedentemente trovata, pervenendo così al valore della x (della y).

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -5x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 4 - 3y \\ -5x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{4 - 3y}{2} \\ -5x + y = 7 \end{cases} \quad -5\left(\frac{4 - 3y}{2}\right) + y = 7 \quad \frac{-20 + 15y}{2} + y = 7$$

$$-20 + 15y + 2y = 14 \quad , \quad 17y = 20 + 14 \quad , \quad 17y = 34 \quad , \quad y = \frac{34}{17} = 2$$

$$x = \frac{4 - 3y}{2} = \frac{4 - 6}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad \mathbf{x = -1 \ , \ y = 2}$$

METODO DEL CONFRONTO

Si procede come segue:

1) Si risolvono le due equazioni del sistema rispetto alla medesima incognita ,ad esempio rispetto ad x

2) Si uguagliano le due espressioni algebriche ottenute e si perviene ad una equazione di primo grado in y

3) Si risolve questa equazione ottenendo il valore della y , cioè si ottiene $y = y_o$

4) Il valore dell'altra incognita (nel nostro caso x) si ottiene sostituendo quello trovato y_o in una qualsiasi delle due espressioni precedentemente trovate .

$$\begin{cases} 3x - 7y = 27 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{7y + 27}{3} \\ x = \dfrac{-2y + 4}{5} \end{cases} \qquad \frac{7y + 27}{3} = \frac{-2y + 4}{5} \quad , \quad 35y + 135 = -6y + 12$$

$$35y + 6y = -135 + 12 \quad , \quad 41y = -123 \quad , \quad y = -\frac{123}{41} = -3$$

$$x = \frac{7(-3) + 27}{3} = \frac{-21 + 27}{3} = \frac{6}{3} = 2 \qquad , \qquad x = 2 \; , \; y = -3$$

METODO DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE (o di **riduzione** o della **combinazione lineare**)

Si procede come segue:

1) Se vogliamo ricavare la x allora bisogna eliminare la y

2) Si calcola il **m.c.m.** tra i coefficienti della y, cioè tra **b** e b_1. Sia $k = m.c.m.(b, b_1)$. Si moltiplicano ambo i membri della prima equazione per $\frac{k}{b}$ ed ambo i membri della seconda equazione per $\frac{k}{b_1}$. Otteniamo due equazioni nelle quali i termini contenenti la y hanno coefficienti uguali od opposti.

3) Sommiamo o sottraiamo ambo i membri delle due equazioni così ottenute pervenendo ad una equazione di primo grado nella x, risolta la quale otteniamo il valore della x ,ad esempio $x = x_o$.

4) Il valore dell'altra incognita (nel nostro caso la y) può essere determinato con un procedimento analogo, oppure sostituendo il valore trovato x_o in una delle due equazioni del sistema e risolvendo l'equazione ad una incognita (nel nostro caso in x) che ne risulta

$$\begin{matrix} 2 \\ 7 \end{matrix} \begin{cases} 3x - 7y = 27 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases} \qquad m.c.m.(7,2) = 14 \quad , \quad \frac{14}{2} = 2 \quad , \quad \frac{14}{2} = 7$$

$$\begin{cases} 6x - 14y = 54 \\ 35x + 14y = 28 \\ \hline 41x \quad \neq \quad = 82 \end{cases} \qquad \text{sommiamo membro a membro} \quad , \quad x = \frac{82}{41} = 2$$

$$\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \begin{cases} 3x - 7y = 27 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases} \qquad m.c.m.(3,5) = 15 \quad , \quad \frac{15}{3} = 5 \quad , \quad \frac{15}{5} = 3$$

$$\begin{cases} 15x - 35y = 135 \\ 15x + 6y = 12 \\ \hline \neq \quad -41y = 123 \end{cases} \qquad \text{Si sottrae membro a membro} \qquad y = -\frac{123}{41} = -3$$

METODO DI CRAMER

Dati quattro numeri a, b, a_1, b_1 il numero $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1 b$ dicesi **determinante del secondo ordine** e si ottiene sottraendo dal prodotto dei termini della diagonale discendente il prodotto dei termini della diagonale ascendente.

Se il sistema che vogliamo risolvere è ridotto a forma canonica, cioè è del tipo: $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1 \end{cases}$

allora abbiamo:

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ = **determinante del sistema** = determinante formato dai coefficienti delle incognite

$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}$ = **determinante dell'incognita x** = determinante che si ottiene dal determinante del sistema sostituendo la colonna dei coefficienti della x con la colonna dei termini noti

$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}$ = **determinante dell'incognita y** = determinante che si ottiene dal determinante del sistema sostituendo la colonna dei coefficienti della y con la colonna dei termini noti

Le soluzioni del sistema dato ci vengono fornite dalle due seguenti frazioni:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - ba_1} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{ac_1 - ca_1}{ab_1 - ba_1}$$

$$\begin{cases} 3x - 7y = 27 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 27 & -7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{54 + 28}{6 + 35} = \frac{82}{41} = 2 \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 27 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12 - 135}{6 + 35} = -\frac{123}{41} = -3$$