Unità Didattica N°10

I NUMERI COMPLESSI

I numeri complessi

Noi sappiamo che la radice quadrata di un numero negativo non esiste nel campo dei numeri reali. Infatti $\sqrt{-4}$ non esiste in **R** in quanto non è possibile trovare un numero reale il cui quadrato è -4

Per rendere possibile l'estrazione di radice ad indice pari di un numero reale negativo si introducono i **numeri immaginari**. Si pone per definizione: $\sqrt{-1} = i$ cioè: $i^2 = -1$

Il simbolo **i**, che rappresenta la radice quadrata del numero -1, è detto **unità immaginaria**.

Si definisce poi **numero immaginario** il simbolo bi, che esprime il prodotto del numero reale **b** per l'unità immaginaria **i**. Infine, dicesi **numero complesso** la somma di un numero reale **a** e di un numero immaginario bi. Un **numero complesso** assume la seguente forma: **a + bi**

Due **numeri complessi** si dicono **coniugati** quando hanno la stessa parte reale ed opposti i coefficienti dell'unità immaginaria. I due seguenti numeri $a + bi$ e $a - bi$ sono **complessi e coniugati**.

Il prodotto di due numeri complessi e coniugati è un numero reale. Infatti abbiamo:

$(a+bi)(a-bi) = a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - bi^2 = a^2 + b^2$ che è un numero reale in quanto somma di due numeri reali.

Le operazioni di **addizione**, **sottrazione**, **moltiplicazione** si eseguono alla stessa maniera dei numeri reali con l'unica avvertenza di ricordare che risulta: $i^2 = -1$.

La divisione tra due numeri complessi si effettua ricordando che il prodotto di due numeri complessi e coniugati è un numero reale:

- $\dfrac{2-3i}{5+6i} = \dfrac{2-3i}{5+6i} \cdot \dfrac{5-6i}{5-6i} = \dfrac{(2-3i(5-6i))}{25+36} = \dfrac{10-12i-15i+15}{61} = \dfrac{25-27i}{61} = \dfrac{25}{61} - \dfrac{27}{61}i$

- $\dfrac{4-3i}{-2+5i} = \dfrac{4-3i}{-2+5i} \cdot \dfrac{-2-5i}{-2-5i} = \dfrac{-8+6i-20i+15i^2}{4-25i^2} = \dfrac{-23-14i}{29} = -\dfrac{23}{29} - \dfrac{14}{29}i$

- $\dfrac{1}{3-4i} = \dfrac{1}{3-4i} \cdot \dfrac{3+4i}{3+4i} = \dfrac{3+4i}{9+16} = \dfrac{3+4i}{25} = \dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25}i$

Ulteriori precisazioni su come operare con i numeri complessi

Dalla relazione $\mathbf{i^2 = -1}$ deduciamo: $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ $\quad \mathbf{i^3 = -i}$ $\quad i^4 = \left(i^2\right)^2 = \left(-1\right)^2 = 1$ $\quad \mathbf{i^4 = 1}$ $\quad i^5 = i^4 \cdot i = i$ e così di seguito. Da tutto ciò deduciamo che le potenze dell'unità immaginaria i si ripetono con un periodo uguale a quattro. $\mathbf{i^{4n} = 1}$ $\quad \mathbf{i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1 \cdot i = i}$, $\quad \mathbf{i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = -1}$, $\quad \mathbf{i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = -i}$, $\mathbf{i^{4n+4} = i^{4n} \cdot i^4 = 1}$ con $n = 0,1,2,3,4,.....$ Queste relazioni ci consentono di calcolare il valore di qualsiasi potenza di i con esponente naturale. In **forma compatta** abbiamo:

$$\mathbf{i^k = i^{m+4n} = i^m = \begin{cases} i^0 = 1; & m = 0 \\ i = i; & m = 1 \\ i^2 = -1; & m = 2 \\ i^3 = -i; & m = 3 \end{cases}} \qquad \text{con} \quad m = 0,1,2,3 \quad \text{ed} \quad n \in N \qquad \text{N.B.} \quad i^4 = i^0 = 1$$

n rappresenta la **parte intera** del quoziente tra i numeri k e 4, **m** è il **resto** della divisione tra i numeri **k** e **4**. $\frac{k}{4} = n + \frac{m}{4}$ $\quad k = 4n + m$

- Il calcolo con i numeri complessi dati in forma algebrica $a + ib$ è identico al calcolo coi numeri reali che conosciamo già, con la sola avvertenza che l'unità immaginaria i è sottoposta alla regola speciale $\mathbf{i^2 = -1}$ $\quad \mathbf{i^3 = -i}$ $\quad \mathbf{i^4 = 1}$ $\quad i^5 = i$ e così di seguito.

Esempi: $i^{373} = i^{4 \cdot 93+1} = i^{372+1} = i$ $\quad \frac{373}{4} = 93 + \frac{1}{4}$ $\quad n = 93 \quad m = 1$

$i^{1282} = i^{4 \cdot 320+2} = i^{1280+2} = i^2 = -1$ $\quad \frac{1282}{4} = 320 + \frac{2}{4}$ $\quad n = 320 \quad m = 2$

$i^{87} = i^{4 \cdot 21+3} = i^{84+3} = i^3 = -i$ $\quad \frac{87}{4} = 21 + \frac{3}{4}$ $\quad n = 21 \quad m = 3$

Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Piano complesso di Gauss

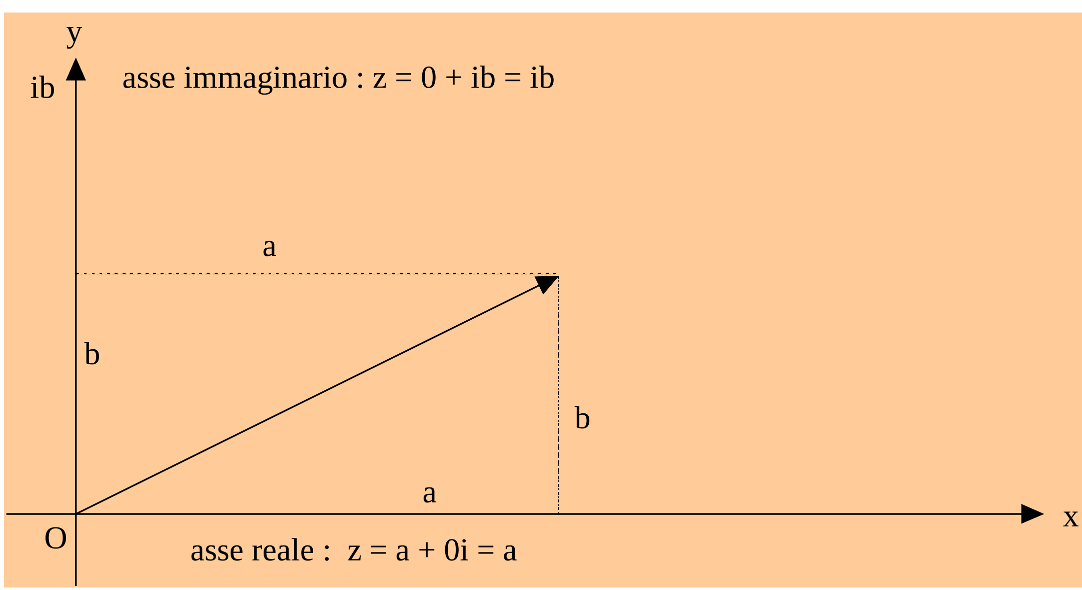
Nello studio dei numeri reali abbiamo visto che esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali e i punti di una **retta orientata** sulla quale abbiamo fissato una origine ed una unità di misura. Adesso vogliamo fare vedere che esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri complessi ed i punti di un piano.

Riferiamo il piano ad un **sistema ortonormale** di assi cartesiani di origine O. Consideriamo un qualsiasi numero complesso $a + ib$ e ad esso facciamo corrispondere il punto $P(a,b)$ del piano cartesiano che ha come ascissa la parte reale a e come ordinata il coefficiente b della parte immaginaria.

E' evidente che ad ogni numero complesso $z = a + ib$ corrisponde uno ed un sol punto del piano . Viceversa , fissato un punto $P(a,b)$ del piano si faccia corrispondere ad esso il numero complesso $z = a + ib$ che ha come parte reale l'ascissa a e come coefficiente dell'unità immaginaria l'ordinata b . E' evidente che ad ogni punto $P(a,b)$ corrisponde uno ed un solo numero complesso . Resta pertanto stabilita una corrispondenza biunivoca fra i punti P del piano ed i numeri complessi .

Il punto $P(a,b)$ chiamasi **immagine** del numero complesso , mentre $a + ib$ si dice **affissa** di P .

Il piano considerato ricoperto dalle immagini dei numeri complessi è detto **piano complesso** o **piano di Argand** o **piano di Gauss**. Si noti che, in particolare, le immagini dei numeri complessi reali, essendo punti di ordinata nulla, sono situate sull'asse delle ascisse il quale dicesi **asse reale** del piano complesso .



Le **immagini** dei **numeri complessi immaginari** $(z = 0 + ib = ib)$ essendo punti di ascissa nulla, sono situate sull'asse delle y che dicesi **asse immaginario** del piano complesso.

Spesso l'immagine di un numero complesso si rappresenta col numero stesso e nel linguaggio corrente si parla, talvolta, di ascissa e ordinata di un numero complesso rispettivamente in luogo di ascissa ed ordinata della corrispondente immagine.

Da quanto detto si deduce che i **numeri reali** occupano tutti e soltanto i punti di una retta (l'asse reale o asse delle ascisse), mentre i **numeri complessi** occupano tutti e soltanto i punti di un piano.

Rappresentazione dei numeri complessi mediante vettori

Un'altra rappresentazione o interpretazione geometrica dei numeri complessi nel piano cartesiano (equivalente, in fondo, alla precedente) è la seguente: sia $P(a,b)$ l'immagine del numero complesso $z = a + ib$ e si consideri il vettore $\overrightarrow{OP} = P - O$ le cui componenti lungo gli assi cartesiani sono **a** e **b** dovendosi avere : $\vec{\mathrm{v}} = \overrightarrow{OP} = P - O = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \overrightarrow{iu}$

Pertanto il numero complesso $z = a + ib$ determina univocamente il vettore $\vec{\mathrm{v}} = P - O$ e, viceversa, questo vettore determina univocamente (mediante le sue componenti lungo gli assi cartesiani) il numero complesso $z = a + ib$: cioè tra i vettori del piano applicati nel punto O ed i numeri complessi sussiste una **corrispondenza biunivoca**.

Pertanto, come immagine del numero complesso $z = a + ib$, invece del punto $P(a,b)$ si può prendere il **vettore** di componenti cartesiane a, b applicato nell'origine O. Questo ci consente di affermare che <<l'insieme dei numeri complessi, anziché dall'insieme dei **punti** di un piano, può essere rappresentato dall'insieme dei **vettori** del piano applicati nell'origine O>>.