Unità Didattica N°09

I RADICALI

Numeri reali

Dicesi **numero razionale** un qualsiasi numero che può essere scritto sotto forma i frazione. Sono pertanto **numeri razionali**: **1)** tutti i **numeri interi** **2)** tutti i **numeri decimali limitati** **3)** tutti i **numeri decimali periodici**. Dicesi **numero irrazionale** ogni numero che non può essere scritto sotto forma di frazione. Un numero **razionale** o **irrazionale** dicesi **reale**.

$$\text{numeri reali} \begin{cases} \text{RAZIONALI (numeri frazionari)} \begin{cases} \text{1) Numeri interi} \\ \text{2) Numeri decimali limitati} \\ \text{3) Numeri decimali periodici} \end{cases} \\ \\ \text{IRRAZIONALI} = \text{numeri che si possono scrivere sotto forma di frazione} = \\ \qquad = \text{numeri decimali illimitati e non periodici} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

Ogni numero irrazionale può essere espresso con esattezza solo mediante il simbolo che lo rappresenta e mai con un numero razionale. Ad esempio, sono irrazionali i seguenti numeri:

$$\sqrt{2} \quad , \quad \pi \quad , \quad \sqrt[3]{11}$$

Quando un numero irrazionale è dato mediante un numero intero o mediante un numero decimale, il valore che l'esprime è un valore **approssimato**.

Radicali Aritmetici

Se **n** è un numero naturale non nullo ed **a** un numero reale non negativo, definiamo **radice ennesima aritmetica** del numero positivo **a**, e la indichiamo con la scrittura $\sqrt[n]{a}$, il numero reale non negativo **x** la cui potenza ennesima è uguale ad **a**. Sussiste sempre la seguente equivalenza: $\sqrt[n]{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^n = a \qquad \forall\, a, x \in R^+ \quad , \quad \forall\, n \in N_o$

La scrittura $\sqrt[n]{a}$ dicesi **radicale aritmetico**, **a** dicesi **radicando**, **n** **indice del radicale**, il simbolo $\sqrt{\ }$ dicesi **segno di radice**.

Quando risulta $n = 2$ scriviamo $\sqrt{a}$ e leggiamo **radice quadrata di a**.

$n = 3 : \sqrt[3]{a}$ (**radice cubica** di a o radice terza di a), $n = 4 : \sqrt[4]{a}$ (radice quarta di a)

$n = 1 \ \Rightarrow \ \sqrt[1]{a} = a$ cioè la **radice prima di un numero è uguale al numero stesso**

<<L'operazione mediante la quale si passa dal numero reale **a** alla sua radice aritmetica **x** si chiama **estrazione di radice**>>.

OSSERVAZIONE N° 1

Se il radicale assume la forma $\sqrt[n]{a^m}$ diciamo che **m** è l'**esponente del radicando**, se assume la forma $\sqrt[n]{a^m \cdot b^k}$ diciamo che **m** e **k** sono gli **esponenti dei fattori del radicando**.

OSSERVAZIONE N° 2

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ cioè la **potenza ennesima della radice ennesima aritmetica del numero a è uguale al numero stesso**. Infatti: $\sqrt[n]{a} = x \ \Rightarrow \ x^n = a \ \Rightarrow \ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

PROPRIETA' INVARIANTIVA

Il valore di un radicale aritmetico non muta se moltiplichiamo o dividiamo l'indice del radicale e l'esponente del radicando per uno stesso numero positivo (non nullo). In simboli abbiamo:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n/p]{a^{m/p}}$$

SEMPLIFICAZIONE DI UN RADICALE

Per semplificare un radicale si procede come segue:

1) Si decompone il radicando in fattori primi

2) Si calcola i l M.C.D. fra l'indice del radicale e gli esponenti dei fattori del radicando

3) Si divide per il M.C.D. trovato l'indice e gli esponenti dei fattori del radicando

ESEMPI

$$\sqrt[6]{a^2(x+y)^{14}} = \sqrt[3]{a(x+y)^7} \qquad M.C.D.(6,2,14) = 2$$

$$\sqrt[8]{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = \sqrt[8]{\left(a^2 + b^2\right)^2} = \sqrt[4]{a^2 + b^2}$$

Un radicale si dice **irriducibile** o **ridotto ai minimi termini** quando risulta uguale ad **1** il M.C.D. fra l'indice del radicale e gli esponenti dei fattori del radicando.

Riduzione di due o più radicali allo stesso indice

Per ridurre due o più radicali allo stesso indice si procede come segue:

1) Si decompongono in fattori primi tutti i radicandi

2) Si rendono **irriducibili** tutti i radicali

3) Si calcola il **m.c.m.** fra gli indici di tutti i radicali e lo si assume come minimo comune indice per tutti i radicali

4) Si divide il m.c.m. per l'indice di ciascun radicale e si moltiplica il quoziente ottenuto per l'esponente di ogni fattore di ciascun radicando

$\sqrt[10]{a^4b^6}\ ,\ \sqrt[4]{a^2+2ab+b^2}\ ,\ \sqrt[3]{(b-5)^2}$	$\sqrt[10]{a^4b^6}\ ,\ \sqrt[4]{(a+b)^2}\ ,\ \sqrt[3]{(b-5)^2}$
$\sqrt[5]{a^2b^3}\ ,\sqrt{a+b}\ ,\sqrt[3]{(b-5)^2}\ ,\ m.c.m.(5,2,3)=30$	$\sqrt[30]{a^{12}b^{18}}\ ,\ \sqrt[30]{(a+b)^{15}}\ ,\ \sqrt[30]{(b-5)^{20}}$

Moltiplicazione di radicali

Teorema: Il prodotto di due o più radicali aritmetici aventi lo stesso indice è un radicale aritmetico che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi. In simboli abbiamo: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

Esempio: $\sqrt[5]{\dfrac{x+y}{x-y}}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x+y}}=\sqrt[5]{\dfrac{x+y}{x-y}\cdot\dfrac{(x-y)^2}{x+y}}=\sqrt[5]{x-y}$

Osservazione: Per moltiplicare due o più radicali aventi indici diversi occorre ridurli prima allo stesso indice e poi moltiplicarli.

ESEMPIO

$$\sqrt[3]{\frac{xy-y^2}{x}}\cdot\sqrt{\frac{x}{2x-2y}}=\sqrt[3]{\frac{y(x-y)}{x}}\cdot\sqrt{\frac{x}{2(x-y)}}=\sqrt[6]{\frac{y^2(x-y)^2}{x^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{x^3}{8(x-y)^3}}=\sqrt[6]{\frac{y^2(x-y)^2}{x^2}\cdot\frac{x^3}{8(x-y)^3}}$$

$$=\sqrt[6]{\frac{xy^2}{8(x-y)}}$$

Divisione di due radicali

Teorema: Il quoziente di due radicali aritmetici di uguale indice è un radicale aritmetico che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi. In simboli abbiamo:

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b} \quad \text{oppure} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{n}}$$

ESEMPIO

$$\sqrt[6]{\frac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)^3}}:\sqrt[6]{\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}} = \sqrt[6]{\frac{(x-y)^2}{(x+y)^3}\cdot\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}} = \sqrt[6]{\frac{(x-y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)^2(x^2+xy+y^2)}}$$

OSSERVAZIONE

Per dividere due radicali aventi indici diversi occorre ridurli preventivamente allo stesso indice.

$$\sqrt[4]{\frac{2x^2}{x^2-y^2}}:\sqrt{\frac{2x}{x-y}} = \sqrt[4]{\frac{2x^2}{(x-y)(x+y)}}:\sqrt[4]{\frac{4x^2}{(x-y)^2}} = \sqrt[4]{\frac{2x^2(x-y)^2}{(x-y)(x+y)4x^2}} = \sqrt[4]{\frac{x-y}{2(x+y)}}$$

Trasporto di un fattore positivo sotto il segno di radice

Quando un radicale è moltiplicato per un fattore positivo, tale fattore può essere trasportato sotto il segno di radice, come fattore del radicando, purché venga elevato ad una potenza uguale all'indice del radicale. In simboli abbiamo: $a^m\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{m\cdot n}\cdot b}$

Esempi: $(a+b)\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}} = \sqrt{(a+b)^2\cdot\frac{1}{(a+b)(a-b)}} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, $2\cdot\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3\cdot 5} = \sqrt[3]{8\cdot 5} = \sqrt[3]{40}$

Trasporto di un fattore positivo fuori dal segno di radice

Se **m** ed **n** sono due numeri interi, se $m \geq n$, se **q** è il quoziente della divisione di **m** per **n** ed **r** è il resto, allora possiamo scrivere:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^q\cdot\sqrt[n]{a^r} \qquad m = n\cdot q + r$$

m	n
r	q

REGOLA

Regola: Un fattore positivo del radicando avente esponente non minore dell'indice del radicale può essere portato fuori dal segno di radice come fattore che risulta essere una potenza avente come esponente il quoziente **q**; all'interno del radicale rimane come fattore una potenza avente come esponente il resto **r**.

Se risulta $r = 0$ allora il fattore del radicando, essendo uguale ad 1, non si scrive

$$\sqrt[5]{x^4(a-b)^{15}(a+b)^{18}} = (a-b)^3(a+b)^3\cdot\sqrt[5]{x^4(a+b)^3}$$

Osservazione: Per trasportare un fattore fuori dal segno di radice bisogna prima decomporre in fattori il radicando ed, eventualmente, semplificare il radicale.

$$\sqrt{\frac{\left(a^2-b^2\right)^5}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}} = \sqrt{\frac{(a-b)^5(a+b)^5}{(x+y)^3}} = \frac{(a-b)^2(a+b)^2}{x+y}\sqrt{\frac{(a-b)(a+b)}{x+y}} = \frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{x+y}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{x+y}}$$

Potenza di un radicale aritmetico

Per elevare a potenza un radicale basta elevare a quella potenza il radicando.

$$\left(\sqrt[n]{\mathbf{a}}\right)^{\mathbf{m}} = \sqrt[n]{\mathbf{a}^{\mathbf{m}}}$$

$$\left(\sqrt[5]{(x+y)^2(x-y)^2}\right)^4 = \sqrt[5]{(x+y)^8(x-y)^{12}} = (x+y)(x-y)^2\cdot\sqrt[5]{(x+y)^3(x-y)^2}$$

Osservazione: Se l'indice del radicale e l'esponente della potenza ammettono un **M.C.D.** allora, prima di elevare il radicale alla data potenza, bisogna semplificare.

$$\left(\sqrt[\cancel{6}\,3]{(x-y)^3(x+y)^5}\right)^{\cancel{14}\;7} = \sqrt[3]{(x-y)^{21}(x+y)^{35}} = (x-y)^7(x+y)^{11}\sqrt[3]{(x+y)^2}$$

Radice aritmetica di un radicale aritmetico

La radice aritmetica di indice **m** di un radicale aritmetico di indice **n** e radicando **a** è un radicale aritmetico di indice $m\cdot n$ e radicando **a**. In simboli abbiamo: $\sqrt[\mathbf{m}]{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a}}} = \sqrt[\mathbf{m\cdot n}]{\mathbf{a}}$

$$\sqrt[5]{\sqrt{a^{35}}} = \sqrt[10]{a^{35}} = \sqrt{a^7} = a^3\cdot\sqrt{a} \quad , \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{3\sqrt{2}}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{18}}} = \sqrt[30]{18}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt[4]{\frac{y}{x}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{x^4}{y^4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{y}{x}}} = \sqrt[3]{\sqrt[12]{\frac{x^{16}}{y^{16}}}\cdot\sqrt[12]{\frac{y^3}{x^3}}} = \sqrt[3]{\sqrt[12]{\frac{x^{16}}{y^{16}}\cdot\frac{y^3}{x^3}}} = \sqrt[36]{\frac{x^{13}}{y^{13}}}$$

Somma algebrica di radicali aritmetici

Definizione: Un radicale aritmetico si dice **ridotto** quando sul radicando si sono eseguite tutte le semplificazioni possibili e si sono portati fuori dal segno di radice tutti quei fattori aventi esponenti maggiore o uguale dell'indice del radicale. Il fattore che si trova davanti ad un radicale ridotto si chiama **coefficiente del radicale**.

Definizione: Due o più radicali aritmetici si dicono **simili** quando hanno lo stesso indice, lo stesso radicando e differiscono, eventualmente, solo per il coefficiente. Sono **simili** i seguenti radicali: $2\sqrt[5]{ab^2}$, $ab^2\sqrt[5]{ab^2}$, $-\frac{1}{4}x\sqrt[5]{ab^2}$

Regola: La **somma algebrica** di due o più radicali simili è un radicale simile ai dati ed avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

$$3\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3}-\sqrt{8}+\frac{1}{5}\sqrt{108}-\frac{1}{2}\sqrt{18}=3\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\frac{6}{5}\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{2}=$$

$$=\left(3-2-\frac{3}{2}\right)\sqrt{2}+\left(-\frac{3}{4}+\frac{6}{5}\right)\sqrt{3}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{9}{20}\sqrt{3}$$

Razionalizzazione del denominatore di una frazione

Razionalizzare il denominatore di una frazione significa trovare una frazione equivalente alla data avente il denominatore privo di radicali. Si possono presentare diversi casi:

primo caso Il denominatore presenta come fattore il termine $\sqrt{b}$

La **razionalizzazione** avviene moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{b}$.

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{b}}}=\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{b}}}\cdot\frac{\sqrt{\mathbf{b}}}{\sqrt{\mathbf{b}}}=\frac{\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{b}}}{\left(\sqrt{\mathbf{b}}\right)^2}=\frac{\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{b}}}{\mathbf{b}}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{2\cdot 6}=\frac{\sqrt{6}}{4} \quad , \quad \frac{x}{\sqrt{x+y}}=\frac{x}{\sqrt{x+y}}\cdot\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y}}=\frac{x\sqrt{x+y}}{x+y}$$

secondo caso Il denominatore presenta come fattore il termine $\sqrt[n]{a^m}$ con $m<n$.

La **razionalizzazione** avviene moltiplicando numeratore e denominatore per: $\sqrt[n]{a^{n-m}}$

$$\frac{\mathbf{n}}{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a^m}}}=\frac{\mathbf{b}}{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a^m}}}\cdot\frac{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a^{n-m}}}}{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a^{n-m}}}}=\frac{\mathbf{b}\cdot\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a^{n-m}}}}{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a^{n-m+m}}}}=\frac{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a^{n-m}}}}{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a^{n}}}}=\frac{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a^{n-m}}}}{\mathbf{a}}$$

$$\frac{2}{7\sqrt[5]{2^3}}=\frac{2}{7\sqrt[5]{2^3}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{4}}{7\cdot\sqrt[5]{2^5}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{4}}{14}$$

terzo caso Il denominatore presenta come fattore la somma algebrica di due radicali quadratici, oppure la somma algebrica di un radicale quadratico e di una espressione non contenente radicali. Se il fattore è $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ la **razionalizzazione** avviene moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, se il fattore è $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ si moltiplica per $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, se il fattore è $a+\sqrt{b}$ si moltiplica per $a-\sqrt{b}$, se il fattore è $a-\sqrt{b}$ si moltiplica per $a+\sqrt{b}$.

$$\frac{4}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{4}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}\cdot\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{4\cdot\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{4\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{18-6}=\frac{4\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{12}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{9-5}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

quarto caso Il denominatore presenta come fattore la **somma** (differenza) di due **radicali cubici** $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ ($\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$). La **razionalizzazione** avviene moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ ($\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$)

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}$$

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b}$$

$$\frac{m}{c\sqrt[3]{a}+d\sqrt[3]{b}}=\frac{m\left(c^2\sqrt[3]{a}-cd\sqrt[3]{ab}+d^2\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(c\sqrt[3]{a}+d\sqrt[3]{b}\right)\left(c^2\sqrt[3]{a}-cd\sqrt[3]{ab}+d^2\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{m\left(c^2\sqrt[3]{a}-cd\sqrt[3]{ab}+d^2\sqrt[3]{b^2}\right)}{c^3a+d^3b}$$

$$\frac{m}{c\sqrt[3]{a}-d\sqrt[3]{b}}=\frac{m\left(c^2\sqrt[3]{a}+cd\sqrt[3]{ab}+d^2\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(c\sqrt[3]{a}-d\sqrt[3]{b}\right)\left(c^2\sqrt[3]{a}+cd\sqrt[3]{ab}+d^2\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{m\left(c^2\sqrt[3]{a}+cd\sqrt[3]{ab}+d^2\sqrt[3]{b^2}\right)}{c^3a-d^3b}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{2\left(\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{16}\right)}{\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{16}\right)}=\frac{2\left(\sqrt[3]{36}-2\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{2}\right)}{6+4}=\frac{\sqrt[3]{36}-2\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{2}}{5}$$

Radicali doppi

Si chiama **radicale doppio** ogni espressione avente la forma $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ oppure $\sqrt{a-\sqrt{b}}$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Le suddette formule sono utili se a^2-b è un **quadrato perfetto**. In questo caso il radicale doppio si trasforma nella somma algebrica di due radicali semplici.

$$\sqrt{7+\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-40}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-40}}{2}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{9}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{9}}{2}} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$$

Radicali algebrici

Finora abbiamo supposto che il radicando sia un numero reale positivo e che il risultato dell'estrazione della radice sia unico ed espresso da un numero reale positivo, cioè la radice aritmetica di un numero positivo esiste sempre ed è un numero positivo.

Adesso abbandoniamo tale ipotesi restrittiva e supponiamo che $a \in R$. Definiamo **radice ennesima algebrica** del numero reale relativo a, il numero reale relativo x (se esiste) che ha come potenza ennesima il numero a. $\sqrt[n]{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^n = a \qquad \forall\, a, x \in R \quad , \quad \forall\, n \in N_o$

Abbiamo visto che la **radice ennesima aritmetica** di un numero positivo esiste sempre e rappresenta un solo valore positivo. Per i **radicali algebrici** le cose vanno diversamente:

1) radicando positivo $(a > 0)$, n **pari**

In questo caso $\sqrt[n]{a}$ rappresenta due valori espressi da due numeri opposti.

$$\sqrt{4} = \pm 2 \qquad \text{Infatti : } \quad (\pm 2)^2 = 4$$

2) radicando positivo $(a > 0)$, n **dispari**

La radice ennesima algebrica di un numero reale positivo ad indice dispari ha un unico valore positivo, cioè il simbolo $\sqrt[n]{a}$ rappresenta un numero positivo $\qquad \sqrt[3]{8} = 2$

3) radicando negativo $(a < 0)$, n **dispari**

La radice ennesima algebrica di un numero reale negativo ad indice dispari ha un unico valore negativo, cioè il simbolo $\sqrt[n]{a}$ rappresenta un numero negativo $\qquad \sqrt[3]{-8} = -2$

4) radicando negativo $(a < 0)$, n **pari**

La radice ennesima algebrica di un numero reale negativo ad indice pari non esiste nel campo dei numeri reali, cioè se $a \in R^-$, il simbolo $\sqrt[n]{a}$ non ha significato in quando non esiste nessun numero reale la cui potenza ad indice pari è un numero negativo. $\sqrt{-4}$ non esiste nel campo dei numeri reali in quanto non è possibile trovare un numero reale relativo il cui quadrato è -4 .

CONCLUSIONI

1) per n **pari**, ogni numero reale positivo ammette due radici ennesime algebriche fra loro opposte; ogni numero reale negativo non ne ammette

2) per n **dispari**, ogni numero reale ammette una radice ennesima algebrica ed una sola, la quale è positiva o negativa se tale è il numero considerato.

OSSERVAZIONE N° 1

Il simbolo $\sqrt[n]{a}$ è utilizzato tanto per indicare un **radicale aritmetico** quanto per indicare un radicale algebrico. Si dovrebbero usare simboli diversi come avviene in altre nazioni:

$\sqrt[n]{\overline{a}}$ = **radice aritmetica** del numero reale a , $\sqrt[n]{a}$ = **radice algebrica** del numero reale a $\sqrt[n]{a}^{*}$ = **radice complessa** del numero reale a , o radice del numero reale a nel campo dei numeri complessi .

La consuetudine italiana attribuisce al simbolo $\sqrt[n]{a}$ il significato di **radice aritmetica**; nel caso in cui il simbolo $\sqrt[n]{a}$ va considerato come **radicale algebrico** bisogna dichiararlo esplicitamente .

OSSERVAZIONE N ° 2

In R il simbolo $\sqrt[n]{a}$ può avere due significati:

1) quello di **radicale aritmetico** se $a \in R^+$ ed allora il simbolo rappresenta un solo numero positivo

2) quello di **radicale algebrico** se $a \in R$ ed allora il simbolo rappresenta due numeri relativi , un solo numero relativo , nessun numero reale relativo .

Potenze ad esponente frazionario

Possiamo estendere il concetto di potenza al caso in cui l'esponente è una frazione. Questo è possibile solo se la base è un numero reale positivo. $\forall \in R^+$, $\forall m, n \in N$ poniamo:

$$\mathbf{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

cioè, la potenza ad esponente frazionario (positivo) di un numero reale positivo è uguale al radicale aritmetico che ha per indice il denominatore della frazione e per esponente del radicando il numeratore della frazione stessa. Una potenza di un numero reale positivo avente come esponente un numero frazionario negativo viene definita dalla seguente relazione: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Per le potenze ad esponente frazionario valgono le seguenti proprietà formali:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \qquad a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \qquad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{ap}{nq}} \qquad (a \cdot b \cdot c)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} \cdot c^{\frac{m}{n}} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

$$2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \qquad , \qquad 3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2} = \sqrt[7]{9}$$

OSSERVAZIONE

Una potenza che sia fattore del numeratore (o del denominatore) di una frazione può essere portata al denominatore (numeratore) mutando il segno dell'esponente .

$$\frac{a^{\frac{5}{2}} \cdot b^2 \cdot x^{-\frac{2}{3}}}{(a+b)^{\frac{3}{4}} \cdot (a-b)^{-\frac{5}{3}}} = \frac{b^2 \cdot x^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{5}{2}} \cdot (a+b)^{\frac{3}{4}} \cdot (a-b)^{-\frac{5}{3}}} = \frac{b^2 \cdot (a - b)^{\frac{5}{3}}}{a^{-\frac{5}{2}} \cdot (a+ b) \cdot x^{\frac{2}{3}}}$$