Unità Didattica N° 12

Le equazioni ad una incognita

01) Equazioni risolubili mediante la decomposizione in fattori

02) Equazione biquadratica

03) Equazioni irrazionali

04) Equazioni reciproche:

a) Equazioni reciproche di quarto grado

b) Equazioni reciproche di quinto grado

c) Equazioni reciproche di sesto grado e di seconda specie

05) Ulteriori considerazioni sull’algebra elementare

06) Equazione algebrica

07) Teorema fondamentale dell’algebra

Equazioni risolubili mediante la decomposizione in fattori

L'algebra finora studiata ci consente di risolvere tutte le equazioni di primo grado e quelle di secondo grado. Esistono anche delle formule che ci consentono di risolvere tutte le equazioni di 3° e 4° grado. Noi non le possiamo applicare in quanto non conosciamo la teoria generale dei numeri complessi. Se $P(x)$ è un polinomio di grado **n**, l'uguaglianza $\boxed{P(x) = 0}$ posta allo scopo di vedere se esistono valori della x che annullano il polinomio $P(x)$, dicesi **equazione algebrica di grado n ad una incognita**.

Per $n = 1$ ($n = 2$) otteniamo l'equazione di 1° grado (2° grado) che sappiamo risolvere.

Per $n > 2$ otteniamo una equazione che possiamo risolvere se siamo in grado di decomporre il polinomio $P(x)$ in fattori di primo grado e di secondo grado.

Infatti se risulta: $\mathbf{P(x) = A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)}$ allora $P(x) = 0 \Rightarrow A(x)\cdot B(x)\cdot C(x) = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{A(x) = 0} \quad \text{oppure} \quad \boxed{B(x) = 0} \quad \text{oppure} \quad \boxed{C(x) = 0}$$

Dicesi **zero** di un polinomio $P(x)$ ogni valore x_o della variabile x che annulla il polinomio . Questo significa che se $P(x_o) = 0$ allora il numero x_o è uno **zero** del polinomio $P(x)$ Inoltre l'equazione $P(x) = 0$ dicesi **equazione associata** al polinomio $P(x)$. Lo zero di un polinomio coincide con una delle radici dell'equazione associata.

Teorema delle radici razionali

Sia $\mathbf{P(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0}$ **[1]** un'equazione algebrica di grado **n**

C.N.S. perché il numero razionale $\frac{m}{n}$ (con $m \in N$ ed $n \in N^*$ primi tra di loro) sia una **radice** o **soluzione** dell'equazione [1] è che:

1) **m** sia divisore (positivo o negativo) del termine noto a_n

2) **n** sia divisore (positivo o negativo) del coefficiente a_o del termine di grado più elevato

Teorema delle radici intere

Condizione necessaria ma non sufficiente perché il numero intero **k** sia soluzione dell'equazione [1] è che esso sia divisore (positivo o negativo) del termine noto a_n . Se x_o è uno zero del polinomio $P(x)$ allora possiamo scrivere:

$$\mathbf{P(x) = (x - x_o)\cdot Q(x) = 0}$$

dove $Q(x)$ è un opportuno polinomio di grado $n - 1$.

I coefficienti del polinomio $Q(x)$ si possono ottenere applicando la regola di Ruffini.

ESEMPI

$x^5+2x^3+8x^2+16=0$ $\quad x^3(x^2+2)+8(x^2+2)=0 \quad , \quad (x^2+2)\cdot(x^3+8)=0$

$$(x^2+2)(x+2)(x^2-2x+4)=0 \quad , \quad x^2+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm i\sqrt{2}$$

$$x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2 \quad ; \quad x^2-2x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=1\pm\sqrt{1-4}=1\pm i\sqrt{3}$$

Le radici dell'equazione data sono:

$$x_1=-2 \quad , \quad x_2=-i\sqrt{2} \quad , \quad x_3=i\sqrt{2} \quad , \quad x_4=1-i\sqrt{3} \quad , \quad x_5=1+i\sqrt{3}$$

$$2x^5+3x^4-6x^3+6x^2-8x+3=0$$

Le eventuali radici razionali dell'equazione data vanno ricercate tra i seguenti numeri:

$$\pm 1 \quad , \quad \pm 3 \quad , \quad \pm\frac{1}{2} \quad , \quad \pm\frac{3}{2}$$

	2	3	-6	6	-8	3
1		2	5	-1	5	-3
	2	5	-1	5	-3	//
-3		-6	3	-6	3	
	2	-1	2	-1	//	
$\frac{1}{2}$		1	0	1		
	2	//	2	//		

$x_1=1$

$x_2=-3$

$x_4=-i$

$x_5=i$

$x_3=\frac{1}{2}$

$2x^2+2=0 \quad , \quad x^2+1=0 \quad , \quad x=\pm i$

$$x^4-x^2-12x-36=0$$

$$x^4-(x^2+12x+36)=0 \quad , \quad x^4-(x+6)^2=0 \quad , \quad (x^2-x-6)(x^2+x+6)=0$$

$$x^2-x-6=0 \qquad x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\begin{cases}-2=x_1\\ 3=x_2\end{cases}$$

$$x^2+x+6=0 \qquad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-24}}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1-i\sqrt{23}}{2}=x_1\\[2ex] \dfrac{-1+i\sqrt{23}}{2}=x_2\end{cases}$$

Equazione biquadratica

Dicesi **equazione biquadratica** una equazione riconducibile alla seguente forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Si tratta di una equazione di 4° grado priva dei termini di grado dispari. Essa si risolve mediante la seguente sostituzione: $x^2 = y \quad (x^4 = y^2)$ Si ottiene: $ay^2 + by + c = 0$ che è una equazione di 2° grado in y, la quale ammette due radici reali y_1 , y_2 se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

$$x = \pm\sqrt{y_1} \quad , \quad x = \pm\sqrt{y_2} \quad , \quad x_1 = -\sqrt{y_1} \quad , \quad x_2 = \sqrt{y_1} \quad , \quad x_3 = -\sqrt{y_2} \quad , \quad x_4 = \sqrt{y_2}$$

Una **equazione biquadratica** avente il $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ammette:

1) 4 radici reali se $0 < y_1 < y_2$, cioè quando presenta due variazioni

2) 2 radici reali e **2 radici complesse e coniugate** se $y_1 < 0 < y_2$, cioè quando presenta una variazione ed una permanenza

3) 4 radici a due a due complesse e coniugate se $y_1 < y_2 < 0$, cioè quando presenta due permanenze

$x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ Pongo $x^2 = y \quad (x^4 = y^2)$ Ottengo: $y^2 + 5y + 6 = 0$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \quad , \quad y_1 = -3 \quad , \quad y_2 = -2$$

$$x^2 = -3 \quad , \quad x = \pm\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3} \quad , \quad x^2 = -2 \quad , \quad x = \pm\sqrt{-2} = \pm i\sqrt{2}$$

Equazioni irrazionali

Una equazione si dice **irrazionale** quando l'incognita compare sotto il segno di radice in almeno un termine del primo o del secondo membro o di entrambi.

Per risolvere una equazione irrazionale bisogna elevare ad una certa potenza, una o più volte, ambo i membri dell'equazione data, fino alla eliminazione di tutti i radicali presenti nell'equazione stessa. Indi si risolve l'equazione razionale così ottenuta. Si noti, però, che l'elevazione a potenza avente indice pari può introdurre **soluzioni estranee** all'equazione data. E' opportuno quindi eseguire la **verifica** delle soluzioni trovate, per giudicare quali radici sono accettabili e quali no. La verifica finale può essere evitata se, prima dell'elevamento ad una data potenza ad indice pari, imponiamo la **condizione di realtà e la condizione di positività**.

Risolviamo alcuni tipi di equazioni irrazionali.

1) L'equazione irrazionale contiene un solo radicale di indice due:

$$\sqrt{\mathbf{A(x)}} = \mathbf{B(x)}$$

L'equazione si risolve elevando ambo i membri al quadrato: $A(x) = [B(x)]^2$

La verifica può essere eliminata se, preliminarmente, imponiamo la condizione di realtà e la condizione di positività che, nel caso nostro si traduce nella risoluzione del seguente sistema di inequazioni: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{x+5} = 7 - x$ $\quad \left(\sqrt{x+5}\right)^2 = (7-x)^2$

$x + 5 = 49 - 14x + x^2$, $x^2 - 15x + 44 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = 11$ Verifica

$x_1 = 4$: $\sqrt{4+5} = 7 - 4$, $\sqrt{9} = 3$, $3 = 3$; $x_1 = 4$ **(R.A.)**

$x_2 = 11$: $\sqrt{11+5} = 7 - 1$, $\sqrt{16} = -4$, $4 = -4$, $x_2 = 11$ **(R.N.A.)**

OSSERVAZIONE

I simboli $A(x)$, $B(x)$ rappresentano due generici polinomi in x .

2) Equazione irrazionale del tipo: $\boxed{\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} = C(x)}$

Le condizioni di realtà e di positività si traducono nel seguente sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ C(x) \geq 0 \end{cases}$$

Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo un'equazione irrazionale contenente un solo radicale di indice due. Si isola questo radicale e si eleva nuovamente al quadrato.

$\sqrt{2x+15} - \sqrt{x+4} = 2$, $\quad 2x + 15 - 2\sqrt{(2x+15)(x+4)} + x + 4 = 4$

$2\sqrt{(2x+15)(x+4)} = 3x + 15$, $\quad 4\left(2x^2 + 8x + 15x + 60\right) = 9x^2 + 90x + 225$

$x^2 - 2x - 15 = 0$, $x_1 = -3$ **(R.A.)** , $x_2 = 5$ **(R.A.)**

$\begin{cases} 2x + 15 \geq 0 \quad per \quad x \geq -\dfrac{15}{2} \\ x + 4 \geq 0 \quad per \quad x \geq -4 \end{cases}$ Il sistema è verificato per $x \geq -4$

3) L'equazione irrazionale contiene almeno tre radicali di indice due

$\sqrt{\mathbf{A(x)}} + \sqrt{\mathbf{B(x)}} + \sqrt{\mathbf{C(x)}} + \mathbf{D(x)} = \mathbf{0}$ oppure $\sqrt{\mathbf{A(x)}} + \sqrt{\mathbf{B(x)}} + \sqrt{\mathbf{C(x)}} + \sqrt{\mathbf{D(x)}} = \mathbf{0}$

Si isolano due radicali e si eleva al quadrato ambo i membri. Si ottiene una equazione irrazionale contenente almeno un radicale in meno. Si procede nella razionalizzazione fino ad ottenere una equazione non contenente radicali. Se vogliamo evitare la verifica dobbiamo imporre, di volta in volta, la condizione di realtà e la condizione di positività.

$\sqrt{\mathbf{2x + 7}} + \sqrt{\mathbf{3x - 18}} = \sqrt{\mathbf{7x + 1}}$ Condizione di realtà $\begin{cases} 2x + 7 \geq 0 \quad per \ x \geq -\frac{7}{2} \\ 3x - 18 \geq 0 \quad per \ x \geq \ 6 \quad x \geq 6 \\ 7x + 1 \geq 0 \quad per \ x \geq -\frac{1}{7} \end{cases}$

$2x + 7 + 3x - 18 + 2\sqrt{(2x + 7)(3x - 18)} = 7x + 1$, $2\sqrt{6x^2 - 15x - 126} = 2(x + 6)$

$6x^2 - 15x - 126 = x^2 + 12x + 36, 5x^2 - 27x - 162 = 0, x_1 = -\frac{18}{5}$ (R.N.A.), $x_2 = 9$ (R.A.)

4) L'equazione irrazionale contiene due radicali di indice tre

$\boxed{\sqrt[3]{A(x)} + \sqrt[3]{B(x)} = C(x)}$ Eleviamo ambo i membri al cubo

$A + B + 3\cdot\sqrt[3]{A^2\cdot B} + 3\cdot\sqrt[3]{A\cdot B^2}$, $3\cdot\sqrt[3]{A\cdot B}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) = C^3 - A - B$

$3\cdot C\sqrt[3]{A\cdot B} = C^3 - A - B$ Se eleviamo ambo i membri al cubo otteniamo :

$27C^3\cdot A\cdot B = \left(C^3 - A - B\right)^3$ $\boxed{\sqrt[3]{36 + 7x} + \sqrt[3]{36 - 7x} = 6}$

$$36 + 7x + 36 - 7x + 3\cdot\sqrt[3]{(36 + 7x)(36 - 7x)}\left(\sqrt[3]{36 + 7x} + \sqrt[3]{36 - 7x}\right) = 216$$

$18\cdot\sqrt[3]{1296 - 49x^2} = 144$, $\sqrt[3]{1296 - 49x^2} = 8$, $1296 - 49x^2 = 512$, $48x^2 = 784$, $x^2 = 16$

$x_1 = -4$ (**R.A.**) , $x_2 = 4$ (**R.A.**)

5) L'equazione contiene tre radicali di indice tre

$\boxed{\sqrt[3]{A(x)} + \sqrt[3]{B(x)} = \sqrt[3]{C(x)}}$ Si eleva ambo i membri al cubo: $A + B + 3\sqrt[3]{A^2B} + 3\sqrt[3]{AB^2} = C$

$3\sqrt[3]{AB}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) = C - A - B$, $3\sqrt[3]{ABC} = C - A - B$ Si eleva ambo i membri al cubo

$$27A \cdot B \cdot C = (C - A - B)^3$$

6) Risoluzione di altre equazioni irrazionali

$$\boxed{\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{2x+1}}} \qquad m.c.m. = \sqrt{2x+1} \quad , \quad 2x + 1 + 2\sqrt{x(2x+1)} = 21$$

$\sqrt{2x^2 + x} = 10 - x$, $x^2 + 21x - 1000 = 0$, $x_1 = -25$ (**R.N.A.**) , $x_2 = 4$ (**R.A.**)

Equazioni reciproche

DEFINIZIONE

1) Una equazione ad una incognita, ridotta a forma normale , si dice **reciproca di prima specie** quando i coefficienti dei termini estremi e di quelli dei termini equidistanti dagli estremi sono uguali

2) Una equazione ad una incognita , ridotta a forma normale , si dice **reciproca di seconda specie** quando i coefficienti dei termini estremi e di quelli dei termini equidistanti dagli estremi sono opposti

OSSERVAZIONE

L'equazione si dice **reciproca** perché, se ammette come radice il numero α , essa ammette come radice anche il numero $\frac{1}{\alpha}$.

Equazioni reciproche di terzo grado

1) EQUAZIONI DI PRIMA SPECIE

Esse assumono la seguente forma: $\mathbf{ax^3 + bx^2 + bx + a = 0}$ **[1]**

Una radice è $\boxed{x = -1}$. Le altre radici si ottengono risolvendo una equazione di secondo grado che si ricava dalla [1] applicando la **regola di Ruffini**. $15x^3 - 19x^2 - 19x + 15 = 0$

	15	-19	-19	+15
-1		-15	+34	-15
	15	-34	15	//

$x = -1 \qquad 15x^2 - 34 + 15 = 0$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 225}}{15} = \frac{17 \pm \sqrt{64}}{15} = \frac{17 \pm 8}{15}$$

$$x = \frac{3}{5} \qquad x = \frac{5}{3}$$

2) EQUAZIONI DI SECONDA SPECIE

Esse assumono la seguente forma: $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$ **[2]**

Una radice è $\boxed{x = 1}$. le altre due si ricavano risolvendo una equazione di secondo grado che si ottiene dalla [2] applicando la regola di Ruffini . $\boxed{6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0}$

	6	-19	+19	-6
1		6	-13	+6
	6	-13	6	//

$\boxed{x = 1}$ $6x^2 - 13x + 6 = 0$, $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{3}{2}$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12}$$

Equazioni reciproche di quarto grado

1) Equazioni di prima specie

Sono equazioni riconducibili alla seguente forma: $\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0}$ [3]

Dividiamo ambo i membri per x^2: $ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$

$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$ Pongo: $x + \frac{1}{x} = y$ [$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$] Ottengo:

$a\left(y^2 - 2\right) + by + c = 0$ $\boxed{ay^2 + by + c - 2a = 0}$

Si tratta di una equazione di secondo grado in **y** le cui radici y_1 ed y_2 si ricavano facilmente. Le quattro radici dell'equazione [3] si ottengono risolvendo le due seguenti equazioni di secondo grado in x: $x + \frac{1}{x} = y_1$ (x_1 , x_2) $x + \frac{1}{x} = y_2$ (x_3 , x_4)

$\boxed{8x^4 - 14x^3 - 69x^2 - 14x + 8 = 0}$ $8x^2 - 14x - 69 - \frac{14}{x} + \frac{8}{x^2} = 0$

$8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 14\left(x + \frac{1}{x}\right) - 69 = 0$ Pongo : $x + \frac{1}{x} = y$ [$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$] Ottengo :

$$8\left(y^2 - 2\right) - 14y - 69 = 0 \quad , \quad 8y^2 - 16 - 14y - 69 = 0 \quad , \quad 8y^2 - 14y - 85 = 0$$

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 680}}{8} = \frac{7 \pm \sqrt{729}}{8} = \frac{7 \pm 27}{8} \quad , \quad y_1 = -\frac{5}{2} \quad , \quad y_2 = \frac{17}{4}$$

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 + 2 = -5x \Rightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} \quad , \quad x_1 = -2 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4}} \Rightarrow 4x^2 + 4 = 17x \Rightarrow 4x^2 - 17x + 4 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8} \quad , \quad x_3 = \frac{1}{4} \quad , \quad x_2 = 4$$

2) Equazioni di seconda specie

Sono equazioni riconducibili alla seguente forma: $\boxed{ax^4 + bx^3 - bx - a = 0}$ [4]

In una **equazione reciproca di quarto grado e di seconda specie** manca il termine di secondo grado . Questa equazione si può risolvere in due maniere .

PRIMO METODO

Due radici sono sempre: $\boxed{x = \pm 1}$ Le altre due radici x_3 ed x_4 si ottengono risolvendo una equazione di secondo grado che si ottiene applicando due volte all'equazione [4] la regola di Ruffini .

SECONDO METODO

Decomponendo in fattori il primo membro dell'equazione [4] .

$$a\left(x^4 - 1\right) + bx\left(x^2 - 1\right) = 0 \quad , \quad a\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) + bx\left(x^2 - 1\right) = 0$$

$$\left(x^2 - 1\right)\left(ax^2 + a + bx\right) = 0 \ , \ \left(x^2 - 1\right)\left(ax^2 + bx + a\right) = 0 \ , \ ax^2 + bx + a = 0 \ , \ x^2 - 1 = 0$$

$$\boxed{3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0}$$

PRIMO METODO

	3	-10	0	10	-3
1		3	-7	-7	+3
	3	-7	-7	3	#

$x = 1$

$$\boxed{3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0}$$

	3	-7	-7	+3
-1		-3	10	-3
	3	-10	3	#

$x = -1$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0 \ , \ x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ 3 \end{cases} , \ x_1 = -1 \ , \ x_2 = 1 \ , \ x_3 = \frac{1}{3} \ , \ x_4 = 3$$

SECONDO METODO

$$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0 \quad , \quad 3\left(x^4 - 1\right) - 10x\left(x^2 - 1\right) = 0$$

$$3\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) - 10x\left(x^2 - 1\right) = 0 \quad , \quad \left(x^2 - 1\right)\left(3x^2 - 10x + 3\right) = 0 \quad , \quad x^2 - 1 = 0$$

$$\boxed{x^2 - 1 = 0} \quad , \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0 \quad , \quad x_3 = \frac{1}{3} \quad , \quad x_4 = 3$$

Equazioni reciproche di quinto grado

1) Equazioni di prima specie

Sono equazioni riconducibili alla seguente forma: $\boxed{ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0}$ [5]

Una radice di questa equazione è << **- 1** >> . Le altre quattro radici si ricavano risolvendo una reciproca di quarto grado che si ottiene dall'equazione di partenza applicando la **regola di Ruffini** .

$$\boxed{8x^5 - 46x^4 + 47x^3 + 47x^2 - 46x + 8 = 0}$$

	8	-46	+47	+ 47	-46	+8
-1		-8	+54	-101	+54	-8
	8	-54	101	-54	8	#

$x_1 = -1$

$$\boxed{8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8 = 0}$$

Si tratta di una equazione reciproca di quarto grado e di prima specie . Le sue radici sono :

$$x_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad x_3 = 2 \quad , \quad x_4 = \frac{1}{4} \quad , \quad x_5 = 4$$

2) Equazioni di seconda specie

Sono equazioni riconducibili alla seguente forma : $\boxed{ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0}$ [6]

Una radice di questa equazione è <<1>>. Le altre quattro radici si ricavano risolvendo una reciproca di quarto grado che si ottiene dall'equazione di partenza applicando la **regola di Ruffini**.

$$\boxed{6x^5 - x^4 - 43x^3 + 43x^2 + x - 6 = 0}$$

	6	-1	-43	+43	+1	-6
1		+6	+5	-38	+5	+6
	6	+5	-38	+5	+6	#

$x_1 = 1$

$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 2$, $x_4 = -3$, $x_5 = -\frac{1}{3}$

Equazioni reciproche di sesto grado e di seconda specie

Sono equazioni riconducibili alla seguente forma: $\boxed{ax^6 + bx^5 + cx^4 - cx^2 - bx - a = 0}$ [7]

Manca sempre il termine di terzo grado. Ammettono le radici $\boxed{x = \pm 1}$ e le radici di una equazione reciproca di quarto grado che si ricava applicando all'equazione di partenza due volte di seguito la **regola di Ruffini**.

$$\boxed{6x^6 - 35x^5 + 54x^4 - 56x^2 + 35x - 6 = 0}$$

	6	-35	+56	0	-56	+35	-6
-1		-6	+41	-97	+97	-41	+6
	6	-41	+97	-97	+41	-6	#

$x_1 = -1$

$$\boxed{6x^5 - 42x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0}$$

	6	-41	+97	-97	+41	-6
1		+6	-35	+62	-35	+6
	6	-35	+62	-35	+6	#

$x_1 = 1$

$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = 3$, $x_5 = \frac{1}{2}$, $x_6 = 2$

OSSERVAZIONE

1) Le **equazioni reciproche di prima specie** di grado pari superiori al quarto non si sanno risolvere

2) Le **equazioni reciproche di prima specie** e di **grado dispari** si sanno risolvere solo fino al quinto grado

3) Le **equazioni reciproche di seconda specie** e di **grado dispari** si sanno risolvere fino al quinto grado

4) Le **equazioni reciproche di seconda specie e di grado pari** si sanno risolvere fino al sesto grado

Ulteriori considerazioni sull'algebra elementare

Storicamente l'algebra si sviluppa passando attraverso le seguenti fasi:

1) Algebra retorica nella quale i problemi e la loro risoluzione sono espresse completamente a parole

2) Algebra sincopata nella quale per qualche operazione e per alcune quantità sono usate abbreviazioni simboliche

3) Algebra simbolica nella quale viene usato un completo sistema di notazioni e tutte le trasformazioni algebriche sono espresse mediante simboli (ha inizio nel XVI secolo)

Equazione algebrica

Si dice equazione algebrica di grado n in una incognita ogni equazione riconducibile alla seguente forma: $\boxed{a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0}$ **[1]** con $a_i \in R$ oppure $a_i \in C$

L'equazione [1] si dice **completa** quando tutti i coefficienti a_i $(i = 0,1,\cdots,n)$ sono diversi da zero, **monica** quando $a_o = 1$. Si chiama **radice** (o **soluzione**) dell'equazione [1] ogni numero reale o complesso α per il quale risulta:

$$a_o \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0$$

Risolvere un'equazione significa trovare tutte le sue radici e questo si può fare in due modi diversi. Un modo consiste nella determinazione dei valori numerici approssimati delle radici quando sono dati quelli dei coefficienti e in tal caso si parla di **risoluzione numerica** dell'equazione.

L'altro modo consiste nell'esprimere le radici per mezzo di funzioni dei coefficienti in modo da potere agire anche quando i coefficienti non siano espressi numericamente e in tale caso si parla di **risoluzione analitica** del l 'equazione.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Ogni equazione algebrica ha almeno una radice (reale o complessa).

COROLLARIO N° 1

Ogni polinomio $P(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ può essere rappresentato in un solo modo (a meno dell'ordine dei fattori) come prodotto di polinomi di primo grado a coefficienti (reali o) complessi.

COROLLARIO N° 2

Se il numero complesso $a + bi$ è **radice** dell'equazione [1] anche il numero complesso e coniugato $a - bi$ è **radice** dell'equazione [1], cioè ogni **equazione algebrica** o non ammette radici complesse o ne ammette un numero pari a due a due complesse e coniugate.

COROLLARIO N° 3

Ogni equazione algebrica di **grado dispari** ammette almeno una radice reale

COROLLARIO N° 4

Ogni polinomio di grado n a coefficienti reali può essere decomposto in una sola maniera in fattori di primo grado e di secondo grado (**irriducibili**, cioè non ulteriormente decomponibili in fattori di primo grado a coefficienti reali) a coefficienti reali.

COROLLARIO N° 5

Se risulta $\mathbf{a_o(x - \alpha_1)^{n_1} \cdot (x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_i)^{n_i} = 0}$ con $n_1 + n_2 + \cdots + n_i = n$, diciamo che la **radice** α_1 $(\alpha_2, \cdots, \alpha_i)$ è **multipla di ordine** n_1 (oppure ha molteplicità n_1 [$n_2, \cdots, n_i$].

Se, in particolare, risulta $n_1 = 1$ $(n_1 = 2)$ la radice α_1 si dice **semplice** (**doppia**).

COROLLARIO N° 6

Ogni equazione algebrica di grado n **ammette n radici reali** o complesse (non necessariamente distinte)

COROLLARIO N° 7

$n = 2$	$a_o x^2 + a_1 x + a_2 = 0$	$\{x_1, x_2\}$	$-\dfrac{a_1}{a_o} = x_1 + x_2$	$\dfrac{a_2}{a_0} = x_1 \cdot x_2$
$n = 3$	$a_o x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$-\dfrac{a_1}{a_o} = x_1 + x_2 + x_3$	
		$\dfrac{a_2}{a_0} = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3$		$-\dfrac{a_3}{a_o} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

TEOREMA

In generale un'equazione algebrica di grado maggiore o uguale al quinto non è risolubile mediante radicali.