

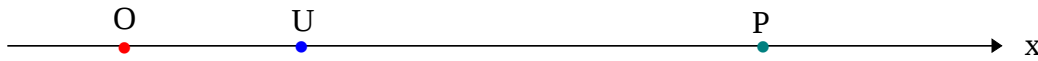
U.D. N° 15

Funzioni e loro rappresentazione grafica

- 01)** Le coordinate cartesiane
- 02)** La distanza tra due punti
- 03)** Coordinate del punto medio di un segmento
- 04)** Le coordinate del baricentro di un triangolo
- 05)** Equazione cartesiana di una curva piana
- 06)** Il grafico di una equazione di primo grado a due incognite .
- 07)** Le proprietà cartesiane della retta euclidea
- 08)** Rette parallele
- 09)** Rette perpendicolari
- 10)** Le coordinate del punto comune a due rette
- 11)** Fascio di rette
- 12)** Distanza di un punto da una retta
- 13)** La circonferenza
- 14)** Il grafico della funzione $y = ax^2 + bx + c$
- 15)** Il grafico della funzione $x = ay^2 + by + c$

Le coordinate cartesiane

Su di una retta r consideriamo un punto O , detto **origine**, un **verso positivo** indicato con una freccia ed un **segmento unitario** OU . In questo caso la retta r dicesi **asse delle ascisse** e viene indicata col simbolo x e di solito è disegnata in posizione orizzontale.

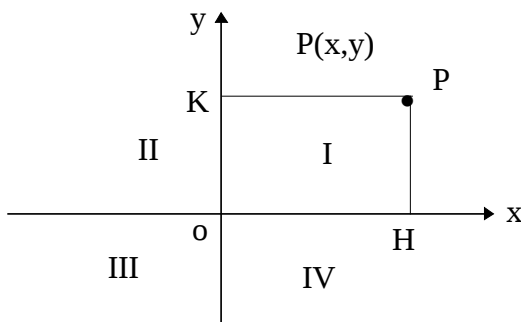


Ogni punto $P \in r$ individua il segmento OP . Noi sappiamo che $\frac{OP}{OU}$ è un numero reale che esprime la misura del segmento OP rispetto al segmento OU assunto come segmento unitario.

Adesso poniamo: $\frac{OP}{OU} = x$ e conveniamo di considerare x **positivo** (**negativo**) se P si trova alla **destra** (**sinistra**) di O . Il numero x dicesi **ascissa del punto P**.

Da quanto abbiamo detto è evidente che esiste una **corrispondenza biunivoca** fra i numeri reali relativi $\mathbf{R}$ ed i punti $\mathbf{P}$ di una retta r sulla quale abbiamo fissato un **punto origine O**, un **verso positivo**, una **unità di misura** per i segmenti.

Adesso consideriamo due rette orientate x ed y fra loro perpendicolari. La retta x è orientata da sinistra verso destra, la retta y è orientata dal basso verso l'alto. Sia O il punto comune alle rette x ed y . Sia P un punto qualsiasi del piano. Sia H la proiezione ortogonale di P sulla retta x e K la proiezione ortogonale di P sulla retta y .



Sia $x = \frac{OH}{OU}$ l'ascissa del punto H rispetto alla retta

orientata x , sia $y = \frac{OK}{OU}$ l'ascissa del punto K

rispetto alla retta orientata y . I numeri reali relativi x ed

y si dicono le **coordinate cartesiane** del punto P .

Si scrive $P(x,y)$ e si legge <<**P di coordinate x ed y**>>. x è detta **ascissa** del punto P , y è detta **ordinata** del punto P . La retta orientata x è detta **asse delle ascisse** o **asse delle x**, la retta orientata y è detta **asse delle ordinate** o **asse delle y**. Le due rette x ed y costituiscono un **sistema di assi cartesiani ortogonali**. Il punto O è detto **origine degli assi**.

Da quanto si è detto si deduce che esiste una **corrispondenza biunivoca** fra le coppie ordinate di numeri reali ed i punti di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani.

Le rette **x** ed **y** dividono il piano in 4 parti ciascuna delle quali prende il nome di **quadrante**.

Le rette **x** ed **y** e le loro due bisettrici dividono il piano in **8** parti, ciascuna delle quali prende il nome di **ottante**.

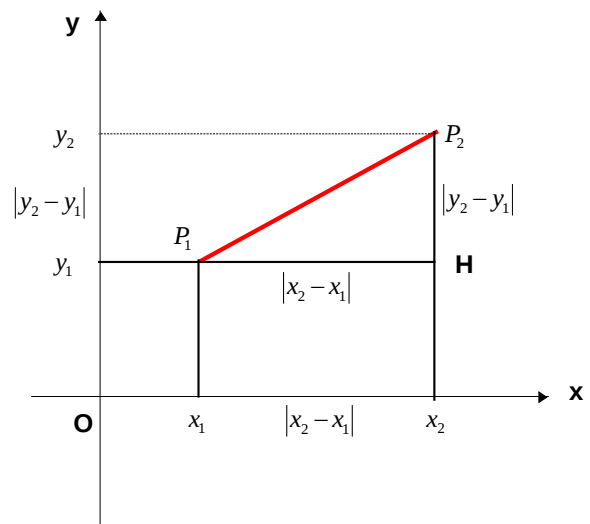
La distanza tra due punti

La distanza tra i punti $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$ si calcola applicando la seguente formula:

$$d(P_1, P_2) = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dimostrazione

Basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHB.



$$\overline{P_1P_2} = d(P_1, P_2) = \sqrt{\overline{P_1H}^2 + \overline{P_2H}^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$A(-1, 2), B(-5; 3) \quad d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-5 + 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

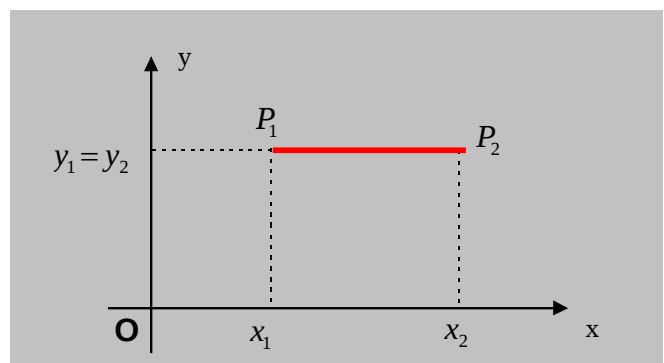
Osservazione: Se i punti $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$ hanno la stessa ordinata ($y_1 = y_2$) allora il segmento P_1P_2 è parallelo all'asse delle ascisse.

In questo caso abbiamo:

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1|$$

Possiamo anche dire che:

$$d(P_1, P_2) = \text{ascissa maggiore} - \text{ascissa minore}$$

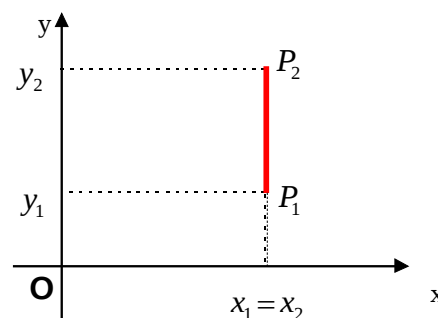


Se i punti $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$ hanno la **stessa ascissa** ($x_1 = x_2$) allora il segmento P_1P_2 è parallelo all'asse delle ordinate.

In questo caso abbiamo: $d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1|$

Possiamo anche dire che:

$d(P_1, P_2) = \text{ordinata maggiore} - \text{ordinata minore}$

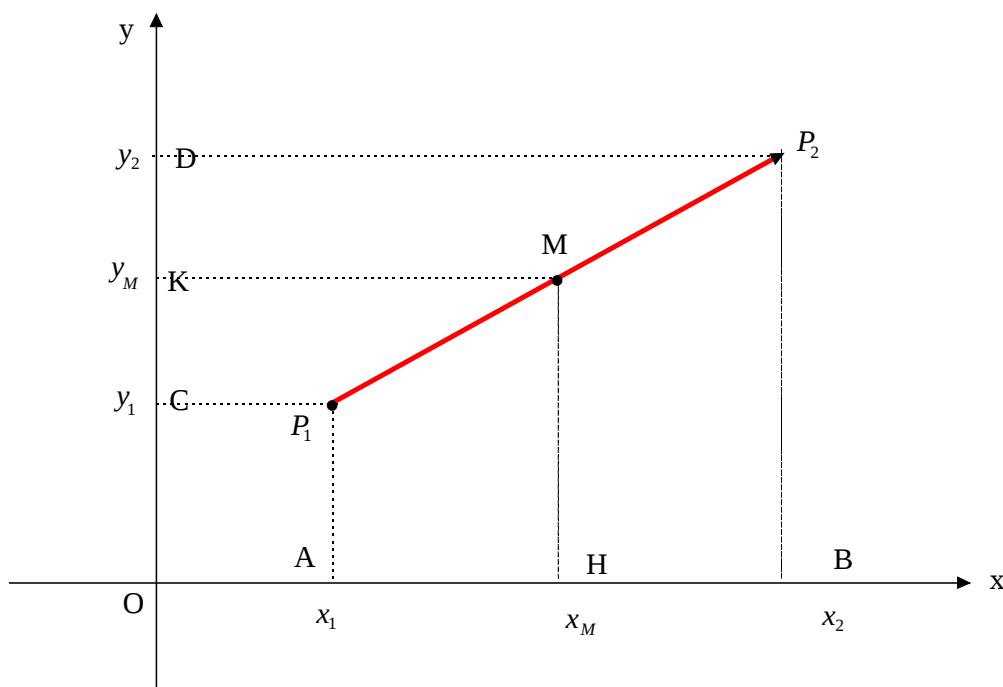


Le coordinate del punto medio di un segmento

Sia $M(x_M, y_M)$ il punto medio del segmento di estremi $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$. Ricordando che in un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali a segmenti uguali sull'una corrispondono segmenti uguali sull'altra abbiamo:

$$MP_1 = MP_2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} AH = HB \\ CK = KD \end{array} \quad \begin{array}{l} x_M - x_1 = x_2 - x_M \\ y_M - y_1 = y_2 - y_M \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



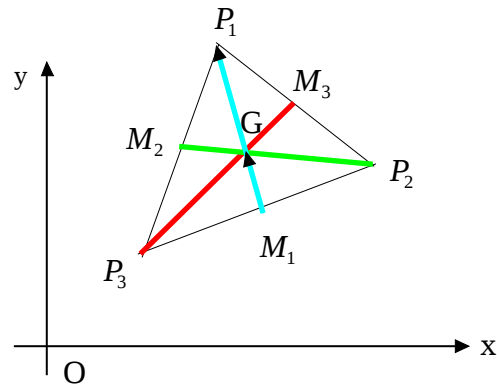
Le coordinate del baricentro di un triangolo

Per calcolare le coordinate del **baricentro** $G(x_G, y_G)$ del triangolo di vertici $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$

, $P_3(x_3, y_3)$ basta applicare le seguenti formule: $x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

Che si dimostrano applicando opportunamente il secondo teorema di Talete.

Coordinate del baricentro di un triangolo del quale conosciamo le coordinate dei suoi vertici $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$



Equazione cartesiana di una curva piana

Definizione: Dicesi curva piana il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate $(x; y)$ verificano una equazione a due incognite $A(x; y) = 0$.

Se tale equazione è di primo grado, la curva è una retta, se è di secondo grado la curva è una conica, cioè una circonferenza o una parabola o una ellisse o una iperbole.

L'equazione $2x - 3y + 12 = 0$ rappresenta una retta, l'equazione $y = 2x^2 - 3x + 5$ rappresenta una parabola ad asse verticale, $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ rappresenta una circonferenza di centro $C(2; -3)$, l'equazione $16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$ rappresenta un'ellisse, l'equazione $x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ rappresenta una iperbole.

Il grafico di una equazione di primo grado a due incognite

Definizione: Dicesi retta il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate $(x; y)$ verificano una equazione di primo grado a due incognite

$$ax + by + c = 0 \quad [B]$$

è l'**equazione generale** della retta o **equazione della retta sotto forma implicita**.

$by = -ax - c \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ Ponendo $m = -\frac{a}{b}$, $n = -\frac{c}{b}$ l'equazione [B] diventa:

$$y = mx + n \quad [C]$$

che rappresenta l'**equazione canonica** della retta o **equazione della retta sotto forma esplicita**. Il numero reale relativo n dicesi **ordinata all'origine** perché rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y , mentre m dicesi **coefficiente angolare** della retta. L'equazione [C] non si presta a rappresentare rette parallele all'asse delle y in quanto m perde di significato.

$4x + 3y - 12 = 0$ **equazione generale della retta**, $y = -\frac{4}{3}x + 4$ **equazione canonica**

della retta , $m = -\frac{4}{3}$ = **coefficiente angolare** della retta , $n = 4$ = **ordinata all'origine**

Equazione segmentaria della retta

Dall'equazione generale della retta ricaviamo: $ax + by = -c$, $\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$

$$\frac{\frac{x}{-\frac{c}{a}}}{-\frac{c}{a}} + \frac{\frac{y}{-\frac{c}{b}}}{-\frac{c}{b}} = 1 \quad \text{Se poniamo: } p = -\frac{c}{a} \text{ , } q = -\frac{c}{b} \text{ otteniamo: } \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad [D]$$

che rappresenta l'**equazione segmentaria** della retta.

I numeri reali relativi p e q sogliono chiamarsi le **intercette** (della retta sugli assi cartesiani) in quanto il primo rappresenta l'ascissa del punto in cui la retta incontra l'asse x , il secondo l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse y .

L'**equazione segmentaria** della retta $7x + 3y - 21 = 0$ è: $\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 1$

Equazioni di rette aventi una posizione particolare rispetto agli assi cartesiani

$x = k$ rappresenta l'equazione di una generica retta parallela all'asse delle y .

Essa si ricava ponendo: $b = 0$, $k = -\frac{c}{a}$. Risulta: $m = -\frac{a}{b} = \infty$

$y = h$ rappresenta l'equazione di una generica retta parallela all'asse delle x .

Essa si ricava ponendo: $a = 0$, $k = -\frac{c}{b}$. Risulta: $m = -\frac{a}{b} = 0$

$k(h)$ rappresenta l'ascissa (l'ordinata) di un generico punto della retta.

$x = 0$ è l'equazione dell'asse delle ordinate. Si ottiene per: $b = c = 0$, $a = 1$, $m = \infty$

$y = 0$ l'equazione dell'asse delle ascisse. Si ottiene per: $a = c = 0$, $b = 1$, $m = 0$

$y = x$ è l'equazione della bisettrice del I e III quadrante, detta anche **bisettrice fondamentale**

degli assi cartesiani. Risulta: $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$, $m = 1$

$y = -x$ è l'equazione della bisettrice del II e IV quadrante, detta anche **bisettrice secondaria** degli assi cartesiani. Risulta: $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $m = -1$

$ax + by = 0$ oppure $y = mx$ è l'equazione di una generica retta passante per l'origine degli assi cartesiani.

Equazione della retta passante per due punti

Per scrivere l'equazione della retta passante per i punti $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$ basta applicare la

seguente formula :
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad [E]$$

Essa non si presta a rappresentare né rette parallele all'asse delle ascisse ($y = y_1$) né rette parallele all'asse delle ordinate ($x_2 = x_1$) in quanto, annullandosi uno dei due denominatori, verrebbe a perdere di significato.

Equazione della retta passante per un punto ed avente coefficiente angolare assegnato

Ponendo: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{b}$ [F] la [E] diventa: $y - y_1 = m(x - x_1)$ [G]

che rappresenta l'equazione della retta passante per un dato punto $P_1(x_1, y_1)$ ed avente coefficiente angolare m assegnato. Il numero m è detto, come sappiamo, **coefficiente angolare** della retta.

Rappresentazione grafica della retta

Vediamo come è possibile disegnare una retta quando conosciamo la sua equazione. Se la retta è obliqua basta trovare le coordinate dei punti d'intersezione con gli assi cartesiani. Se passa per l'origine degli assi, basta trovare un suo qualsiasi altro punto distinto dall'origine; preferibilmente

quello che ha come coordinate numeri interi. A volte è conveniente scrivere l'equazione sotto forma segmentaria e poi disegnarla utilizzando l'interpretazione geometrica dei simboli p e q. Se vogliamo disegnare la retta di equazione $2x - 5y - 10 = 0$ basta scriverla in forma segmentaria, cioè:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$$

essendo: $p = 5$, $q = -2$.

Se invece vogliamo disegnare la retta $2x + 5y = 0$ bisogna calcolare le coordinate di un suo punto, ad esempio $A(5, -2)$. Infatti ponendo nell'equazione della retta $x = 5$ si ricava $y = -2$. Adesso la retta può essere disegnata in quanto conosciamo le coordinate di due suoi punti.

Il punto comune a due rette

Per calcolare le coordinate del punto $P(x, y)$ comune alle rette r ed s aventi, rispettivamente , equazioni: r: $ax + by + c = 0$ s: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ basta risolvere il seguente sistema :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases} \quad [10]$$

Applicando il teorema di Cramer otteniamo:

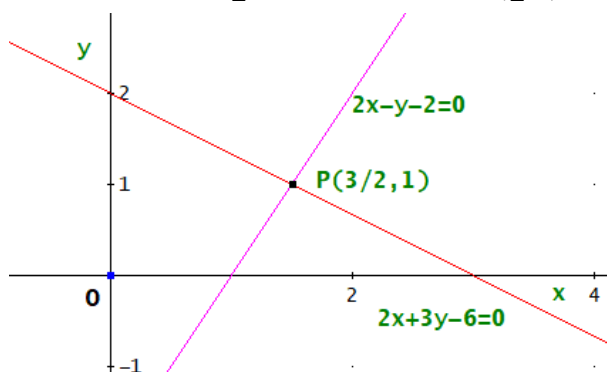
$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a_1 & -c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c - ac_1}{ab_1 - a_1b} \quad [11]$$

Quindi l'intersezione delle due rette è il punto $P\left(\frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}, \frac{a_1c - ac_1}{ab_1 - a_1b}\right)$

Se vogliamo calcolare le coordinate del punto comune alle rette di equazioni $2x + 3y - 6 = 0$ e

$2x - y - 2 = 0$, dobbiamo risolvere il sistema: $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ 2x = y + 2 \end{cases}$

$$6 - 3y = y + 2 \quad x = \frac{3}{2} \quad y = 1 \quad P\left(\frac{3}{2}, 1\right)$$



Discutiamo le soluzioni [11] del sistema [10] .

1° caso: $ab_1 - a_1b \neq 0$ cioè: $\frac{a_1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$ cioè i coefficienti omonimi delle variabili x ed y **non**

sono proporzionali. Sotto queste ipotesi, le rette r ed s sono incidenti. Viceversa, se le rette r ed s sono incidenti, allora i coefficienti omonimi delle variabili x ed y **non sono proporzionali.**

2° caso: cioè: $ab_1 - a_1b = 0$ $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} \neq \frac{c_1}{c}$ cioè i coefficienti omonimi delle variabili x ed y

sono proporzionali. Ponendo: $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, il sistema da risolvere diventa:

$$\begin{cases} ax + by = -c \\ kax + kby = -c_1 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + by = -c \\ ax + by = -\frac{c_1}{k} \end{cases}$$

Essendo $\frac{c_1}{k} \neq c$ il sistema non ammette soluzioni , cioè non esiste alcuna coppia di numeri (x, y)

che verifica simultaneamente le due equazioni del sistema [10]. In questo caso le due rette sono **parallele e distinte.** Viceversa se le rette r ed s sono parallele e distinte allora i coefficienti omonimi delle variabili x ed y **sono proporzionali**, cioè le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare.

$r // s \Rightarrow a_1 = ka$, $b_1 = kb$ con $k \in R$.

Ponendo $k = 1$ otteniamo : $a_1 = a$, $b_1 = b$ ed anche: $m_1 = m$

Risultano fra loro parallele le rette aventi equazioni generali:

$$ax + by + c = 0 \quad , \quad ax + by + h = 0$$

ed anche le rette aventi equazioni in forma canonica $y = mx + n$, $y = mx + h$

Possiamo utilizzare queste conclusioni per scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$ e parallela alla retta r di equazione $ax + by + c = 0$.

Una generica retta parallela ad r ha equazione: $ax + by + h = 0$ ($y = mx + h$)

$P_1 \in s \Rightarrow ax_1 + by_1 + h = 0$ ($y_1 = mx_1 + h$) , $h = -ax_1 - by_1$ ($h = -mx_1 - y_1$)

Quindi l'equazione della retta s passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$ assume una delle due seguenti forme:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \quad y - y_1 = m(x - x_1) \quad [12]$$

3° caso: $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k$ $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $c_1 = kc$ con $k \in R$.

Il sistema [10] assume la forma:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ kax + kby + kc = 0 \end{cases}$$

Le equazioni di questo sistema sono equivalenti e quindi rappresentano la stessa retta .

Riassumendo possiamo affermare quanto segue:

Date le rette r ed s aventi rispettivamente equazioni:

$$r: ax + by + c = 0 \quad s: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{si ha:}$$

r ed s incidenti	$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$
r ed s coincidenti	$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k \quad \text{cioè: } a_1 = ka, \quad b_1 = kb, \quad c_1 = kc$
r ed s parallele e distinte	$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k \neq \frac{c_1}{c} \quad \text{cioè } a_1 = ka, \quad b_1 = kb, \quad c_1 \neq kc$

Rette parallele

Teorema

C.N.S. perché due rette siano **parallele** è che i **loro coefficienti angolari siano uguali**.

$$r: ax + by + c = 0, \quad y = mx + n, \quad s: a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad y = m_1x + n_1$$

$$r // s \Rightarrow m = m_1 \quad \text{oppure} \quad a_1 = ka, \quad b_1 = kb \quad \text{con } k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

cioè k è una costante di proporzionalità non nulla. In particolare essa può assumere il valore $k = 1$ ed il parallelismo tra le due rette si trasforma nella uguaglianza tra i coefficienti delle variabili omonime: $a_1 = a, \quad b_1 = b$.

Equazione della retta passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$ e parallela alla retta r di equazione $ax + by + c = 0$:

$$\mathbf{a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0}$$

Equazione della retta passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$ e parallela alla retta r di equazione $y = mx + n$:

$$\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Rette perpendicolari

C.N.S. perché due rette siano perpendicolari è che i loro coefficienti angolari siano **antireciproci**, cioè che il prodotto dei loro coefficienti angolari sia **-1**.

$$r \perp s \Leftrightarrow [m \cdot m_1 = -1, \quad \text{oppure} \quad aa_1 + bb_1 = 0 \quad \text{oppure} \quad a_1 = kb \quad \text{e} \quad b_1 = -ka \quad \text{con } k \in \mathbb{R} - \{0\}]$$

$$\text{oppure } a_1 = b \quad \text{e} \quad b_1 = -a \quad \text{oppure } a_1 = -b \quad \text{e} \quad b_1 = a$$

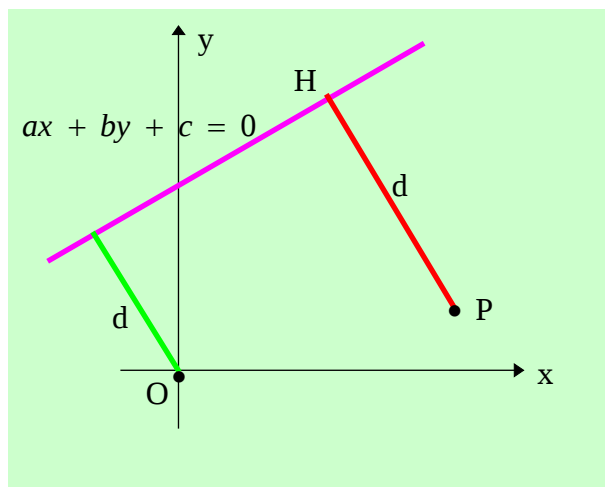
Equazione della retta passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $ax + by + c = 0$:

$$\mathbf{b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0}$$

Equazione della retta passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = mx + n$:

$$\mathbf{y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)}$$

Distanza di un punto da una retta



Per calcolare la distanza del punto $P_1(x_1, y_1)$ dalla retta r di equazione $ax + by + c = 0$ basta applicare la seguente formula

$$d(P, r) = \overline{PH} = d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Se $P \equiv O$ la precedente formula diventa:

$$d(O, r) = \overline{OH} = d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Fascio di rette

Dicesi **fascio di rette a centro proprio** l'insieme di tutte le rette del piano passanti per uno stesso punto $P_o(x_o, y_o)$, detto **centro del fascio**. L'equazione del fascio di rette avente come centro il punto $P_o(x_o, y_o)$ è: $y - y_o = m(x - x_o)$ o meglio $a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0$

Al variare del parametro m otteniamo tutte le rette del piano passanti per il punto $P_o(x_o, y_o)$, esclusa quella parallela all'asse y . Un fascio di rette a centro proprio è individuato quando conosciamo le coordinate del suo centro oppure quando conosciamo le equazioni di due sue qualsiasi rette.

Vediamo adesso come è possibile calcolare l'equazione del fascio proprio di rette individuato dalla retta r (di equazione $ax + by + c = 0$) e dalla retta s (di equazione $a_1x + b_1y + c_1 = 0$).

Se h (o k) è un numero reale qualsiasi, allora:

$$ax + by + c + h \cdot (a_1x + b_1y + c_1) = 0 \quad \text{oppure} \quad k \cdot (ax + by + c) + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

è l'**equazione del fascio di rette** individuato dalle rette r ed s .

Scrivere l'equazione del fascio individuato dalle rette $3x + y - 3 = 0$, $4x - 3y + 12 = 0$

$$3x + y - 3 + k \cdot (4x - 3y + 12) = 0 \quad , \quad 3x + y - 3 + 4kx - 3ky + 12k = 0$$

$$(3+4k)x + (1-3k)y + 12k - 3 = 0 \quad \text{equazione del fascio di rette}$$

Se il parametro figura soltanto nel termine noto, allora abbiamo il fascio di rette a **centro improprio** o **fascio di rette parallele**.

PROBLEMA INVERSO

Data l'equazione del fascio di rette $(2+m)x - (3+m)y + 13 + 5m = 0$ calcolare le coordinate del suo centro.

Primo procedimento

1) Ci calcoliamo le equazioni delle rette che individuano il fascio

$$2x + mx - 3y - my + 13 + 5m = 0 \quad , \quad 2x - 3y + 13 + m(x - y + 5) = 0$$

$2x - 3y + 13 = 0$, $x - y + 5 = 0$ sono le rette che individuano il fascio .

2) Le coordinate del centro P del fascio si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni che individuano il fascio .

$$\begin{cases} 2x - 3y + 13 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \quad P(-2, 3)$$

Secondo procedimento

Basta attribuire al parametro **m** due particolari e convenienti valori, Si ottengono due rette del fascio che con la loro intersezione ci consentono di calcolare le coordinate del centro del fascio.

$$m = -2 \Rightarrow -y + 3 = 0 \Rightarrow y = 3; m = -3 \Rightarrow -x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad P(-2, 3)$$

Equazioni delle bisettrici degli angoli formati da due rette

Consideriamo le rette concorrenti **r** ed **s** aventi rispettivamente equazioni $ax + by + c = 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Dalla geometria euclidea sappiamo che la bisettrice di un angolo è il **luogo geometrico** dei punti del piano equidistanti dai due lati . Detto $P(x, y)$ un generico punto di una della due bisettrici possiamo scrivere: $\overline{PH} = \overline{PK}$ e quindi:

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \quad \text{cioè:} \quad \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\pm \sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad |x + 2| = 5 \quad \Rightarrow \quad x + 2 = \pm 5 \quad \Rightarrow \quad x = -7 \quad , \quad x = 3$$

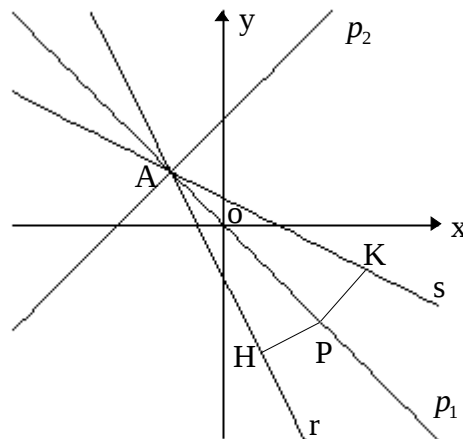
Le bisettrici richieste sono due e sono sempre fra loro **perpendicolari**.

Calcolare le bisettrici degli angoli formati dalle rette $x + 2y - 1 = 0$, $2x + y + 1 = 0$.

$$\frac{x + 2y - 1}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2x + y + 1}{\pm \sqrt{4 + 1}} \quad , \quad x + 2y - 1 = 2x + y + 1 \quad , \quad x - y + 2 = 0$$

$$x + 2y - 1 = -2x - y - 1$$

$$x + y = 0$$



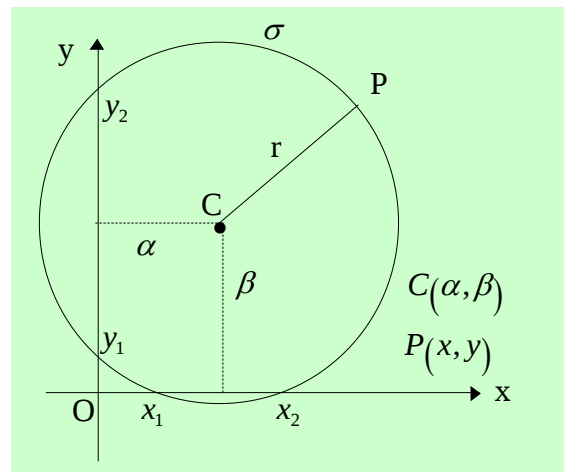
Equazione della circonferenza

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti **P** del piano equidistanti da un punto fisso **C** detto **centro**.

Riferito il piano ad un sistema ortonormale di assi cartesiani, detto $C(\alpha, \beta)$ il centro della circonferenza σ , $P(x, y)$ un generico punto di σ abbiamo:

$$CP = r \Rightarrow CP^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2} \quad [1]$$



La [1] è l'equazione di una circonferenza di dato centro e dato raggio. Se $C \equiv O$ la [1] diventa:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad [2]$$

La [2] rappresenta l'equazione di una circonferenza avente il centro coincidente con l'origine degli assi cartesiani.

Equazione generale della circonferenza

L'equazione [1] assume la seguente forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ [3]

se poniamo: [4] $a = -2\alpha$, $b = -2\beta$, $c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = -\frac{b}{2}, r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \quad [5]$$

Intersezione di due circonferenze

$$\sigma: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad \sigma_1: x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

Per calcolare le coordinate dei punti comuni alle circonferenze σ e σ_1 basta risolvere il seguente

$$\text{sistema: } \begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases} \quad [7]$$

Sottraendo membro a membro otteniamo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ \hline \# \quad \# \quad (a-a_1)x + (b-b_1)y + c - c_1 = 0 \end{cases}$$

L'equazione $(a-a_1)x + (b-b_1)y + c - c_1 = 0 \quad [6]$

rappresenta una retta detta **asse radicale** delle due circonferenze. Tale asse radicale contiene i due punti **A** e **B** (reali e distinti, reali e coincidenti, immaginari) comuni alle due circonferenze.

Pertanto le coordinate di questi due punti si ottengono risolvendo uno dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} (a-a_1)x + (b-b_1)y + c - c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a-a_1)x + (b-b_1)y + c - c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

Equazioni delle rette tangenti ad una circonferenza uscenti da un dato punto

Scrivere le equazioni delle rette uscenti dal punto $P_o\left(3, -\frac{4}{3}\right)$ e tangenti alla

circonferenza Γ di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$

PRIMO METODO

1) Mi calcolo le coordinate del centro **C** di σ e la misura del suo raggio: $C(3;2)$, $r = \sqrt{10}$

2) Mi scrivo l'equazione del fascio di rette di centro $P_o\left(3, -\frac{4}{3}\right)$:

$$y + \frac{4}{3} = m(x - 3), \quad 3y + 4 = 3mx - 9m \quad 3mx - 3y - 4 - 9m = 0$$

3) Impongo che la distanza del centro **C** della circonferenza σ da una generica retta del fascio sia

uguale al raggio **r** della circonferenza , cioè: $\overline{CH} = r$, $\frac{|9m - 6 - 4 - 9m|}{\sqrt{9m^2 + 9}} = \sqrt{10}$

Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo : $\frac{100}{9m^2 + 9} = 10$, $10 = 9m^2 + 9$, $9m^2 = 1$

$$m^2 = \frac{1}{9} , m = \pm \frac{1}{3} , m_1 = -\frac{1}{3} , m_2 = \frac{1}{3} \text{ (si sostituisce nella [*])}$$

$$t_1 : x - 3y - 7 = 0 \quad t_2 : x + 3y + 1 = 0$$

OSSERVAZIONE

Per calcolare le **coordinate dei punti di tangenza** basta risolvere il sistema fra l'equazione della circonferenza e l'equazione di ciascuna tangente.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0 \\ x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \quad T_1(4, -1)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad T_2(2, -1)$$

SECONDO METODO

1) Mi scrivo l'equazione del fascio di rette di centro $P_o\left(3, -\frac{4}{3}\right)$ e risolvo il seguente sistema :

$$\begin{cases} y + \frac{4}{3} = m(x - 3) \\ x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

2) Mi trovo l'equazione risolvente tale sistema eliminando la y :

$$9(m^2 + 1)x^2 - 2(27m^2 + 30m + 27)x + 81m^2 + 180m + 91 = 0$$

3) Impongo che il Δ (o il $\frac{\Delta}{4}$) dell'equazione risolvente il sistema sia uguale a zero .

$$\frac{\Delta}{4} = (27m^2 + 30m + 27)^2 - 9(m^2 + 1)(81m^2 + 180m + 91) = 0 , 9m^2 - 1 = 0 , m = \pm \frac{1}{3}$$

OSSERVAZIONE

Con questo secondo procedimento, in generale, i calcoli sono piuttosto laboriosi.

Equazione della retta tangente ad una circonferenza in un suo punto P_o

Scrivere l'equazione della retta tangente alla circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 + 14x - 12y + 60 = 0$ nel punto $P_o(-4, 2)$

PRIMO PROCEDIMENTO

- 1)** Mi calcolo le coordinate del centro **C** di σ : $C(-7,6)$
- 2)** Mi calcolo il coefficiente angolare della retta P_oC : $m_{P_oC} = \frac{y_C - y_{P_o}}{x_C - x_{P_o}} = \frac{6 - 2}{-7 + 4} = -\frac{4}{3}$
- 3)** $CP_o \perp t \Rightarrow m_t = -\frac{1}{m_s} = \frac{3}{4}$
- 4)** $y - y_o = m_t(x + 4)$, $y - 2 = \frac{3}{4}(x + 4)$, $4y - 8 = 3x + 12$, $3x - 4y + 20 = 0$

SECONDO PROCEDIMENTO

Basta applicare la **regola degli sdoppiamenti**: $x^2 \rightarrow x_o x$, $y^2 \rightarrow y_o y$, $x \rightarrow \frac{x + x_o}{2}$, $y \rightarrow \frac{y + y_o}{2}$

$$\sigma: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad t: \quad x_o x + y_o y + a \cdot \frac{x + x_o}{2} + b \cdot \frac{y + y_o}{2} + c = 0$$

oppure: $x_o x + y_o y + a(x + x_o) + b(y + y_o) + c = 0$

Nel caso dell'esempio numerico abbiamo: $-4x + 2y + 7(x - 4) - 6(y + 2) + 60 = 0$

$$3x - 4y + 20 = 0$$

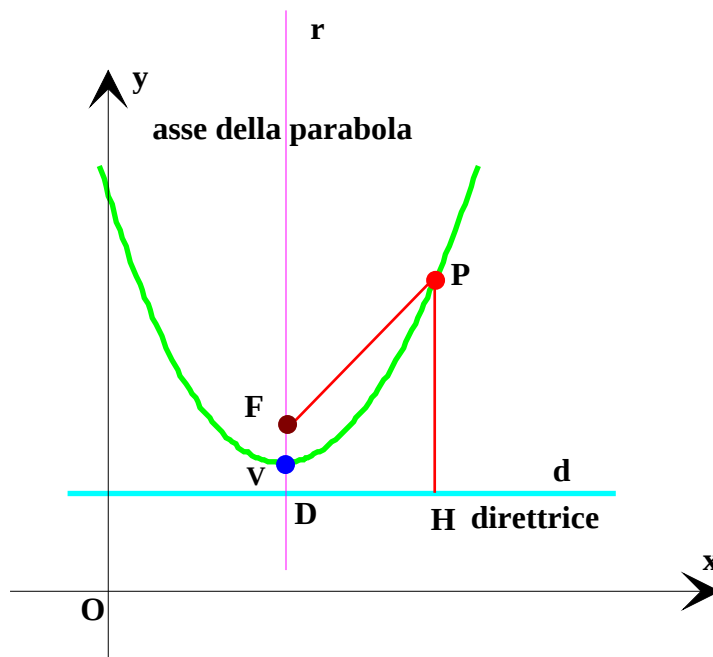
TERZO METODO

Si può utilizzare uno dei procedimenti usati per il calcolo della retta tangente ad una circonferenza uscenti da un punto.

La parabola

Definizione: Dicesi **parabola** il luogo geometrico dei punti **P** del piano equidistanti da un punto fisso **F** detto **fuoco** e da una retta fissa **d** (non contenente il fuoco) detta **direttrice**.

La retta **r** passante per **F** e perpendicolare alla direttrice **d** è l'**asse** della parabola. La retta **r** incontra la retta **d** nel punto **D**. Il punto medio **V** del segmento **FD** è il **vertice** della parabola.



La parabola ad asse verticale

Se scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse delle ascisse sia parallelo alla direttrice **d** ,
l'equazione della parabola assume la forma $y = ax^2 + bx + c$

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

Vertice della parabola

$$F\left(\frac{-b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a}\right)$$

Fuoco della parabola

$$y = -\frac{1 + \Delta}{4a} \quad \text{equazione della } \mathbf{direttrice} \text{ della parabola}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \quad \text{equazione dell'asse della parabola}$$

$a > 0$ ($a < 0$) la parabola volge la **concavità verso l'alto** (il basso)

Se $b = c = 0$ l'equazione della parabola assume la forma: $y = ax^2 = \frac{1}{4p}x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4py$

$$F\left(0, \frac{1}{4a}\right) \quad F(0, p) \quad y = -p = -\frac{1}{4a} = \mathbf{equazione della direttrice} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Intersezioni con gli assi cartesiani

La parabola ad asse verticale incontra sempre l'asse delle y nel punto $A(0, c)$. Per calcolare le coordinate delle eventuali intersezioni della parabola con l'asse delle ascisse basta risolvere il

seguito sistema: $\begin{cases} y = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ cioè la seguente equazione di secondo grado :

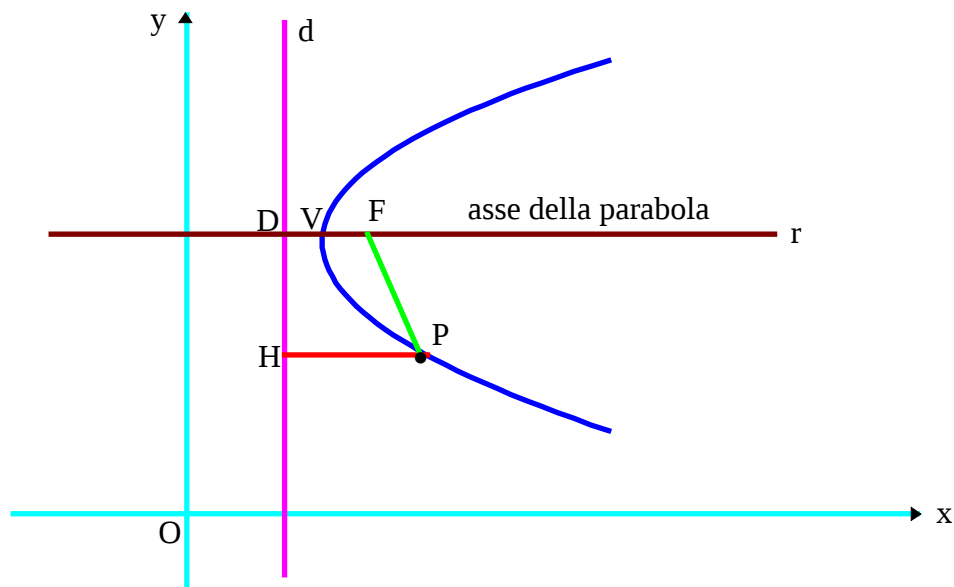
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$\Delta > 0$: la parabola incontra l'asse delle ascisse in due punti distinti

$\Delta = 0$: la parabola incontra l'asse delle ascisse in due punti coincidenti. Questo significa che la parabola ha il vertice **V** sull'asse delle x, cioè l'asse x è **tangente** alla parabola nel vertice

$\Delta < 0$: la parabola non incontra l'asse delle ascisse

La parabola ad asse orizzontale



Se scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse delle **y** risulti parallelo alla direttrice **d**, allora l'equazione della parabola assume la forma:

$$x = ay^2 + by + c$$

$V\left(\frac{-\Delta}{4a}, \frac{-b}{2a}\right)$ **Vertice** della parabola

$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}, \frac{-b}{2a}\right)$ **Fuoco** della parabola

$$x = -\frac{1+\Delta}{4a} \quad \text{equazione della } \mathbf{direttrice} \text{ della parabola}$$

$$y = \frac{-b}{2a} \quad \text{equazione dell'asse della parabola}$$

$a > 0$ ($a < 0$) la parabola volge la **concavità verso destra** (**sinistra**)

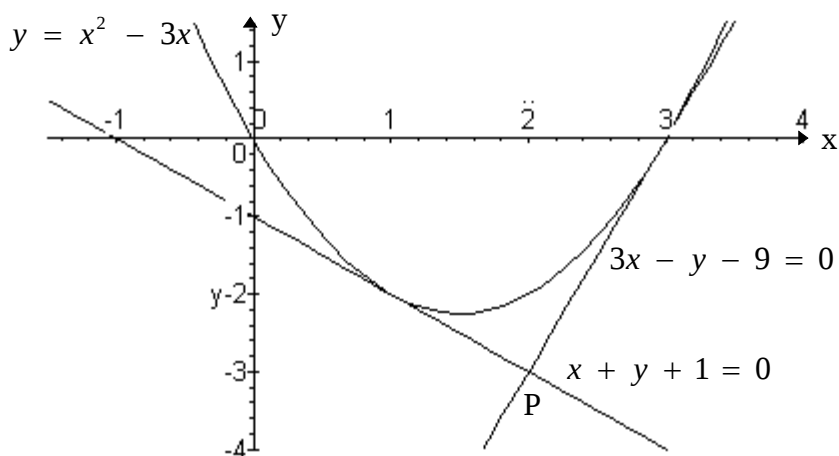
Se $b = c = 0$ l'equazione della parabola assume la forma: $x = ay^2 = \frac{1}{4p}y^2 \Leftrightarrow y^2 = 4px$

$$F\left(\frac{1}{4a}, 0\right) \quad F(p, 0) \quad x = -p = -\frac{1}{4a} = \text{equazione della direttrice} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Tangenti ad una parabola condotte da un punto

Calcolare le equazioni delle rette tangenti condotte alla parabola γ di equazione

$y = x^2 - 3x$ condotte dal punto $P(2, -3)$



Si procede come segue:

1) Si scrive l'equazione del fascio di rette di centro $P(2, -3)$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad y + 3 = m(x - 2)$$

2) Si risolve il sistema formato dall'equazione della parabola e dall'equazione del fascio di rette :

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = mx - 2m - 3 \end{cases} \quad x^2 - (m + 3)x + 3 + 2m = 0 \text{ equazione risolvente il sistema}$$

3) Si impone che sia uguale a zero il Δ dell'equazione risolvente il sistema :

$$\Delta = (3 + m)^2 - 4(3 + 2m) = 0 \quad , \quad m^2 - 2m - 3 = 0 \quad , \quad m_1 = - \quad m_2 = 3$$

4) Si sostituiscono i valori trovati nell'equazione del fascio:

$$t_1: x + y + 1 = 0 \quad t_2: 3x - y - 9 = 0$$

Retta tangente alla parabola in un suo punto

PRIMO PROCEDIMENTO

E' identico a quello illustrato nel paragrafo precedente

SECONDO PROCEDIMENTO: regola degli sdoppiamenti

Per ottenere l'equazione della retta t tangente a γ nel punto $P_o(x_o, y_o)$ basta sostituire nell'equazione della parabola $x_o x$ al posto di x^2 , $y_o y$ al posto di y^2 , $\frac{x + x_o}{2}$ al posto di x ,

$\frac{y + y_o}{2}$ al posto di y .

$$\frac{y + y_o}{2} = ax_o x + \frac{b}{2}(x + x_o) + c$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\frac{x + x_o}{2} = ay_o y + \frac{b}{2}(y + y_o) + c$$

$$x = ay^2 + by + c$$