Unità Didattica N° 13

Le inequazioni ad una incognita

Proprietà delle disuguaglianze fra numeri reali relativi

Si dice che un numero reale relativo **a** è maggiore, uguale o minore di un altro numero reale relativo **b** quando la differenza tra il primo numero **a** ed il secondo numero **b** risulta rispettivamente positiva, nulla, negativa, cioè quando: $a \geq b \iff a - b \geq 0$ $a < b \iff a - b < 0$

Dati i numeri reali relativi **a**, **b** si può verificare una sola delle tre seguenti relazioni:

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b$$

Si chiama disuguaglianza tra i numeri reali **a, b** ogni scrittura del tipo $a > b \quad a < b$

con la quale si vuole esprimere che un numero è maggiore o minore di un altro numero.

Dati tre numeri, se il primo è maggiore del secondo ed il secondo è maggiore del terzo, anche il primo è maggiore del terzo (proprietà transitiva delle disuguaglianze)

$$\{a > b \ , \ b > c\} \Rightarrow a > c$$

Aggiungendo o togliendo da ambedue i membri di una disuguaglianza uno stesso numero si ottiene una disuguaglianza dello stesso tipo (senso).

$$a > b \iff a + m > b + m \quad , \quad a < b \iff a + m < b + m \qquad \forall a, b m \in R$$

In una disuguaglianza un termine può essere portato da un membro all'altro cambiandolo di segno.

$$a + m > b \iff a > b - m \qquad a + m < b \iff a < b - m$$

Moltiplicando e dividendo ambedue i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero positivo si ottiene una disuguaglianza dello stesso tipo. In simboli abbiamo:

$$a > b \iff a \cdot c > b \cdot c \quad \wedge \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \qquad \forall a, b \in R \quad \wedge \quad \forall c \in R^+$$

$$a < b \iff a \cdot c < b \cdot c \quad \wedge \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \qquad \forall a, b \in R \quad \wedge \quad \forall c \in R^+$$ (*)

Moltiplicando o dividendo ambedue i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero negativo si ottiene una disuguaglianza di senso contrario. In simboli abbiamo:

$$a > b \iff a \cdot c < b \cdot c \quad \wedge \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \qquad \forall a, b \in R \quad \wedge \quad \forall c \in R^-$$

$$a < b \iff a \cdot c > b \cdot c \quad \wedge \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \qquad \forall a, b \in R \quad \wedge \quad \forall c \in R^-$$ (*)

(*) $\wedge$ simbolo di **congiunzione logica** ; a $\wedge$ b si legge : << a e b >>

$a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ se $a, b \in R^+$ $\qquad$ $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ se $a, b \in R^-$

$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ se $a, b \in R^+$ $\qquad$ $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ se $a, b \in R^-$

Inequazioni e loro proprietà

Consideriamo due funzioni numeriche $f(x)$ e $g(x)$ entrambe definite in un insieme $I \subseteq R$. Se alla x attribuiamo un particolare valore numerico (ad esempio x_1) dell'insieme $\mathcal{J}$, $f(x)$ e $g(x)$ assumono valori numerici tali che per essi è possibile una sola delle tre seguenti relazioni:

$$f(x_1) > g(x_1) \qquad f(x_1) = g(x_1) \qquad f(x_1) < g(x_1)$$

Spesso è necessario generalizzare il problema e ricercare tutti i valori di $x \in I$ per i quali si verifica una delle due seguenti relazioni: [1] $\mathbf{f(x) > g(x)}$ $\qquad$ $\mathbf{f(x) < g(x)}$ [2]

La relazione [1] (o la relazione [2]) che traduce il problema della ricerca di tutti i valori numerici di $x \in I$ per i quali la funzione $f(x)$ assume valori numeri maggiori o minori di quelli assunti dalla funzione $g(x)$ dicesi **inequazione**. In breve possiamo dire che una **inequazione è una disuguaglianza condizionata posta allo scopo di stabilire se esistono valori della x che rendono** $f(x)$ **maggiore o minore di** $g(x)$.

Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si chiamano i due membri (primo e secondo membro) dell'inequazione, mentre la variabile x dicesi **incognita**. Le **soluzioni** o **radici** di una inequazione ad una incognita sono intervalli. Una inequazione che non ammette soluzioni dicesi **impossibile**, se ammette soluzioni si dice possibile o **compatibile**.

Due inequazioni si dicono **equivalenti** se ammettono le stesse soluzioni, cioè se ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda e viceversa ogni soluzione della seconda è anche soluzione della prima. Se nelle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ le operazioni da eseguirsi nell'incognita x sono solo di addizione, sottrazione e moltiplicazione (in tal caso $f(x)$ e $g(x)$ sono **polinomi**) l'inequazione dicesi **razionale intera**.

Se, infine, $f(x)$ e $g(x)$ o entrambe sono funzioni irrazionali l'inequazione dicesi **irrazionale**.

Per le inequazioni valgono i seguenti **principi di equivalenza**:

01) Principio preliminare

Operando secondo le regole del calcolo algebrico all'interno del primo o del secondo membro o di entrambi i membri di una inequazione otteniamo una inequazione equivalente alla data.

02) Principio di addizione e di sottrazione

Se $p(x)$ è un polinomio in x allora è valido il seguente teorema fondamentale:

$$f(x) \gtrless g(x) \iff f(x) \pm p(x) \gtrless g(x) \pm p(x)$$

Da questo teorema si deducono i due seguenti **corollari**:

a) Se nei due membri di una stessa inequazione compaiono due termini uguali, questi si possono eliminare

b) un qualsiasi termine di una inequazione può essere trasportato da un membro all'altro purché lo si cambi di segno

03) Principio di moltiplicazione e di divisione

Esso afferma quanto segue:

$$f(x) \gtrless g(x) \iff m \cdot f(x) \gtrless m \cdot g(x) \quad \forall\, m \in R^+$$

$$f(x) \gtrless g(x) \iff \frac{f(x)}{m} \gtrless \frac{g(x)}{m} \quad \forall\, m \in R^+$$

$$f(x) \gtrless g(x) \iff k \cdot f(x) \lessgtr k \cdot g(x) \quad \forall\, k \in R^-$$

$$f(x) \gtrless g(x) \iff \frac{f(x)}{k} \lessgtr \frac{g(x)}{k} \quad \forall\, k \in R^-$$

Per $k = -1$ abbiamo $\boxed{f(x) \gtrless g(x) \iff -f(x) \lessgtr -g(x)}$

cioè possiamo cambiare il segno a tutti i termini di una inequazione purché ne cambiamo il senso.

Le inequazioni $f(x) \gtrless g(x)$ e $f(x) - g(x) \gtrless 0$ sono equivalenti, per cui una qualsiasi inequazione può essere ricondotta alla seguente **forma canonica**: $\mathbf{P(x) > 0}$

Se $\Phi(x)$ è un polinomio ridotto a forma canonica, allora il suo grado dicesi **grado** dell'inequazione razionale intera.

Osservazione: Se moltiplichiamo o dividiamo ambo i membri di una inequazione per una funzione $p(x)$, in generale, non otteniamo una inequazione equivalente, cioè l'inequazione $f(x) \gtrless g(x)$ non è equivalente né alla inequazione $\mathbf{p(x) \cdot f(x) \gtrless p(x) \cdot g(x)}$ [3]

né alla inequazione $\boxed{\frac{f(x)}{p(x)} \gtrless \frac{g(x)}{p(x)}}$ [4]

Infatti l'inequazione [3] è **equivalente** alla inequazione: $\mathbf{p(x)\cdot[f(x) - g(x)] \gtrless 0}$

la quale, a sua volta, è **equivalente** ai due sistemi:

$$\begin{cases} p(x)>0 \\ f(x)-g(x) \gtrless 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} p(x)<0 \\ f(x)-g(x) \lessgtr 0 \end{cases}$$

i quali, come si intuisce facilmente, non sono equivalenti all'inequazione $f(x) \gtrless g(x)$.

Le suddette inequazioni sono **equivalenti** soltanto quando $p(x)$ è una funzione positiva in tutto il suo dominio.

Inequazioni razionali intere di primo grado ad una incognita

Sono inequazioni che possono essere ricondotte ad una delle seguenti forme: $ax > b$ $ax < b$

Per risolvere una inequazione di primo grado ridotta a forma canonica basta dividere ambo i membri per **a**, ricordando di cambiare il senso dell'inequazione se è $a < 0$.

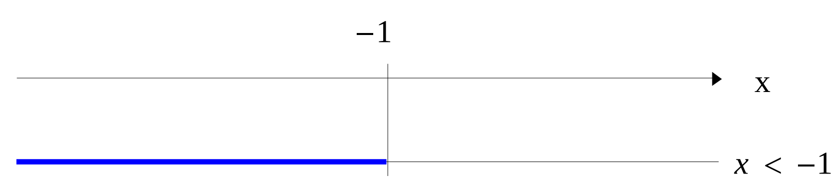
$$ax > b \quad \Rightarrow \quad x > \frac{b}{a} \text{ se } a > 0 \quad , \quad x < \frac{b}{a} \text{ se } a < 0$$

$$ax < b \quad \Rightarrow \quad x < \frac{b}{a} \text{ se } a > 0 \quad , \quad x > \frac{b}{a} \text{ se } a < 0$$

ESEMPI

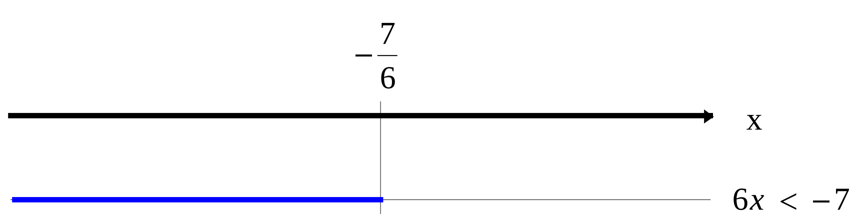
$\mathbf{\frac{2-x}{4} - \frac{2+x}{2} > \frac{2x+7}{4} - \frac{2x+5}{3}}$ per $x < -1$

$6 - 3x - 12 - 6x > 6x + 21 - 8x - 20$; $-7x > 7$, $7x < -7$; $x < -1$



$\mathbf{(x+1)^3 + 3x + 3 < x^3 + 3(x+1)(x-1)}$ per $x < -\frac{7}{6}$

$\cancel{x^3} + \cancel{3x^2} + 3x + 1 + 3x + 3 < \cancel{x^3} + \cancel{3x^2} - 3$, $6x < -7$, $x < -\frac{7}{6}$



Attraverso lo studio del segno di un binomio di primo grado è possibile risolvere inequazioni di grado superiore al primo. Naturalmente il primo membro dell'inequazione ridotta a forma canonica deve essere decomposto in fattori di primo grado.

IL segno del binomio di primo grado **ax + b** coincide col segno di **a** alla destra dello zero del binomio. Questo significa che il segno del binomio di primo grado **ax + b** coincide col segno di **a** per valori della x maggiori dello zero del binomio **ax + b** .

Regola sul segno del binomio di primo grado **ax + b**

Un binomio di primo grado **ax + b** si annulla per $\mathbf{x=-\frac{b}{a}}$, assume lo stesso segno di **a** per $\mathbf{x>-\frac{b}{a}}$ e segno contrario per $\mathbf{x<-\frac{b}{a}}$.

$\mathbf{-6x^3 + x^2 + 57x - 70 > 0}$ $\quad (x-2)(-3x+5)(2x+7) > 0$ per $x < -\frac{7}{2}$ e $\frac{5}{3} < x < 2$

Si calcolano gli zeri dei tre fattori di primo grado e si compila il seguente prospetto .

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$, $-3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$, $2x + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$

x		$-\frac{7}{2}$		$\frac{5}{3}$		2	
$x-2$	−		−		−	0	+
$-3x+5$	+		+	0	−		−
$2x+7$	−	0	+		+		+
$(x-2)(-3x+5)(2x+7)$	+	0	−	0	+	0	−

$\mathbf{-2x^3 + 3x^2 + 29x + 30 < 0}$ per $-2 < x < -\frac{3}{2}$, $x > 5$

$2x^3 - 3x^2 - 29x - 30 > 0 \qquad (x+2)(x-5)(2x+3) > 0$

x		-2		$-\frac{3}{2}$		5	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x+2)(x-5)(2x+3)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Segno di un trinomio di secondo grado ad una incognita

Consideriamo un trinomio di secondo grado nella variabile x: $\mathbf{T(x) = ax^2 + bx + c}$ **[5]**

con a, b, c numeri reali relativi costanti (cioè numeri dati indipendenti da x) ed $a \neq 0$.

Col simbolo $T(\alpha)$ intendiamo il numero che si ottiene quando nella [5] al posto della x poniamo α, cioè il valore numerico che assume il trinomio per $x = \alpha$. Se poniamo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad [6]$$

otteniamo una equazione di secondo grado in **x** (detta equazione associata al trinomio) le cui radici x_1 ed x_2 si chiamano zeri del trinomio. Per convenzione poniamo $x_1 < x_2$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ = **DISCRIMINANTE** del trinomio [7]

01) $\Delta > 0$: **il trinomio ammette due zeri reali e distinti**

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ se } a > 0 \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ se } a < 0$$

02) $\Delta = 0$: **il trinomio ammette due zeri reali e coincidenti** $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

03) $\Delta < 0$: il trinomio ammette due zeri complessi e coniugati, il trinomio non si annulla mai $\forall\, x \in R$.

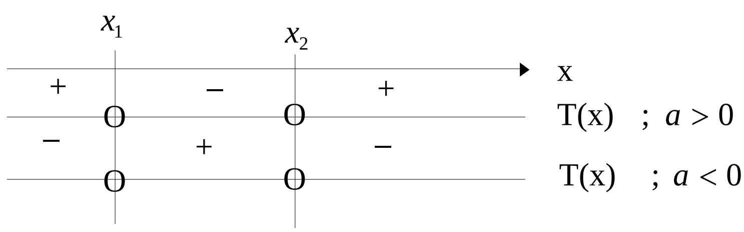
L'intervallo limitato ed aperto $]x_1, x_2[$ è detto intervallo delle radici.

Se $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ diciamo che la variabile x assume valori esterni all'intervallo delle radici. Dall'algebra sappiamo che: $\mathbf{T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$ [8]

Studiare il segno del trinomio significa stabilire per quali valori della variabile x esso assume valori positivi, negativi, nulli. Dobbiamo distinguere tre casi:

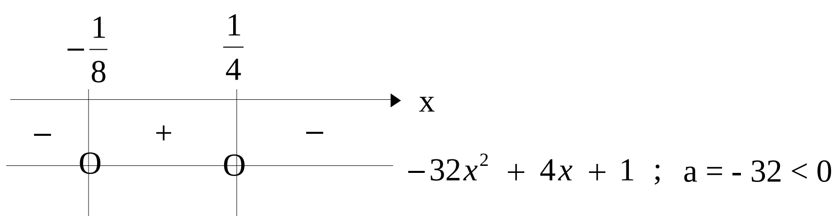
01) $\Delta > 0$ **Il trinomio assume lo stesso segno di a per valori della x esterni all'intervallo delle radici, segno opposto ad a per valori della x interni all'intervallo delle radici.**

Sinteticamente possiamo scrivere:



Studiare il segno del trinomio $T(x) = -32x^2 + 4x + 1$

L'equazione associata al trinomio è: $32x^2 - 4x - 1 = 0$, $x_1 = -\dfrac{1}{8}$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$ (zeri del trinomio)



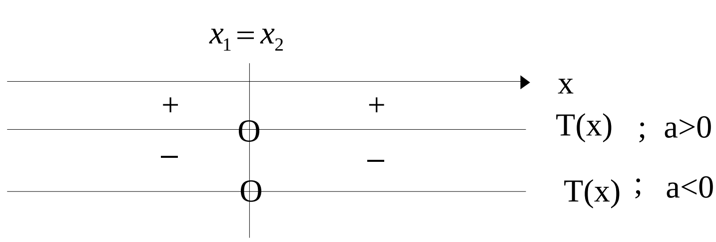
$T(x) > 0 \qquad \forall x \in \left]-\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}\right[$ (cioè per $-\dfrac{1}{8} < x < \dfrac{1}{4}$]

$T(x) < 0 \qquad \forall x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{8}\right[\cup \left]\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$ (cioè per $x < -\dfrac{1}{8}$ ed $x > \dfrac{1}{4}$]

$T(x) = 0$ per $x = -\dfrac{1}{8}$ ed $x = \dfrac{1}{4}$

02) $\Delta = 0$: **il trinomio assume sempre lo stesso segno di a e si annulla per** $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

Quindi il segno di **T(x)** coincide col segno di **a**, tranne che per $x = x_1$ in corrispondenza del quale il trinomio si annulla .

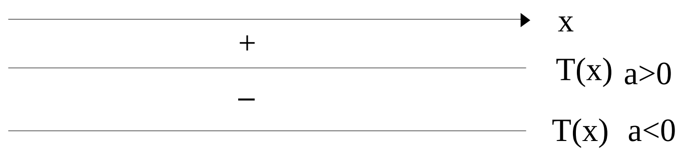


Studiare il segno del trinomio $T(x) = -4x^2 + 12x - 9 = 0$

$$\Delta = 0 \ , \ a = -4 < 0 \ , \ x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$$

$T(x) > 0 \quad \forall\, x \in \varnothing \qquad , \qquad T(x) < 0 \quad \forall\, x \neq \frac{3}{2} \qquad , \qquad T(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{3}{2}$

03) $\Delta < 0$ Il trinomio assume sempre lo stesso segno di a.



Studiare il segno del trinomio $T(x) = 4x^2 - 12x + 1$

$\Delta < 0 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad T(x) > 0 \quad \forall\, x \in R \quad , \quad T(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in \varnothing$

Inequazioni razionali intere di secondo grado

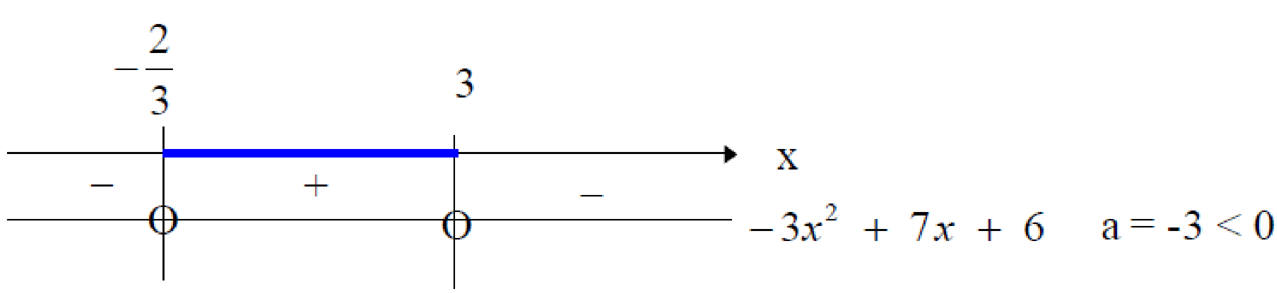
Sono inequazioni riconducibili ad una delle due seguenti forme:

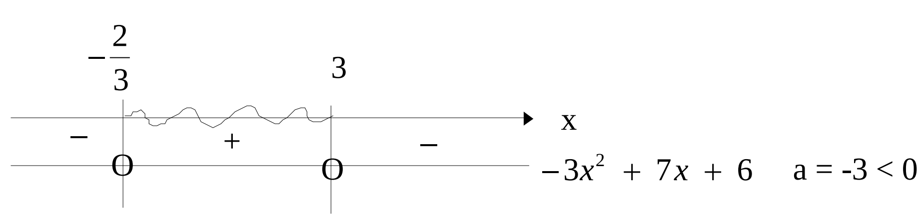
$ax^2 + bx + c > 0 \qquad\qquad ax^2 + bx + c < 0$

Per risolvere una inequazione di secondo grado ad una incognita ridotta a forma canonica basta ricordare le proprietà del segno del trinomio.

$-3x^2 + 7x + 6 > 0 \qquad \forall\, x \in \left]-\frac{2}{3}, 3\right[\quad \left(-\frac{2}{3} < x < 3\right)$

$3x^2 - 7x - 6 = 0 \ , \ x_1 = -\frac{2}{3} \ , \ x_2 = 3$





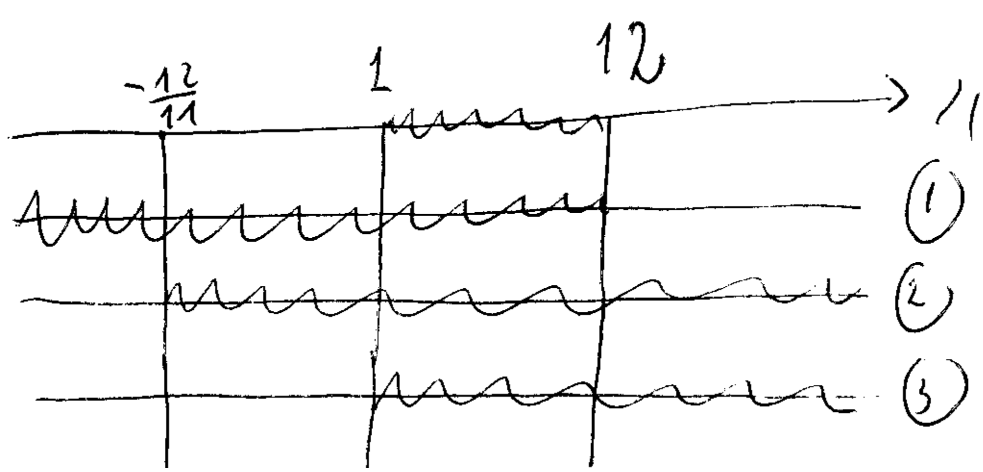
Sistemi di inequazioni in una incognita

Dicesi **sistema di inequazioni in una incognita** l'insieme di due o più incognite di cui vogliamo trovare, quando esistono, le soluzioni comuni. Un sistema di inequazioni dicesi **possibile** se ammette soluzioni, **impossibile** se non ammette soluzioni. In quest'ultimo caso le inequazioni che compongono il sistema sono fra loro **incompatibili**.

Per risolvere un sistema di inequazioni si procede come segue:

- si trovano le soluzioni di tutte le inequazioni che compongono il sistema. Come sappiamo tali soluzioni sono intervalli numerici
- L'intervallo o gli intervalli numerici comuni a tutti gli intervalli precedentemente trovati sono le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} (1)\quad \dfrac{(2x+1)(x-3)}{4} - \dfrac{(x+2)(x-2)}{3} + \dfrac{10x+7}{12} > \dfrac{(x-1)^2}{6} \quad \text{per} \quad x < 12 \\[2ex] (2)\quad \dfrac{(2x+3)^2}{2} - \dfrac{(5x+1)(x-2)}{3} - \dfrac{(x-4)^2}{4} > \dfrac{x^2-10}{12} \quad \text{per} \quad x > -\dfrac{2}{11} \\[2ex] (3)\quad \dfrac{(2x-1)^2}{3} - \dfrac{(x+1)^2}{2} - \dfrac{5x^2+1}{6} < -\dfrac{x+7}{3} \quad \text{per} \quad x > 1 \end{cases}$$



Il sistema è verificato per $1 < x < 12$

Inequazioni razionali fratte ad una incognita

Sono inequazioni che possono essere ricondotte ad una delle due seguenti forme:

[1] $\dfrac{\mathbf{A(x)}}{\mathbf{B(x)}} > \mathbf{0}$ $\qquad \dfrac{\mathbf{A(x)}}{\mathbf{B(x)}} < \mathbf{0}$ **[2]** con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi in x .

Per risolvere queste inequazioni bisogna scartare i valori della x che annullano il denominatore $B(x)$, cioè bisogna porre: $B(x) \neq 0$.

Le soluzioni dell'inequazione $\dfrac{\mathbf{A(x)}}{\mathbf{B(x)}} > \mathbf{0}$ coincidono con le soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni dell'inequazione $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$ coincidono con le soluzioni dei due seguenti sistemi:

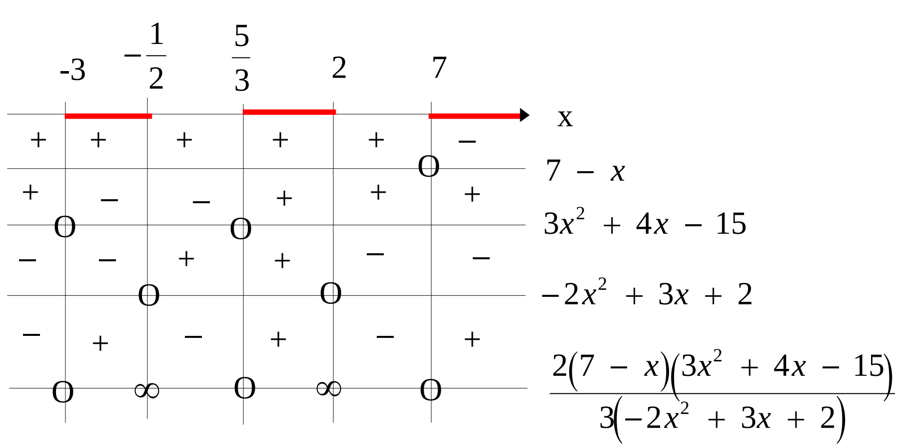
$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$$

Nella pratica, però, conviene risolvere una inequazione frazionaria attraverso lo studio del segno dei fattori di primo e di secondo grado in cui possono essere decomposti i polinomi **A(x)** e **B(x)**. I seguenti esempi serviranno a chiarire quanto detto.

$\dfrac{\mathbf{2(7 - x)(3x^2 + 4x - 15)}}{\mathbf{3(-2x^2 + 3x + 2)}} > \mathbf{0}$ per $-3 < x < -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{5}{3} < x < 2$, $x > 7$

$7 - x = 0 \Rightarrow x = 7$, $3x^2 + 4x - 15 = 0 \Rightarrow x = -3 \quad x = \dfrac{5}{3}$

$-2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$, $x = 2$



Inequazione biquadratica

E' una inequazione riconducibile ad una delle due seguenti forme:

$$ax^4 + bx^2 + c > 0 \qquad ax^4 + bx^2 + c < 0$$

Si risolve decomponendo in fattori di secondo grado il trinomio $ax^4 + bx^2 + c$ e studiando il segno dei singoli fattori .

$9x^4 - 106x^2 + 225 < 0$ per: $-3 < x < -\frac{5}{3}$, $\frac{5}{3} < x < 3$

$$9x^4 - 106x^2 + 225 = 0 \ , \ x^2 = \frac{53 \pm \sqrt{2809 - 2025}}{9} = \frac{53 \pm 28}{9} \ , \ x^2 = \frac{25}{9} \ , \ x^2 = 9$$

$$9x^4 - 106x^2 + 225 = 9\left(x^2 - \frac{25}{9}\right)\left(x^2 - 9\right) = \left(9x^2 - 25\right)\left(x^2 - 9\right)$$

L'inequazione proposta può essere scritta nella seguente maniera: $\left(9x^2 - 25\right)\left(x^2 - 9\right) < 0$

x		-3		$-\frac{5}{3}$		$\frac{5}{3}$		3	
$9x^2 - 25$	+		+	O	-	O	+		+
$x^2 - 9$	+	O	-		-		-	O	+
$\left(9x^2 - 25\right)\left(x^2 - 9\right)$	+	O	-	O	+	O	-	O	+

Inequazioni irrazionali

Una inequazione si dice **irrazionale** quando in essa l'incognita figura almeno una volta sotto il segno di radice. In generale, la risoluzione di una inequazione irrazionale presenta notevoli difficoltà. Noi ci limiteremo alla risoluzione di alcuni tipi di inequazioni irrazionali.

Indichiamo con $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi in x .

- Inequazioni irrazionali del tipo: $\mathbf{A(x) > \sqrt{B(x)}}$ [1]

Siccome operiamo nel campo dei numeri reali dovrà essere:

[2] $\mathbf{B(x) \geq 0}$ (**condizione di realtà**)

Inoltre, poiché conveniamo di considerare i radicali in senso aritmetico, dovrà essere:

[3] $\mathbf{A(x) > 0}$ (**condizione di positività**)

Sotto queste condizioni è lecito elevare ambo i membri della [1] al quadrato ottenendo:

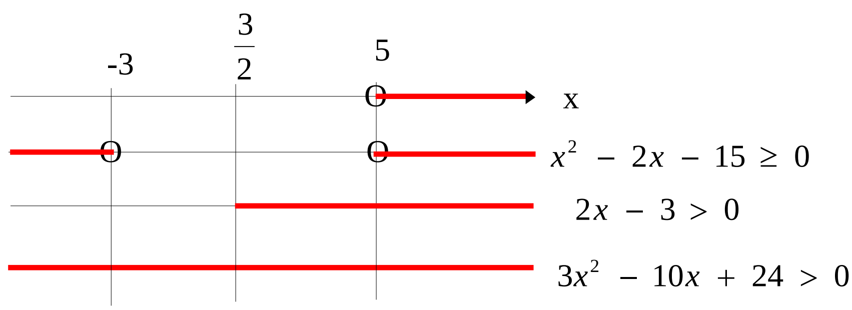
$$[A(x)]^2 > B(x) \qquad [4]$$

Pertanto l'inequazione [1] è **equivalente** al sistema: $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > 0 \\ [A(x)]^2 > B(x) \end{cases}$ [5]

cioè le soluzioni dell'inequazione [1] coincidono con quelle del sistema [5] .

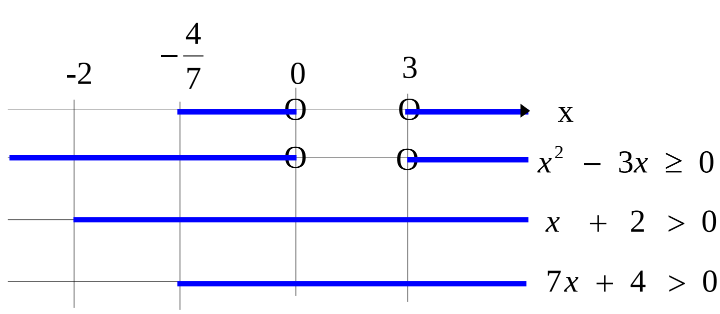
$\mathbf{2x - 3 > \sqrt{x^2 - 2x - 15}}$ per $x \geq 5$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0 \\ 2x - 3 > 0 \\ (2x - 3)^2 > x^2 - 2x - 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0 & per \quad x \leq -3 \ , \ x \geq 5 \\ 2x - 3 > 0 & per \quad x > \dfrac{3}{2} \\ 3x^2 - 10x + 24 > 0 & \forall \ x \in R \end{cases}$$



$\mathbf{x + 2 > \sqrt{x^2 - 3x}}$ per $-\dfrac{4}{7} < x \leq 0 \quad , \quad x \geq 3$

$$\begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \\ x + 2 > 0 \\ (x + 2)^2 > x^2 - 3x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 & per \quad x \leq 0 \ , \ x \geq 3 \\ x + 2 > 0 & per \quad x > -2 \\ 7x + 4 > 0 & per \quad x > -\dfrac{4}{7} \end{cases}$$



- Inequazione irrazionale del tipo: $\sqrt{\mathbf{A(x)}} > \sqrt{\mathbf{B(x)}}$ [6]

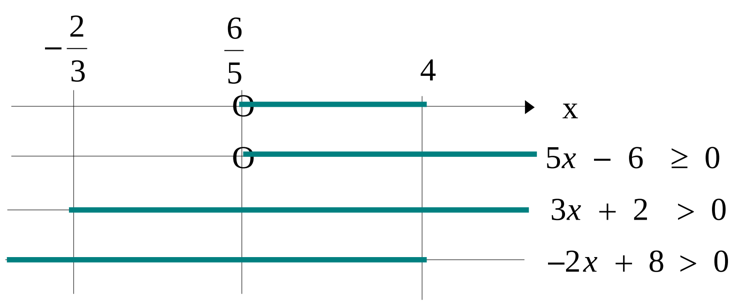
Essa è equivalente al sistema: $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases}$ [7]

$\sqrt{x^2 + 4x - 5} > \sqrt{(x+7)(x-3)}$ per: $x \leq -7$, $x \geq 3$

$\begin{cases} (x+7)(x-3) \geq 0 \\ x^2 + 4x - 5 > 0 \\ x^2 + 4x - 5 > (x+7)(x-3) \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 4x - 21 \geq 0 & per\ x \leq -7 , x \geq 3 \\ x^2 + 4x - 5 > 0 & per\ x < -5 , x > 1 \\ 16 > 0 & \forall\ x \in R \end{cases}$

$\sqrt{3x + 2} > \sqrt{5x - 6}$ per $\frac{6}{5} \leq x < 4$

$\begin{cases} 5x - 6 \geq 0 \\ 3x + 2 > 0 \\ 3x + 2 > 5x - 6 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x - 6 \geq 0 & per\ x \geq \frac{6}{5} \\ 3x + 2 > 0 & per\ x > -\frac{2}{3} \\ -2x + 8 > 0 & per\ x < 4 \end{cases}$



- Inequazione irrazionale del tipo: $A(x) < \sqrt{B(x)}$ [8]

Essa è equivalente ai due seguenti sistemi:

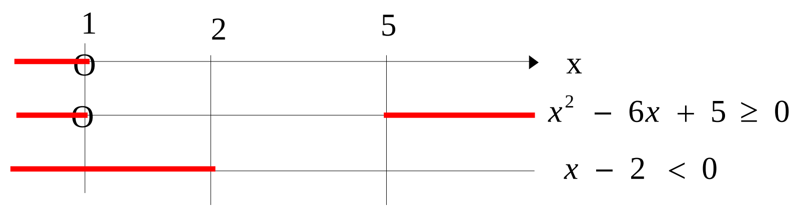
[9] $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ [A(x)]^2 < B(x) \end{cases}$ [10]

Nel sistema [10] possiamo trascurare l'inequazione $B(x) > 0$ in quanto essa è suvvalente all'inequazione $[A(x)]^2 < B(x)$. Quindi le soluzioni dell'inequazione [8] coincidono con quelle dei due seguenti sistemi:

[9] $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^2 < B(x) \end{cases}$ [11]

$\mathbf{x - 2 < \sqrt{x^2 - 6x + 5}}$ per : $x \le 1$

$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \ge 0 & per \quad x \le 1 \ , \ x \ge 5 \\ x - 2 < 0 & per \quad x < 2 \end{cases}$ Il sistema è verificato per $x \le 1$



$\begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ (x - 2)^2 < x^2 - 6x + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 2 \ge 0 & per \quad x \ge 2 \\ 2x - 1 < 0 & per \quad x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Questo secondo sistema non ammette soluzioni.

- Altre inequazioni irrazionali

$A(x) > \sqrt[3]{B(x)} \Leftrightarrow [A(x)]^3 > B(x)$	$A(x) < \sqrt[3]{B(x)} \Leftrightarrow [A(x)]^3 < B(x)$
$\sqrt[3]{A(x)} > \sqrt[3]{B(x)} \Leftrightarrow A(x) > B(x)$	$\sqrt[3]{A(x)} < \sqrt[3]{B(x)} \Leftrightarrow A(x) < B(x)$

$x + 4 > \sqrt[3]{x^3 + 15x + 46}$ per $x < -2 \ , \ x > -\dfrac{3}{4}$

$$(x + 4)^3 > x^3 + 15x + 46 \quad , \quad x^3 + 12x^2 + 48x + 64 > x^3 + 15x + 46$$

$$12x^2 + 33x + 18 > 0 \quad , \quad 4x^2 + 11x + 6 > 0 \quad \text{per} \quad x < -2 \ , \ x > -\frac{3}{4}$$

- Inequazioni irrazionali del tipo : $\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} > \sqrt{C(x)}$ $\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} < \sqrt{C(x)}$

$\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 2} > \sqrt{x + 1}$ per : $x \ge 2$

Imponiamo , innanzitutto , la condizione di realtà : $\begin{cases} x - 2 \ge 0 & per \quad x \ge 2 \\ x + 2 \ge 0 & per \quad x \ge -2 \\ x + 1 \ge 0 & per \quad x \ge -1 \end{cases}$

I tre radicali sono reali se : $x \ge 2$. Essendo ambo i membri dell'inequazione positivi, possiamo elevare al quadrato ottenendo:

$$x - 2 + \cancel{x} + 2 + 2\sqrt{x^2 - 4} > \cancel{x} + 1 \ , \quad 1 - x < 2\sqrt{x^2 - 4}$$

Questa inequazione irrazionale, tenendo presente la condizione di realtà, equivale ai due seguenti sistemi:

$\begin{cases} x^2 - 4 \ge 0 & per \quad x \le -2 \ , \ x \ge 2 \\ 1 - x < 0 & per \quad x > 1 \end{cases}$ Questo sistema è verificato per $x \ge 2$

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ (1 - x)^2 < 4(x^2 - 4) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 2 \\ 1 - x \geq 0 \\ 3x^2 + 2x - 17 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \quad \text{Condizione generale di realtà} \\ x \leq 1 \\ x < -\dfrac{1 + 2\sqrt{13}}{3} \cong -2{,}7 \ ,\ x > \dfrac{-1 + 2\sqrt{13}}{3} \cong 2{,}07 \end{cases}$$ Questo sistema non ammette soluzioni

$\sqrt{x - 1} \leq \sqrt[3]{x\sqrt{x} + 1}$ per $x \geq 1$

Condizione di realtà: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ **C.R.** $x \geq 1$

Per $x \geq 1$ risulta : $\sqrt[3]{x\sqrt{x} + 1} > 0$, quindi è possibile elevare ambo i membri alla sesta potenza

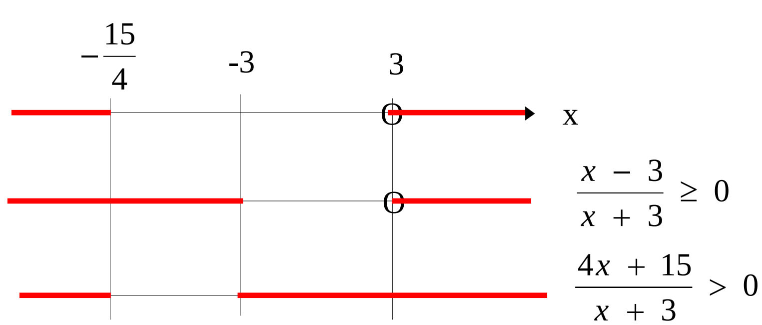
ottenendo: $(x - 1)^3 \leq \left(x\sqrt{x} + 1\right)^2$, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \leq x^3 + 2x\sqrt{x} + 1$

$-3x(x - 1) - 2 \leq 2x\sqrt{x}$ disuguaglianza sempre verificata per $x \geq 1$, in quanto il primo membro è sempre negativo ed il secondo membro è sempre positivo. Quindi l'intervallo $[1, +\infty[$ è la soluzione dell'inequazione proposta.

$\sqrt{\dfrac{x - 3}{x + 3}} < 3$ per : $x < -\dfrac{15}{4}$, $x \geq 3$

Condizione di realtà : $\dfrac{x - 3}{x + 3} \geq 0$ per $x < -3$, $x \geq 3$

$\dfrac{x - 3}{x + 3} < 9$, $\dfrac{-8x - 30}{x + 3} < 0$, $\dfrac{4x + 15}{x + 3} > 0$ per: $x < -\dfrac{14}{4}$, $x > -3$



Equazioni contenenti valori assoluti dell'incognita

● Sono equazioni in cui la variabile (incognita) figura almeno una volta all'interno di un valore assoluto. Si risolvono tenendo presente la definizione di valore assoluto di un numero reale relativo, cioè ricordando che se $x \in R$ abbiamo:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

● In generale, una equazione con uno o più valori assoluti si trasforma in due o più equazioni senza valori assoluti, ciascuna delle quali ha la variabile vincolata a variare in un determinato intervallo parziale.

Un criterio generale potrebbe essere il seguente:

1) si studia il segno della funzione $f(x)$ presente all'interno del singolo simbolo di valore assoluto

2) otteniamo due o più intervalli parziali all'interno dei quali tutte le funzioni $f(x)$ assumono segno costante, cioè sono positive o negative

3) in ogni intervallo parziale eliminiamo i valori assoluti ricordando che:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & se \quad f(x) > 0 \\ 0 & se \quad f(x) = 0 \\ -f(x) & se \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Otteniamo, in ogni singolo intervallo parziale, una equazione senza valori assoluti ma con delle limitazioni per l'incognita.

• Nella risoluzione di una equazione con moduli possono essere utili le seguenti equivalenze :

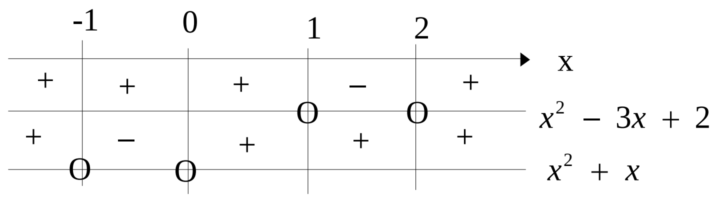
$$|\mathbf{f(x)}| = \mathbf{k} \in \mathbf{R}^+ \Leftrightarrow \mathbf{f(x)} = \pm\mathbf{k}$$

L'equazione $|\mathbf{f(x)}| = \mathbf{k} \in \mathbf{R}^-$ non ammette radici reali

$$|\mathbf{f(x)}| = |\mathbf{g(x)}| \Leftrightarrow \mathbf{f(x)} = \pm\mathbf{g(x)}$$

$$|f(x)| = g(x) \quad \not\Leftrightarrow \quad f(x) = \pm g(x)$$

$$\begin{cases} |f(x)| = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \pm g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$



$2\left|x^2 - 3x + 2\right| - x = 3\left|x^2 + x\right|$

$x < -1\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ x > 2$ $\quad 2x^2 - 6x + 4 - x = 3x^2 + 3x\ ,\quad x^2 + 10x - 4 = 0$

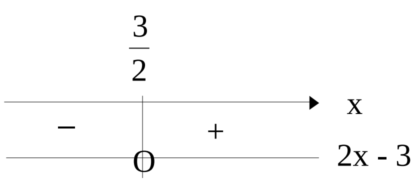
$x = -5 \pm \sqrt{25 + 4}\ ,\ x_1 = -5 - \sqrt{29}$ (R.A.) $x_2 = -5 + \sqrt{29}$

$-1 < x < 0$ $\quad 2x^2 - 6x + 4 - x = -3x^2 - 3x\ ,\ 5x^2 - 4x + 4 = 0$

Questa equazione non ammette radici reali

$1 < x < 2$ $\quad -2x^2 + 6x - 4 + x = 3x^2 + 3x\ ,\quad 5x^2 - 2x + 4 = 0$

Questa equazione non ammette radici reali



$|2x - 3| = 5$

Primo metodo

$\boxed{x < \frac{3}{2}} \Rightarrow -2x + 3 = 5\ ,\ x = -1$ **S.A.**

$\boxed{x > \frac{3}{2}} \Rightarrow 2x - 3 = 5\ ,\ x\ 0\ 4$ **S.A.**

Secondo metodo

Essendo $5 > 0$, possiamo elevare al quadrato ambo i membri della nostra equazione ottenendo :

$$(2x - 3)^2 = 25\ ,\ 4x^2 - 12x + 9 = 25\ ,\ 4x^2 - 12x - 16 = 0\ ,\ x^2 - 3x - 4 = 0$$

$x_1 = -1$ (**S.A.**) , $x_2 = 4$ (**S.A.**)

Terzo metodo

$2x - 3 = \pm 5\ ,\quad 2x - 3 = -5\ ,\quad x = -1\ ,\quad 2x - 3 = 5\ ,\quad 2x - 3 = 5\ ,\ x = 4$

$|2x - 3| = x + 1$ **[D]**

Primo metodo

$\boxed{x \leq \frac{3}{2}} \Rightarrow -2x + 3 = x + 1\ ,\quad 3x = 2\ ,\ x = \frac{2}{3}$ (**S.A.**)

$\boxed{x > \frac{3}{2}} \Rightarrow 2x - 3 = x + 1\ ,\quad x = 4$ (**S.A.**)

Secondo metodo

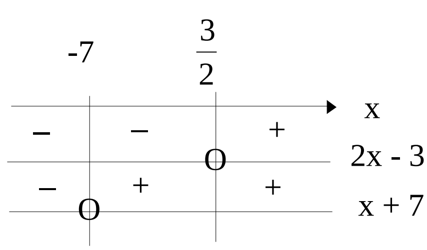
Per elevare al quadrato ambo i membri dell'equazione [D] dobbiamo supporre $x + 1 \geq 0$, cioè : $x \geq -1$. Sotto tali ipotesi otteniamo : $(2x - 3)^2 = (x + 1)^2$

$4x^2 - 12x + 9 = x^2 + 2x + 1$, $3x^2 - 14x + 8 = 0$, $x_1 = \frac{2}{3}$ (**S.A.**) , $x_2 = 4$ (**S.A.**)

Terzo metodo

Se supponiamo $x + 1 \geq 0$, cioè: $x \geq -1$ possiamo scrivere: $2x - 3 = \pm(x + 1)$

$2x - 3 = -x - 1 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}$ (**S.A.**) , $2x - 3 = x + 1 \Rightarrow x_2 = 4$ (**S.A.**)



$|2x - 3| = |x + 7|$

Primo metodo

$x \leq -7 \Rightarrow -2x + 3 = -x - 7$, $x = 10$ (**R.N.A.**)

$-7 < x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -2x + 3 = x + 7$, $x = -\frac{4}{3}$ (R.N.A.)

$x > \frac{3}{2} \Rightarrow 2x - 3 = x + 7$, $x = 10$ (**S.A.**)

Secondo metodo

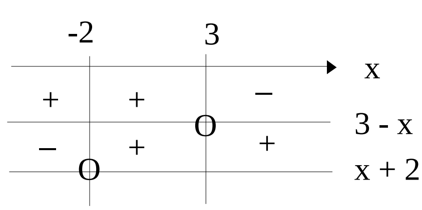
$(2x - 3)^2 = (x + 7)^2$, $4x^2 - 12x + 9 = x^2 + 14x + 49$, $3x^2 - 26x - 40 = 0$

$x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = 10$

Terzo metodo

$2x - 3 = \pm(x + 7)$ se $x \geq -1$

$2x - 3 = x + 7 \Rightarrow x = 10$, $2x - 3 = -x - 7 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$



$|3 - x| - |x + 2| = 5$

$\boxed{x \leq -2} \Rightarrow 3 - \cancel{x} + \cancel{x} + 2 = 5 \Rightarrow 5 = 5$

Tutti i punti dell'intervallo $]-\infty, -2]$ sono soluzioni dell'equazione data

$\boxed{-2 < x \leq 3} \Rightarrow 3 - x - x - 2 = 5 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2$

$\boxed{x > 3} \Rightarrow -3 + \cancel{x} - \cancel{x} - 2 = 5 \Rightarrow -5 = 5$

Nell'intervallo $]3,+\infty[$ l'equazione proposta non ammette soluzioni

x		1		2	
x - 2	−		−	O	+
x - 1	−	O	+		+

$$|x-2|+|x-1|=x-3$$

$\boxed{x\le 1}\Rightarrow -x+2-x+1=x-3\Rightarrow 3x=6\Rightarrow$

$x=\dfrac{2}{3}$ (**R.N.A.**)

$\boxed{-1<x\le 2}\Rightarrow -x+2+x-1=x-3\Rightarrow \quad x=4$ (**R.N.A.**)

$\boxed{x>2}\quad\Rightarrow x-2+x-1=x-3\Rightarrow \quad x=0$ (**R.N.A.**)

L'equazione proposta non ammette soluzioni.

Principali proprietà dei moduli e disuguaglianze notevoli

- $|-x|=|x|$ • $x\le |x| \quad \forall x\in R$ • $-|x|\le x\le |x| \quad \forall x\in R$

- **Disuguaglianza triangolare**: $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\le|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ il segno di uguaglianza vale quando a, b, sono concordi.

Dimostrazione: $-|a|\le a\le|a| \quad\wedge\quad -|b|\le b\le|b| \quad \forall a,b\in R$

Sommando membro a membro otteniamo: $-|a|-|b|\le a+b\le|a|+|b| \quad -(|a|+|b|)\le a+b\le|a|+|b|$

Ricordando che $|f(x)|\le k\in R^{+} \iff -k\le f(x)\le +k$ otteniamo $|a+b|\le|a|+|b|$ essendo $|a|+|b|$ un numero positivo.

- Generalizzando la relazione precedente otteniamo:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\cdots\cdots|\le|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|+|\mathbf{c}|+\cdots\cdots$$

dove il segno di uguaglianza vale quando a, b, c,**...** sono concordi.

- $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|\le|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ Per la dimostrazione partiamo dalla identità $|a+b|\le|a|+|b| \quad \forall a,b\in R$

Poiché essa è sempre vera lo sarà anche quando sostituisco b con $-b$. Si ottiene:

$$|a-b|\le|a|+|-b| \qquad |a-b|\le|a|+|b|$$

- $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdots\cdot|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|\cdots\cdot \qquad \left|\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right|=\dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$ Le due relazioni si dimostrano esaminando i casi possibili per i segni di a, b, c,**....**

- $|a - b| \geq |a| - |b|$ il segno di uguaglianza vale quando a, b sono concordi ed il modulo di a è maggiore del modulo di b.

- $$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \qquad \forall\, x,y \in R$$

- $$\big||x| - |y|\big| = |x + y| \leq |x| + |y| \qquad \text{se } xy > 0$$

- $$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| = |x| + |y| \qquad \text{se } xy < 0$$

- Disuguaglianza di **Cauchy - Schwarz**: $2|ab| \leq a^2 + b^2 \quad \forall\, a,b \in R$

Dimostrazione: $0 \leq (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \;\Rightarrow\; 2ab \geq -(a^2 + b^2)$

$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \;\Rightarrow\; 2ab \leq (a^2 + b^2)$

$-(a^2 + b^2) \leq 2ab \;\wedge\; 2ab \leq (a^2 + b^2) \;\Rightarrow\; 2|ab| \leq a^2 + b^2 \quad c.v.d.$

Inequazioni con valori assoluti

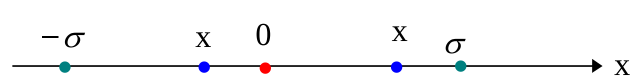
Le inequazioni con valori assoluti si risolvono ricordando che:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -x & se \quad x > 0 \end{cases} \qquad\qquad |f(x)| = \begin{cases} f(x) & se \quad f(x) > 0 \\ 0 & se \quad f(x) = 0 \\ -f(x) & se \quad f(x) > 0 \end{cases}$$

$$|x| = \pm x \text{ se } x > 0 \qquad , \qquad |f(x)| = \pm f(x) \quad \text{se} \quad f(x) > 0$$

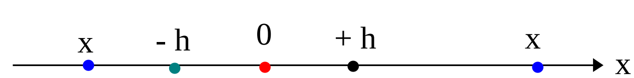
Particolarmente importanti, soprattutto in analisi matematica, sono le seguenti inequazioni con valori assoluti:

- $\left.\begin{matrix} |x| < \sigma \\ \sigma > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -\sigma < x < \sigma$



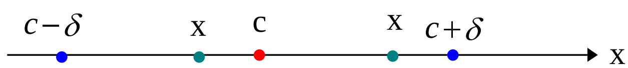
- $\left.\begin{matrix} |f(x)| < \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) < +\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < +\varepsilon \\ f(x) > -\varepsilon \end{cases}$

- $\left.\begin{matrix} |x| > h \\ h > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x < -h \;\wedge\; x > h$



- $\left.\begin{matrix} |f(x)| > k \\ k > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow f(x) < -k \;\wedge\; f(x) > k$

- $\left.\begin{array}{r} |x-c| < \delta \\ \delta > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad -\delta < x - c < \delta \quad \Leftrightarrow \quad c - \delta < x < c + \delta$



- $|f(x) - c| < \delta \in R^+ \Leftrightarrow -\delta < f(x) - c < \delta \Leftrightarrow c - \delta < f(x) < c + \delta$

- Particolarmente importanti ed utili sono le tre seguenti inequazioni:

$$|f(x)| < g(x) \qquad |f(x)| > g(x) \qquad |f(x)| > |g(x)|$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni reali di variabile reale.

- $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -g(x) < f(x) < g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x) \\ f(x) < g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

CASO PARTICOLARE

Se $g(x)$ è una costante , che per semplicità indicheremo con **b** , si ha: $|f(x)| < b$

Se $\boxed{b \leq 0}$ l'inequazione non ammette soluzioni in quanto un numero positivo non può essere più piccolo di un numero negativo

Se $\boxed{b > 0}$ allora le soluzioni dell'inequazione proposta coincidono con le soluzioni del sistema :

$$-b < f(x) < b \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} f(x) > -b \\ f(x) < b \end{cases}$$

- La soluzione dell'inequazione $|f(x)| > g(x)$ coincide con l'unione degli intervalli che risolvono la seguente inequazione: $\mathbf{g(x) < 0}$ ed i due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$$

CASO PARTICOLARE

Se $g(x)$ è una costante che , per semplicità indicheremo col simbolo **b**, l'inequazione diventa:

$$|f(x)| > b$$

Se $b < 0$ l'inequazione diventa una inidentità (disuguaglianza) in quanto il primo membro, mai negativo, è sicuramente maggiore di un numero negativo

Se $b \geq 0$ allora l'inequazione data è equivalente alle due seguenti inequazioni:

$$f(x) < -b \quad \wedge \quad f(x) > b$$

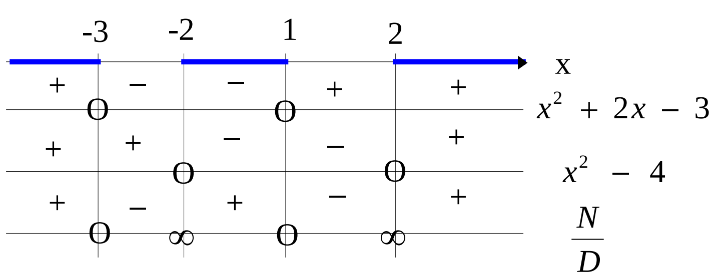
- L'inequazione $|f(x)| > |g(x)|$ è equivalente ai due seguenti sistemi di inequazioni:

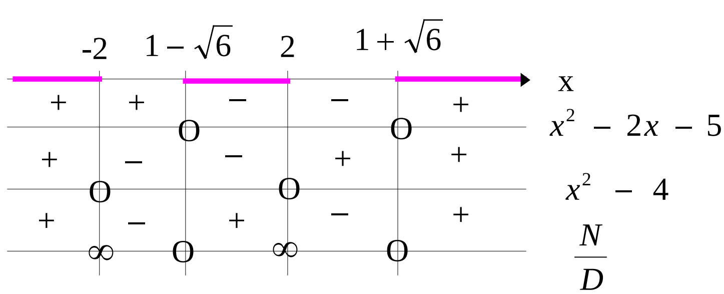
$$\begin{cases} f(x) > -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) < -g(x) \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

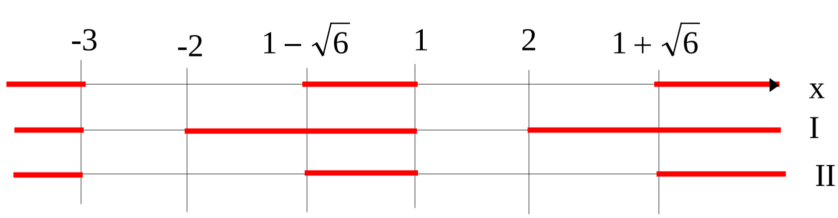
$\left|\dfrac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{x^2-4}}\right| \mathbf{< 1}$ per $x < -3 \; , \; 1 - \sqrt{6} < x < 1 \; , \; x > 1 + \sqrt{6}$

$$-1 < \frac{2x+1}{x^2-4} < 1 \quad , \quad \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x^2-4} > -1 \\ \dfrac{2x+1}{x^2-4} < 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} I & \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4} > 0 \quad per \quad x < -3 \, , -2 < x < 1 \, , x > 2 \\ \dfrac{x^2-2x-5}{x^2-4} > 0 \quad per \quad x < -2 \, , 1-\sqrt{6} < x < 2 \, , x > 1+\sqrt{6} \end{cases} \\ II & \end{array}$$







$$\frac{|x| - 3}{x + 1} < x - 1 \qquad \text{per} \qquad x > -1$$

Per $x \geq 0$ l'inequazione diventa: $\dfrac{x - 3}{x + 1} < x - 1$, $\dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1} > 0$ per $x \geq 0$

in quanto: $x^2 - x + 2 > 0 \quad \forall\, x \in R$

Per $x < 0$ l'inequazione diventa: $\dfrac{-x - 3}{x + 1} < x - 1$, $\dfrac{x^2 + x + 2}{x + 1} > 0$ per $-1 < x < 0$

in quanto: $x^2 + x + 2 > 0 \quad \forall\, x \in R$

L'intervallo **]-1,+∞[** è la soluzione dell'inequazione proposta.