Unità Didattica N° 11

Le equazioni di secondo grado ad una incognita

Equazioni di secondo grado ad una incognita

Dicesi **equazione di secondo grado ad una incognita** ogni equazione riconducibile alla seguente forma: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ **[*]**

La [*] è detta anche **forma tipica**, o **normale** o **canonica** dell'equazione di secondo grado.

ax^2 = **termine quadratico**, bx = **termine lineare**, c = **termine noto** o terzo coefficiente

a = **primo coefficiente** o **coefficiente del termine quadratico**

b = **secondo coefficiente** o **coefficiente del termine lineare**

Risulta sempre: $a \neq 0$. Infatti se fosse $a = 0$, l'equazione **[*]** sarebbe di primo grado.

Se risulta: $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ l'equazione **[*]** dicesi **equazione completa**. In caso contrario dicesi **incompleta**.

OSSERVAZIONE N° 1

Dicesi **soluzione** o **radice** di una equazione ad una incognita, ogni numero che, sostituito al posto dell'incognita, rende il primo membro numericamente uguale al secondo membro.

OSSERVAZIONE N° 2

Una equazione di secondo grado ad una incognita ammette due soluzioni che vengono indicate coi simboli x_1 ed x_2. Nel caso di **soluzioni reali** si pone per convenzione: $x_1 < x_2$, cioè x_1 rappresenta la radice minore, mentre x_2 rappresenta la radice maggiore.

Risoluzione delle equazioni di secondo grado incomplete

$b = 0$ L'equazione **[*]** diventa: $\mathbf{ax^2 + c = 0}$ [2] e si dice **equazione di secondo grado pura**. Essa si risolve nella seguente maniera:

$$ax^2 = -c \quad , \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad , \quad \mathbf{x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}} \quad , \quad x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad , \quad x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

ESEMPI

$$9x^2 - 4 = 0 \quad , \quad 9x^2 = 4 \quad , \quad x^2 = \frac{4}{9} \quad , \quad x = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3} \quad , \quad x_1 = -\frac{2}{3} \quad , \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

$$x^2 + 81 = 0 \; , \quad x^2 = -81 \quad , \quad x = \pm\sqrt{-81} = \pm 9i \quad , \quad x_1 = -9i \quad , \quad x_2 = 9i$$

$16x^2 - 27 = 0$, $16x^2 = 27$, $x^2 = \frac{27}{16}$, $x = \pm\sqrt{\frac{27}{16}} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{3}$, $x_1 = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$, $x_1 = \frac{3}{4}\sqrt{3}$

$c = 0$ L'equazione **[*]** diventa: **$ax^2 + bx = 0$** [3]

Essa prende il nome di **equazione di secondo grado spuria**. Si risolve nella seguente maniera: $x(ax + b) = 0$

Applicando la legge di annullamento di un prodotto di fattori scriviamo:

$$x = 0 \quad , \quad ax + b = 0 \quad , \quad ax = -b \quad , \quad x = -\frac{b}{a}$$

Le radici dell'equazione [3] sono: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$

ESEMPI

$x^2 - 21x = 0$, $x(x - 21) = 0$, $x = 0$, $x - 21 = 0$, $x = 21$, $x_1 = 0$, $x_2 = 21$

$3x^2 + 5x = 0$, $x(3x + 5) = 0$, $x = 0$, $3x + 5 = 0$, $x = -\frac{5}{3}$, $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = 0$

Osservazione: La **legge di annullamento di un prodotto di fattori** dice che <<*se un prodotto di fattori è nullo, allora almeno uno dei fattori è nullo*>>.

ALTRI ESEMPI

$$4(x+2)(x-4)-(6-x)(x-4)=7(x-6)(x+2)$$

$$4(x^2-4x+2x-8)-(6x-24-x^2+4x)=7(x^2+2x-6x-12)$$

$$4x^2-8x-32-20x+48+2x^2=7x^2-28x-84 \; , \; -x^2 = -100 \; , \; x^2 = 100$$

$$x = \pm\sqrt{100} = \pm 10 \quad , \; x_1 = -10 \; , \; x_2 = 10$$

$$(x+3)^2-(x+1)^2=(x+2)^2$$

$$x^2+6x+9-x^2-2x-1=x^2+4x+4 \; , \; -x^2 = -4 \; , \; x^2 = 4 \; , \; x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$x_1 = -2 \quad , \quad x_1 = -2$$

$$(x+3)(2x+5)-(x-2)(x-3)=13-(x+2)^2$$

$$2x^2 + 5x + 6x + 15 - x^2 + 3x + 2x - 6 = 13 - x^2 - 4x - 4 \; , \quad 2x^2 + 20x = 0$$

$$x = 0 \; , \quad x + 10 = 0 \quad , \quad x = -10 \quad , \quad x_1 = -10 \quad , \quad x_2 = 0$$

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{7-x}{x+3} + \frac{30}{(x-3)(x+3)}$$

Si tratta di un'equazione frazionaria in quanto l'incognita x figura al denominatore.

$$m.c.m. = (x - 3)(x + 3) \qquad x \neq \pm 3$$

$$(x + 3)^2 = (7 - x)(x - 3) + 30 \quad , \quad x^2 + 6x + 9 = 7x - 21 - x^2 + 3x + 30$$

$$2x^2 - 4x = 0 \quad ; \quad 2x(x - 2) = 0 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad x - 2 = 0 \quad , \quad x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2$$

Risoluzione dell'equazione di secondo grado completa

Vogliamo risolvere l'equazione di secondo grado completa $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

Si trasporta il termine noto al secondo membro: $ax^2 + bx = -c$

Moltiplichiamo ambo i membri per $4a$: $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Aggiungiamo ad ambo i membri il numero b^2: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \quad , \quad 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \quad , \quad 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad \textbf{[1]}$$

La [1] prende il nome di **formula risolutiva** dell'equazione di secondo grado. Il numero $\Delta = b^2 - 4ac$ dicesi **delta** o **discriminante** dell'equazione di secondo grado.

In una equazione di secondo grado completa possiamo supporre $a > 0$. In questo caso la radice più piccola è: $\mathbf{x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ mentre la radice più grande è: $\mathbf{x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Il discriminante Δ dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ può essere $\gtreqless 0$.

Discutiamo separatamente i tre casi:

1) $\Delta > 0$: se il delta è maggiore di zero l'equazione ammette due **radici reali e distinte**, $x_1 \neq x_2$

2) $\Delta = 0$: se il delta è uguale a zero l'equazione ammette due **radici reali e coincidenti**,

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

3) $\Delta > 0$: se il delta è minore di zero l'equazione ammette due **radici complesse e coniugate**

ESEMPI

$12x^2 - 67x + 35 = 0$ $a=12 \quad b=-67 \quad c=35 \quad \Delta=b^2-4ac=4489-1680=2809=53^2$

$$x = \frac{67 \pm \sqrt{2809}}{24} = \frac{67 \pm 53}{24} = \begin{cases} \dfrac{67 - 53}{24} = \dfrac{7}{12} = x_1 \\ \dfrac{67 + 53}{24} = 5 = x_2 \end{cases}$$

$2x^2-6x+1=0$ $a = 2 , b = -6 , c = 1$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 8}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \begin{cases} \dfrac{2(3 - \sqrt{7})}{4} = \dfrac{3 - \sqrt{7}}{2} = x_1 \\ \dfrac{2(3 + \sqrt{7})}{4} = \dfrac{3 + \sqrt{7}}{2} = x_2 \end{cases}$$

$3x^2-5x+4=0$ $a = 3 , b = -5 , c = 4$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 48}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{6} = \frac{5 \pm i\sqrt{23}}{6} = \begin{cases} \dfrac{5 - i\sqrt{23}}{6} = x_1 \\ \dfrac{5 + i\sqrt{23}}{6} = x_2 \end{cases}$$

Formula risolutiva ridotta e ridottissima

La formula risolutiva di una equazione di secondo grado è: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ [1]

Essa può scriversi nella seguente maniera:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4\cdot\left(\frac{b^2}{4}\right) - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm 2\cdot\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{2a}$$

Dividendo numeratore e denominatore per 2 otteniamo: $\mathbf{x = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}}$ [2]

La [2] è detta **formula ridotta** e si applica quando il coefficiente b è un **numero pari**, cioè quando è divisibile per 2. L'espressione $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac = \dfrac{b^2}{4} - ac = \dfrac{b^2 - 4ac}{4} = \dfrac{\Delta}{4}$ dicesi **discriminante ridotto**.

Se poi risulta anche $a = 1$ la [2] diventa: $\mathbf{x = -\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}}$ [3]

RIEPILOGO

1) La **formula ridotta** si applica quando **b** è un **numero pari**

2) La **formula ridottissima** si applica quando **b** è un **numero pari** ed **a** risulta uguale ad **1**

$3x^2 - 8x + 4 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{3} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{3} = \frac{4 \pm 2}{3} = \begin{cases} \dfrac{4-2}{3} = \dfrac{2}{3} = x_1 \\ \dfrac{4+2}{3} = 2 = x_2 \end{cases}$$

$x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 1} = 2 \pm \sqrt{3} \quad , \quad x_1 = 2 - \sqrt{3} \quad , \quad x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Relazioni fra le radici ed i coefficienti di una equazione di secondo grado

Tra le radici x_1 ed x_2 dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ed i coefficienti **a, b, c** intercorrono le seguenti relazioni: $\mathbf{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$ $\qquad$ $\mathbf{x_1\, x_2 = \frac{c}{a}}$

Dimostrazione

Noi sappiamo che : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} - b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = \frac{b^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac} \right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} =$$

$$\frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$3x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{3}$$

Applicazioni

Calcolare una radice di una equazione di secondo grado quando conosciamo l'altra radice

Basta utilizzare una delle due seguenti relazioni: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Se, ad esempio, conosciamo x_1, per calcolare x_2 si procede come segue:

$$x_2 = -\frac{b}{a} - x_1 \qquad \text{oppure} \qquad x_2 = \frac{c}{a\,x_1}$$

$3x^2 + 7x - 6 = 0$ $\quad x_1 = -3$, $x_1 + x_2 = -\frac{7}{3}$, $x_2 = -\frac{7}{3} - x_1 = -\frac{7}{3} + 3 = \frac{2}{3}$

oppure $\quad x_1 x_2 = -\frac{6}{3} = -2$, $x_2 = \frac{-2}{x_1} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

Scrivere l'equazione di secondo grado che abbia come radici due numeri assegnati

$ax^2 + bx + c = 0$ Divido ambo i membri per **a** , $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ Pongo :

$x_1 + x_2 = S$, $x_1 x_2 = P$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) = -S$

$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = P$ $\qquad \boxed{x^2 - Sx + P = 0}$

REGOLA

L'equazione di secondo grado avente come radici due numeri dati ha il primo coefficiente uguale all'unità, il secondo coefficiente è la somma dei due numeri cambiata di segno, il terzo coefficiente coincide col prodotto dei due numeri.

Scrivere l'equazione di secondo grado avente come radici i numeri:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{3}} \quad , \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \quad , \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$$

$$x^2 - 6\sqrt{3} \cdot x + \frac{4}{3} = 0 \quad , \quad 3x^2 - 18\sqrt{3} \cdot x + 4 = 0$$

Determinare due numeri conoscendo la somma S ed il loro prodotto P

I due numeri richiesti coincidono con le radici dell'equazione: $x^2 - Sx + P = 0$

$$S = 6 \quad , \quad P = 4 \quad , \quad x^2 - 6x + 4 = 0 \quad , \quad x = 3 \pm \sqrt{9 - 4} = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$x_1 = 3 - \sqrt{5} \quad , \quad x_2 = 3 + \sqrt{5}$$

Scomposizione in fattori di un trinomio di secondo grado

Se risulta $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ allora è possibile dimostrare che il trinomio di secondo grado $T(x) = ax^2 + bx + c$ può essere decomposto nel prodotto di due fattori di primo grado secondo la seguente formula: $\mathbf{T(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$

dove i numeri x_1 **ed** x_2 **sono gli zeri del trinomio, ossia** *le radici dell'equazione associata* $ax^2 + bx + c = 0$.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2\right] =$$

$$= a\left[x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2\right] = a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right] = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Se il trinomio ha due zeri reali e coincidenti , cioè se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ allora la precedente formula assume la seguente forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Decomporre in fattori il seguente trinomio di secondo grado $15x^2 + 2x - 8$.

Gli zeri di questo trinomio coincidono con le radici dell'equazione associata

$$15x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 1 + 120 = 121 \qquad x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{15} = \frac{-1 \pm 11}{15}$$

$$x_1 = \frac{-1 - 11}{15} = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5} \qquad x_2 = \frac{-1 + 11}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$15x^2 + 2x - 8 = 15\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{4}{5}\right) = (3x - 2)(5x + 4)$$

Equazioni parametriche

$4x^2 + -2(k-1)x - k = 0$ è una equazione parametrica in quanto almeno uno dei tre coefficienti dipende da un parametro. **Parametro** di una equazione nell'incognita x è una lettera qualsiasi che rappresenta un numero il cui valore non dipende dall'incognita.

Questo significa che i valori numerici che possiamo attribuire al parametro non dipendono dai valori numeri assunti dall'incognita x . Invece i valori numerici assunti dalle radici x_1 , x_2 dell'equazione data dipendono dai valori numerici che attribuiamo al parametro k.

I problemi sulle equazioni di secondo grado parametriche si risolvono tenendo presente che:

1) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

2) radice di un'equazione è un numero che, sostituito nell'incognita dell'equazione , rende il primo membro numericamente uguale al secondo membro

3) le radici x_1 , x_2 di una equazione di secondo grado sono uguali se:

$$\Delta = 0 \quad \text{cioè se :} \quad b^2 - 4ac = 0$$

4) le radici x_1 , x_2 di una equazione di secondo grado sono opposte se:

$x_1 = -x_2$ cioè se : $x_1 + x_2 = 0$ $-\dfrac{b}{a} = 0$ cioè se: $b = 0$

5) le radici x_1 , x_2 di una equazione di secondo grado sono reciproche se:

$x_1 \cdot x_2 = 1$ cioè se: $\dfrac{c}{a} = 1$ cioè se: $c = a$

6) le radici x_1 , x_2 di una equazione di secondo grado sono antireciproche se: $x_1 \cdot x_2 = -1$ cioè se: $\dfrac{c}{a} = -1$ cioè se: $c = -a$

Esempi

<<**Per quale valore del parametro k una radice dell'equazione** $4x^2 - 2(k-1)x - k = 0$ **é uguale a zero?**>>

$x_1 = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow -k = 0 \quad k = 0$

<<**Per quale valore del parametro k le radici dell'equazione** $x^2 + (k-1)x + k - 3 = 0$ **sono opposte ?**>>

$x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -\dfrac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$

<<Per quale valore del parametro a le radici dell'equazione $(a+3)x^2-5ax+4a+1=0$ **sono uguali**?>>

$x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 25a^2 - 4(a+3)(4a+1) = 0 \Rightarrow$

$9a^2 - 52a - 12 = 0 \quad a_1 = -\dfrac{2}{9} \quad a_2 = 6$

<< **Per quale valore del parametro k una radice dell'equazione** $2x^2 - (k-1)x + k + 1 = 0$ **vale** 2 **?** >>

$x_1 = 2 \Rightarrow 2\cdot(2)^2 - (k-1)\cdot 1 + k + 1 = 0 \quad 8 - 2k + 2 + k + 1 = 0 \quad -k = -11$

$$k = 11$$

data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ calcolare :

01) $x_2 - x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}+b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}$

$$x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

02) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 2\cdot\dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{2c}{a} = \dfrac{b^2-2ac}{a^2}$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2-2ac}{a^2}$$

03) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \dfrac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\dfrac{b}{c}$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

04) $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2} = \dfrac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \dfrac{b^2-2ac}{c^2}$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{b^2-2ac}{c^2}$$

05) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) = \left(-\dfrac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\dfrac{c}{a}\right)\left(-\dfrac{b}{a}\right) = -\dfrac{b^3}{a^3} + \dfrac{3bc}{a^2}$

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc-b^3}{a^3}$$

06) $$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^3} = \frac{3abc-b^3}{c^3}$$

07) $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)^2 - \frac{2c^2}{a^2}$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$$

Se l'equazione data ha la forma $x^2 + px + q = 0$ abbiamo:

$$x_1^4 + x_2^4 = p^4 - 4p^2 + 2q^2$$

08) $\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1x_2)^2} = \frac{\frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}}{\frac{c^4}{a^4}} = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{c^4}$

$$\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{c^4}$$

Quesiti relativi alle equazioni parametriche: TABELLA RIASSUNTIVA	
Richiesta	**Matematizzazione**
Somma delle radici	$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
Somma dei **quadrati** delle radici	$x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$
Somma dei **cubi** delle radici	$x_1^3 + x_2^3 = \dfrac{-b^3 + 3abc}{a^3}$
Somma delle **quarte potenze** delle radici	$x_1^4 + x_2^4 = \dfrac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$
Somma delle **quinte potenze** delle radici	$x_1^5 + x_2^5 = \dfrac{-b^5 + 5ab^3c - 5a^2bc^2}{a^5}$
Somma dei **reciproci** delle radici con $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$	$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = -\dfrac{b}{c}$
Somma dei **reciproci** dei **quadrati** delle radici $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$	$\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{b^2 - 2ac}{c^2}$
Somma dei **reciproci** dei **cubi** delle radici $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$	$\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3} = \dfrac{-b^3 + 3abc}{c^3}$
Somma dei **reciproci** delle **quarte potenze** delle radici $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$	$\dfrac{1}{x_1^4} + \dfrac{1}{x_2^4} = \dfrac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{c^4}$
Somma dei **reciproci** delle **quinte potenze** delle radici $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$	$\dfrac{1}{x_1^5} + \dfrac{1}{x_2^5} = \dfrac{-b^5 + 5ab^3c - 5a^2bc^2}{c^5}$
Differenza delle radici	$x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}$
Differenza dei **quadrati** delle radici	$x_1^2 - x_2^2 = \dfrac{-b \cdot \sqrt{\Delta}}{a^2}$
Differenza dei **cubi** delle radici	$x_1^3 - x_2^3 = \dfrac{\sqrt{\Delta}\,(b^2 - ac)}{a^3}$
Differenza delle **quarte potenze** delle radici	$x_1^4 - x_2^4 = \dfrac{\sqrt{\Delta}\,(b^3 + 2abc)}{a^4}$
Differenza delle **quinte potenze** delle radici	$x_1^5 - x_2^5 = \dfrac{\sqrt{\Delta}\,(b^4 - 3ab^2c + a^2c^2)}{a^5}$

La regola dei segni di Cartesio

Consideriamo una equazione di secondo grado a radici reali:

$$[\S] \qquad ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$$

Possiamo supporre che a sia positivo. Infatti, nel caso contrario, cambiando il segno dei coefficienti **a, b, c** otteniamo una equazione equivalente alla data.

Definizione: Diremo che i tre coefficienti **a, b, c** dell'equazione [§] (considerati nell'ordine scritto) presentano una **permanenza** ogni volta che due coefficienti consecutivi hanno lo stesso segno, presentano una **variazione** ogni volta che due coefficienti consecutivi hanno segni contrari.

Si possono presentare i seguenti casi :

a	b	c
+	+	+
+	−	+
+	−	−
+	+	−

Teorema di Cartesio

In ogni equazione di secondo grado ridotta a forma canonica, completa ed a discriminante positivo o nullo , ad ogni variazione corrisponde **una radice positiva**, ad ogni permanenza **una radice negativa** . Se l'equazione presenta una radice negativa (x_1) ed una positiva (x_2) allora il valore assoluto della radice negativa è maggiore del valore assoluto della radice positiva ($|x_1| > |x_2|$) se la **permanenza precede la variazione**, il valore assoluto della radice positiva è maggiore del valore assoluto della radice positiva ($|x_2| > |x_1|$) se la **variazione precede la permanenza**.

a	b	c	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$	x_1	x_2	
+	+	+	−	+	−	−	
+	−	+	+	+	+	+	
+	−	−	+	−	−	+	$\lvert x_2\rvert > \lvert x_1\rvert$
+	+	−	−	−	−	+	$\lvert x_2\rvert < \lvert x_1\rvert$

Dimostriamo che due permanenze danno luogo a due radici negative.

a	b	c	$x_1 + x_2 < 0$	$x_1 \cdot x_2 > 0$	x_1	x_2
+	+	+	$x_1 > 0 \quad x_2 < 0$	$x_1 > 0 \quad x_2 > 0$	−	−
			$x_1 < 0 \quad x_2 > 0$	$x_1 < 0 \quad x_2 < 0$		
			$x_1 < 0 \quad x_2 < 0$			