Unità Didattica N° 15

I sistemi di equazioni a due incognite

- 01) Sistemi di secondo grado a due incognite
- 02) Sistemi simmetrici
- 03) Sistemi omogenei

Sistemi di secondo grado a due incognite

Definizione: Dicesi **grado** di un sistema di equazioni il **prodotto** dei gradi delle equazioni che compongono il sistema.

Definizione: Dicesi **sistema di secondo grado a due incognite** un sistema, che ridotto a forma canonica, assume la seguente forma:

$$\begin{cases} \mathbf{px + qy + r = 0} & \rightarrow \text{equazione di primo grado} \\ \mathbf{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0} & \rightarrow \text{equazione di secondo grado} \end{cases}$$

Un sistema di secondo grado a due incognite si risolve col **metodo di sostituzione**.

Dall'equazione di primo grado si ricava la $x = -\frac{qy + r}{p}$ (la $y = -\frac{px + r}{q}$) e la si sostituisce nell'equazione di secondo grado ad una incognita detta **equazione risolvente il sistema**.

$$\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = 4} \\ \mathbf{5x^2 - xy + 3y^2 - 7x = 11} \end{cases} \quad y = \frac{4 - 3x}{2}, \quad 5x^2 - \frac{x(4 - 3x)}{2} + \frac{3(4 - 3x)^2}{4} - 7x = 11$$

$$53x^2 - 108x + 4 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{2}{53}, \quad y_1 = -1, \quad y_2 = \frac{103}{53}, \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = \frac{2}{53} \\ y_2 = \frac{103}{53} \end{cases}$$

Sistemi simmetrici

Un sistema di due equazioni in due incognite si dice **simmetrico** se le due equazioni non mutano se scambiamo tra loro le due incognite. Da ciò discende che se il sistema simmetrico ammette la radice $x = \alpha, y = \beta$ ammetterà anche la soluzione $x = \beta, y = \alpha$. Il sistema simmetrico

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases} \quad \text{è detto} \quad \mathbf{\text{sistema simmetrico fondamentale.}}$$

Esso si risolve mediante l'**equazione ausiliaria**: $t^2 - St + P = 0$ che ammette le soluzioni:

$$t = t_1, t = t_2. \quad \text{Le soluzioni del sistema fondamentale sono:} \quad \begin{cases} x = t_1 \\ y = t_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = t_2 \\ y = t_1 \end{cases}$$

In generale un sistema simmetrico si risolve utilizzando le **formule di Waring**:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = S^3 - 3PS$$

$$x^4 + y^4 = (x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 2x^2y^2 = S^4 - 4PS^2 + 2P^2$$

$$x^5 + y^5 = (x + y)^5 - 5xy(x + y)^3 + 5x^2y^2(x + y) = S^5 - 5PS^3 + 5SP^2$$

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ 16(x^2 + y^2) - 3xy - 52(x + y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x + y)^2 - 3xy = 13 \\ 16(x + y)^2 - 35xy - 52(x + y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$$

$$\begin{cases} S^2 - 3P = 13 \\ 16S^2 - 35P - 52S = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} P = \frac{S^2 - 13}{3} \\ 16S^2 - 35\frac{S^2 - 13}{3} - 52S = 0 \end{cases} \quad 48S^2 - 35S^2 + 455 - 156S = 0$$

$$13S^2 - 156S + 455 = 0 \quad S = \frac{78 \pm \sqrt{6048 - 5915}}{13} = \frac{78 \pm \sqrt{169}}{13} = \frac{78 \pm 13}{13} = \begin{cases} S_1 = 5 \\ S_2 = 7 \end{cases}$$

$$P_1 = \frac{25 - 13}{3} = 4, \quad P_2 = \frac{49 - 13}{3} = 12 \quad \begin{cases} x + y = S_1 \\ xy = P_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0, \quad t_1 = 1, t_2 = 4 \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = S_2 \\ xy = P_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} \quad t^2 - 7t + 12 = 0, \quad t_1 = 3, t_2 = 4 \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 97 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} (x + y)^2 - 4xy(x + y)^2 + 2x^2y^2 = 97 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ 625 - 100xy + 2(xy)^2 = 97 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases} \quad \begin{cases} S = 5 \\ 528 - 100P + 2P^2 = 0 \end{cases} \quad 2P^2 - 100P + 528 = 0, \quad P^2 - 50P + 264 = 0$$

$$P = 25 \pm \sqrt{625 - 264} = \begin{cases} P_1 = 6 \\ P_2 = 44 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = S \\ xy = P_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \quad t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 44 \end{cases} \quad t^2 - 5t + 44 = 0$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 176}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-151}}{2} = \frac{5 \pm i\sqrt{151}}{2}, \quad \begin{cases} x = \frac{5 - i\sqrt{151}}{2} \\ y = \frac{5 + i\sqrt{151}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5 + i\sqrt{151}}{2} \\ y = \frac{5 - i\sqrt{151}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ xy = 225 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ (\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}) = 225 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15 \end{cases} \quad \text{Pongo: } \begin{cases} \sqrt{x} = u \\ \sqrt{y} = z \end{cases} \quad \begin{cases} u + z = 8 \\ u \cdot z = 15 \end{cases}$$

$$t^2 - 8t + 15 = 0 \quad t = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1 = \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 3 \\ u = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 5 \\ u = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{y} = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 \\ y = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = 5 \\ \sqrt{y} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 25 \\ y = 9 \end{cases}$$

Sistemi omogenei

Un sistema costituito da due equazioni di secondo grado in due incognite si dice **omogeneo** se nelle sue equazioni mancano i termini di primo grado. Quindi un **sistema omogeneo**, ridotto

a forma canonica assume la seguente forma:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases}$$

Si possono presentare due casi:

1) Primo caso: $d \neq 0, d_1 \neq 0$ Il sistema si risolve ponendo:

$$y = tx$$

$$\begin{cases} ax^2 + btx^2 + ct^2x^2 = d \\ a_1x^2 + b_1tx^2 + c_1t^2x^2 = d_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2(a + bt + ct^2) = d \\ x^2(a_1 + b_1t + c_1t^2) = d_1 \end{cases} \quad \text{Dividendo membro a membro otteniamo:}$$

$$\frac{x^2(a + bt + ct^2)}{x^2(a_1 + b_1t + c_1t^2)} = \frac{d}{d_1} \quad d_1(a + bt + ct^2) = d(a_1 + b_1t + c_1t^2)$$

Si tratta di una equazione di secondo grado in t le cui radici sono t_1 e t_2 . Il sistema omogeneo dato è **equivalente** ai due seguenti sistemi di secondo grado:

$$\begin{cases} y = t_1x \\ ax^2 + bxy + cy^2 = d \end{cases} \quad \begin{cases} y = t_2x \\ ax^2 + bxy + cy^2 = d \end{cases}$$

oppure ai due seguenti sistemi di secondo grado:

$$\begin{cases} y = t_1x \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = t_2x \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + y^2 = 10 \\ x^2 + xy = 15 \end{cases} \quad \boxed{y = tx} \quad \begin{cases} 2x^2 - 2tx^2 + t^2x^2 = 10 \\ x^2 + tx^2 = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2(2 - 2t + t^2) = 10 \\ x^2(1 + t) = 15 \end{cases}$$

$$\frac{x^2(2 - 2t + t^2)}{x^2(1 + t)} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad 6 - 6t + 3t^2 = 2 + 2t, \quad 3t^2 - 8t + 4 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{3} = \frac{4 \pm 2}{3} = \begin{cases} t_1 = \frac{2}{3} \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ x^2 + xy = 15 \end{cases} \quad x^2 + \frac{2}{3}x^2 = 15, \quad 3x^2 + 2x^2 = 45, \quad 5x^2 = 45, \quad x^2 = 9, \quad x = \pm 3$$

$$x = -3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}(-3) = -2 \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \quad x = 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}(3) = 2 \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ x^2 + xy = 15 \end{cases} \quad x^2 + 2x^2 = 15, \quad 3x^2 = 15, \quad x^2 = 5, \quad x = \pm\sqrt{5} \quad \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = 2\sqrt{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{5} \\ y = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

2) SECONDO CASO: $d = 0, d_1 \neq 0$

Tenendo presente la seconda equazione del sistema omogeneo deduciamo subito che deve essere :

$$x \neq 0, y \neq 0 \text{ in quanto sappiamo che } d_1 \neq 0.$$

Ponendo $y = tx$ la prima equazione del sistema omogeneo diventa : $ax^2 + btx^2 + ct^2x^2 = 0$

$x^2(a + bt + ct^2) = 0$ e quindi, dovendo essere $x \neq 0$, otteniamo l'equazione di secondo grado in

t: $a + bt + ct^2 = 0$ le cui radici sono t_1 e t_2

Qualora l'equazione $ct^2 + bt + a = 0$ diventa di primo grado ($c = 0 \Rightarrow cy^2 = 0 \Rightarrow$

$ax^2 + bxy = 0$) allora alle soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = tx = -\frac{a}{b}x \\ a_1x^2 + b_1tx^2 + c_1t^2x^2 = d_1 \end{cases}$$

bisogna aggiungere le soluzioni del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ a_1x^2 + b_1tx^2 + c_1t^2x^2 = d_1 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{\frac{d_1}{d}} \end{cases}$

Il sistema omogeneo dato è equivalente ai due sistemi di secondo grado:

$$\begin{cases} y = t_1x \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = t_2x \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy + 3y^2 = 0 \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 11 \end{cases} \quad y = tx, \quad 2tx^2 + 3t^2x^2 = 0, \quad x^2(2t + 3t^2) = 0, \quad 2t + 3t^2 = 0$$

$$t(2 + 3t) = 0, \quad 2 + 3t = 0, \quad t_1 = -\frac{2}{3}, \quad t_2 = 0$$

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 11 \end{cases} \quad x^2 + 3x\left(-\frac{2}{3}x\right) + 5\cdot\frac{4}{9}x^2 = 11, \quad x^2 - \frac{6x^2}{3} + \frac{20x^2}{9} = 11$$

$$9x^2 - 18x^2 + 20x^2 = 99, \quad 11x^2 = 99, \quad x^2 = 9, \quad x = \pm 3$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{2}{3}(-3) \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{2}{3}(3) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 11 \end{cases} \quad x^2 = 11, \quad x = \pm\sqrt{11} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{11} \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \sqrt{11} \\ y = 0 \end{cases}$$