

Unità Didattica N° 16

Le progressioni

- 01)** La definizione di progressione aritmetica
- 02)** Teoremi fondamentali sulle progressioni aritmetiche
- 03)** La definizione di progressione geometrica
- 04)** Teoremi fondamentali sulle progressioni geometriche
- 05)** La frazione generatrice di un numero periodico

PROGRESSIONI ARITMETICHE

1) Proprietà generali

a) Dicesi **progressione aritmetica** (o per **differenza**) e si indica col simbolo $A(d)$ un insieme ordinato di numeri (almeno tre) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ tali che la **differenza** tra uno qualunque di essi (escluso il primo) ed il suo precedente sia costante, cioè tale che, qualunque sia l'indice n , si abbia:

$$a_{n+1} - a_n = d \quad [1]$$

con d quantità costante detta **ragione** o **differenza**.

b) I numeri $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ si chiamano **termini** o **elementi** della progressione aritmetica che può essere limitata o illimitata in uno o in tutti e due i sensi.

Per indicare una **progressione aritmetica** si usa il simbolo $\div$ e si scrive:

$$\div \dots a_{-n}, a_{-n+1}, \dots, a_{n-1}, a_o, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

ESEMPI

$\div 2, 4, 6, 8, 10$ **progressione aritmetica. limitata nei due sensi di ragione 2**

$\div \dots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ **progressione aritmetica illimitata nei due sensi di ragione 1**

c) Se i termini di una p.a. sono numeri reali e se $d > 0$ la progressione si dice **crescente**, se $d < 0$ la progressione si dice **decrescente**.

Progressione aritmetica limitata nei due sensi: $\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n \quad [2]$

Progressione aritmetica illimitata in un senso: $\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n \dots \quad [3]$

Progressione aritmetica illimitata in entrambi i sensi: $\div \dots a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n \quad [4]$

2) Proprietà delle progressioni aritmetiche

a) In ogni **progressione aritmetica** limitata il termine **n-esimo** è uguale al primo termine più $(n-1)$ volte la ragione. In simboli abbiamo:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad [5]$$

Dimostrazione:

$$\begin{array}{rcl}
 a_2 - a_1 & = & d \\
 a_3 - a_2 & = & d \\
 a_4 - a_3 & = & d \\
 \dots\dots\dots & & \\
 a_n - a_{n-1} & = & d \\
 \hline
 a_n - a_1 & = & (n-1)d
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Sommando membro} \\
 \text{a membro} \\
 \text{otteniamo}
 \end{array}$$

b) Relazioni tra due termini qualsiasi

Se a_r ed a_s sono due termini qualsiasi di una $A(d)$ ed è $r < s$ allora risulta:

$$a_s = a_r + (s-r)d \quad [6]$$

Tenendo presente la [5] possiamo scrivere:

$$\begin{array}{rcl}
 a_s = a_1 + (s-1)d & \text{sottraendo membro} \\
 a_r = a_1 + (r-1)d & \text{a membro otteniamo} \\
 \hline
 a_s - a_r = sd - rd = (s-r)d \Rightarrow a_s = a_r + (s-r)d
 \end{array}$$

c) In una progressione aritmetica $A(d)$ limitata la somma di due termini equidistanti dagli estremi

(**termini coniugati**) è uguale alla somma degli estremi: $a_n + a_1 = a_{k+1} + a_{n-k} \quad [7]$

Se a_{k+1} è un termine preceduto da k elementi e a_{n-k} è un termine seguito da n elementi, per la [5]

abbiamo: $a_{k+1} = a_1 + kd$ cioè: $a_{k+1} - a_1 = kd \quad [\alpha]$, mentre per la [6] abbiamo:

$$a_n = a_{n-k} + kd \quad \text{cioè: } a_n - a_{n-k} = kd \quad [\beta]$$

Confrontando la $[\alpha]$ con la $[\beta]$ otteniamo: $a_n + a_1 = a_{k+1} + a_{n-k} \quad \text{c.v.d.}$

• Due termini di una progressione aritmetica si dicono **coniugati** quando la somma dei loro indici dà $n+1$.

d) Somma dei termini di una progressione aritmetica limitata

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad [8]$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad \text{Sommo membro a}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \quad \text{membro}$$

$$2S_n = \underset{1}{(a_1 + a_n)} + \underset{2}{(a_2 + a_{n-1})} + \dots + \underset{n-1}{(a_{n-1} + a_2)} + \underset{n}{(a_n + a_1)}$$

Dimostrazione

Tenendo presente la [7] abbiamo: $2S_n = n(a_1 + a_n)$, $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

e) Somma dei primi n numeri interi

$$\div 1, 2, 3, \dots, n-1, n \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_n = n \quad \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad [9]$$

f) Somma dei primi n numeri pari

$$\div 2, 4, 6, 8, \dots, 2n \quad , \quad A(2) \quad , \quad a_1 = 2 \quad , \quad a_n = 2 + 2(n-1) = 2n$$

$$S_n = \frac{n(2+2n)}{2} = \frac{2n(1+n)}{2} \quad \quad S_n = n(1+n)$$

g) Inserzione di medi aritmetici

Inserire m **medi aritmetici** $x_1, x_2, \dots, x_m$ tra due numeri dati **a, b** significa costruire la progressione aritmetica $a, x_1, x_2, \dots, x_m, b$. Per la [5] abbiamo:

$$b = a + (m + 2 - 1)d \quad \quad d = \frac{b - a}{m + 1}$$

h) Osservazioni

1) Se in un problema i termini incogniti sono in numero dispari allora conviene indicare con **x** il termine centrale e con **d** la ragione . Per $n = 5$ abbiamo : $x - 2d$, $x - d$, **x** , $x + d$, $x + 2d$

2) Se i termini della progressione aritmetica sono pari ($n = 2m$) allora conviene indicare con $x - d$ il termine ennesimo e con $2d$ la ragione . Per $n = 6$, $m = 3$ abbiamo :

$$x - 5d \quad , \quad x - 3d \quad , \quad x - d \quad , \quad x + d \quad , \quad x + 3d \quad , \quad x + 5d$$

3) Somma delle potenze simili dei numeri naturali

$$\sigma_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + (n-1)^k + n^k \quad [13]$$

Considero l'identità: $(1 + x)^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1}x + \binom{k+1}{2}x^2 + \dots + \binom{k+1}{k}x^k + x^{k+1} \quad [14]$

Ponendo successivamente nella [14] $x = 1, 2, 3, \dots, n$ otteniamo:

$$2^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1}1 + \binom{k+1}{2}1^2 + \dots + \binom{k+1}{k}1^k + 1^{k+1}$$

$$3^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1}2 + \binom{k+1}{2}2^2 + \dots + \binom{k+1}{k}2^k + 2^{k+1}$$

$$(1+n)^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1}n + \binom{k+1}{2}n^2 + \dots + \binom{k+1}{k}n^k + n^{k+1}$$

$$(1+n)^{k+1} = n + \binom{k+1}{1}(1+2+\dots+n) + \binom{k+1}{2}(1^2+2^2+\dots+n^2) + \dots + \binom{k+1}{k}(1^k+2^k+\dots+n^k) =$$

$$= n + 1 + \binom{k+1}{1}\sigma_1 + \binom{k+1}{2}\sigma_2 + \dots + \binom{k+1}{k}\sigma_k \quad \text{cioè :}$$

$$(n+1)^{k+1} = n + 1 + \binom{k+1}{1}\sigma_1 + \binom{k+1}{2}\sigma_2 + \dots + \binom{k+1}{k}\sigma_k \quad [15]$$

CASI PARTICOLARI

$$\mathbf{k = 1} \quad (n+1)^2 = n + 1 + \binom{2}{1}\sigma_1 \quad \text{cioè :} \quad \sigma_1 = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2} \quad [16] \equiv [9]$$

$$\mathbf{k = 2} \quad (n+1)^3 = n + 1 + \binom{3}{1}\sigma_1 + \binom{3}{2}\sigma_2 = n + 1 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot \sigma_2$$

$$3\sigma_2 = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3}{2}n(n+1) = (n+1)\left(n^2 + 2n + 1 - 1 - \frac{3}{2}n\right) =$$

$$= (n+1)\left(\frac{2n^2 + 4n - 3n}{2}\right) = \frac{n+1}{2}(2n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\sigma_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \quad [17]$$

$$\text{Similmente si ottiene: } \sigma_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \sigma_1^2 \quad [18]$$

$$\sigma_4 = \frac{3n^2 + 3n - 1}{5} \cdot \sigma_2 \quad [19]$$

$$\sigma_5 = \frac{2n^2 + 2n - 1}{3} \cdot \sigma_3 \quad [20]$$

$$\sigma_6 = \frac{3n^4 + 6n^3 - 3n + 1}{7} \cdot \sigma_4 \quad [21]$$

4) Somma delle potenze simili in una progressione aritmetica

$$\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \quad S_k = a_1^k + a_2^k + a_3^k + \dots + a_n^k \quad [22] \quad \text{con} \quad k = 1, 2, \dots$$

Considero l'identità :

$$(d + x)^{k+1} = d^{k+1} + \binom{k+1}{1} d^k x + \binom{k+1}{2} d^{k-1} x^2 + \dots + \binom{k+1}{k} d x^k + x^{k+1} \quad [23]$$

Se nella [23] pongo successivamente $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ ottengo:

$$(d + a_1)^{k+1} = d^{k+1} + \binom{k+1}{1} d^k a_1 + \binom{k+1}{2} d^{k-1} a_1^2 + \dots + \binom{k+1}{k} d a_1^k + a_1^{k+1} = a_2^{k+1}$$

$$(d + a_2)^{k+1} = d^{k+1} + \binom{k+1}{1} d^k a_2 + \binom{k+1}{2} d^{k-1} a_2^2 + \dots + \binom{k+1}{k} d a_2^k + a_2^{k+1} = a_3^{k+1}$$

$$(d + a_n)^{k+1} = d^{k+1} + \binom{k+1}{1} d^k a_n + \binom{k+1}{2} d^{k-1} a_n^2 + \dots + \binom{k+1}{k} d a_n^k + a_n^{k+1} = a_{n+1}^{k+1}$$

Sommando membro a membro otteniamo :

$$(a_n + d)^{k+1} = a_1^{k+1} + \binom{k+1}{k} d S_k + \dots + \binom{k+1}{2} d^{k-1} S_2 + \binom{k+1}{1} d^k S_1 + n d^{k+1} \quad [24]$$

Se risulta $a_1 = 1$, $d = 1$, per cui $a_n = n$ la [24]≡[15] .

CASI PARTICOLARI

$$k = 1 \Rightarrow (a_n + d)^2 = a_1^2 + 2d S_1 + n d^2 \Rightarrow S_1 = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$k = 2 \Rightarrow (a_n + d)^3 = a_1^3 + 3d S_2 + 3d^2 S_1 + n d^3 \quad \text{cioè: } S_2$$

Esercizi risolti sulle progressioni aritmetiche

- **Trovare la somma dei primi 40 multipli del 3**

$$a_1 = 3, d = 3, n = 40; S_{40} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} =$$

$$= \frac{40(6+39 \cdot 3)}{2} = 2460$$

- **Trovare la somma dei primi 20 numeri multipli del 3 che superano il numero 60.**

$$a_1 = 63, d = 3, n = 20, S_{20} = \frac{20(126+19 \cdot 3)}{2} = 1830$$

- **Si sa che il 2° ed il 7° termine di una $\div$ danno per somma 92 e che il 4° con l'11° fanno 71. Calcolare questi quattro termini.**

$$a_2 = a_1 + d, a_7 = a_1 + 6d, a_4 = a_1 + 3d, a_{11} = a_1 + 10d$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 7d = 92 \\ 2a_1 + 13d = 71 \end{cases} \quad d = -3,5, a_1 = 58,25, a_2 = 54,75, a_7 = 37,25, a_{11} = 23,25$$

- **La somma dei 4 termini di mezzo di una ÷ di 12 termini è 74; il prodotto degli estremi è 70. Qual è la progressione?**

Sia $x, x + d, x + 2d, \dots, x + 11d$ la p.a. richiesta.

I 4 termini di mezzo sono: $x + 4d, x + 5d, x + 6d, x + 7d$

Abbiamo: $4x + 22d = 74$ cioè: $2x + 11d = 37$.

Il prodotto degli estremi è: $x(x + 11d) = 70$ Eliminando la d otteniamo: $x^2 - 37x + 70 = 0$

$$x = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 280}}{2} = \frac{37 \pm \sqrt{1089}}{2} = \frac{37 \pm 33}{2}, x = 2, \quad = 35$$

$$x = 2 \Rightarrow 11d = 3, d = 3, \div 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35$$

$$= 35 \Rightarrow d = -3, \div 35, 32, 29, 26, 23, 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2$$

- **In una progressione aritmetica di 11 termini, la somma dei termini è 176; la differenza degli estremi è 30. Qual è la progressione?**

$$a_{11} - a_1 = 30, S_{11} = \frac{11(a_1 + a_{11})}{2} = 176 \Rightarrow a_{11} + a_1 = 32 \quad \begin{cases} a_{11} - a_1 = 30 \\ a_{11} + a_1 = 32 \end{cases} \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{11} = 31 \end{cases}$$

$$d = 3, \quad \div 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31$$

- **La somma di 3 numeri in progressione aritmetica è 33, il loro prodotto è uguale a 1287. Quali sono i tre numeri?**

Siano $x - d, x, x + d$ i 3 numeri richiesti. $x - d + x + x + d = 33 \Rightarrow x = 11$

$$x(x - d)(x + d) = 1287 \Rightarrow d^2 = 4, d = \pm 2, \div 9, 11, 13, \quad \div 13, 11, 9$$

- **Trovare tre numeri in progressione aritmetica conoscendo la loro somma s , e la somma b^2 dei loro quadrati.**

Siano $x - d, x, x + d$ i 3 numeri richiesti. $(x - d) + x + (x + d) = s \Rightarrow x = \frac{s}{3}$

$$(x - d)^2 + x^2 + (x + d)^2 = b^2 \Rightarrow 3x^2 + 2d^2 - b^2 = 0, d^2 = \frac{b^2}{2} - \frac{3x^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{s^2}{6}$$

$$d = \pm \sqrt{\frac{b^2}{2} - \frac{s^2}{6}} \quad \text{I tre numeri richiesti sono: } \frac{s}{3} - \sqrt{\frac{b^2}{2} - \frac{s^2}{6}}, \frac{s}{3}, \frac{s}{3} + \sqrt{\frac{b^2}{2} - \frac{s^2}{6}},$$

- **Trovare 4 numeri in progressione aritmetica sapendo che la loro somma vale 22 e che la somma dei loro quadrati vale 166.**

Siano $x - 3d$, $x - d$, $x + d$, $x + 3d$ i 4 numeri richiesti ($2d$ è la ragione).

$$(x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 22 \Rightarrow x = \frac{11}{2}$$

$$(x - 3d)^2 + (x - d)^2 + (x + d)^2 + (x + 3d)^2 = 166, 2x^2 + 10d^2 + 83 = 0 \quad \text{cioè:}$$

$$d^2 = \frac{9}{4}, d = \pm \frac{3}{2} \quad \text{I numeri richiesti sono: } \frac{11}{2} - \frac{9}{2} = 1, \frac{11}{2} - \frac{3}{2} = 4, \frac{11}{2} + \frac{3}{2} = 7$$

$$\frac{11}{2} + \frac{9}{2} = 10$$

- **La ragione di una progressione aritmetica di 4 termini è 4; il prodotto dei quattro termini è 585. Qual è la p.a. ?**

Siano x , $x + 4$, $x + 8$, $x + 12$ i 4 numeri cercati. Abbiamo:

$$x(x + 4)(x + 8)(x + 12) = 585 \quad \text{cioè: } x^4 + 24x^3 + 176x^2 + 484x - 585 = 0$$

$$(x - 1)(x + 13)(x^2 + 12x + 45) = 0, x = 1 \Rightarrow \mathbf{1, 5, 9, 13}$$

$$x = -13 \Rightarrow \mathbf{-13, -9, -5, -1}$$

Progressioni geometriche

1) Proprietà generali

Un insieme ordinato di numeri $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ dicesi **progressione aritmetica** se

$\forall n \in N$ si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

[1]

con **q** quantità costante diversa da **1** detta **ragione** o **quoziente**.

Una progressione geometrica di ragione **q** si indica col simbolo **G(q)** e si scrive:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ **G(q) limitata nei due sensi**

$\dots, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ **G(q) illimitata nei due sensi**

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ **G(q) illimitata in un senso**

Se gli elementi di una $G(q)$ sono reali e la ragione è positiva, la progressione si dice **crescente** se risulta $q > 1$, **decrescente** se risulta $q < 1$.

Se invece è $q < 0$ la progressione geometrica dicesi **alternata**.

2) Proprietà delle progressioni geometriche

- $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad [1]$$

$$\left. \begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{array} \right\} \text{Moltiplicando membro a membro i termini delle } n-1 \text{ righe otteniamo:}$$

$$\cancel{a_2} \cancel{a_3} \dots \cancel{a_{n-1}} \cdot a_n = a_1 \cancel{a_2} \cancel{a_3} \dots \cancel{a_{n-1}} \cdot q^k \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \bullet \quad a_{n+k} = a_n \cdot q^k \quad [2]$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{n+1} = q \cdot a_n \\ a_{n+2} = q \cdot a_{n+1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n+k} = q \cdot a_{n+k-1} \end{array} \right\} \text{Moltiplicando membro a membro i termini delle } k \text{ righe otteniamo:}$$

$$\cancel{a_{n+1}} \cdot \cancel{a_{n+2}} \dots \cancel{a_{n+k}} = a_n \cdot \cancel{a_{n+1}} \dots \cancel{a_{n+k-1}} \cdot q^k \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- **Relazione tra due termini qualsiasi**

$$a_s = a_k \cdot q^{s-k} \quad [3]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_s = a_1 \cdot q^{s-1} \\ a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \end{array} \right. \text{Dividendo membro a membro otteniamo:}$$

$$\frac{a_s}{a_k} = \frac{q^{s-1}}{q^{k-1}} = q^{s-k} \Rightarrow a_s = a_k \cdot q^{s-k}$$

- **Prodotto di due termini coniugati**

Due termini di una progressione geometrica di n termini si dicono **coniugati** o **simmetrici** quando la somma dei loro indici è $n+1$.

$$a_1 \cdot a_n = a_{n-k} \cdot a_{k+1} \quad [4]$$

Dimostrazione:
$$\left\{ \begin{array}{l} a_{k+1} = a_1 \cdot q^k \\ a_n = a_{n-k} \cdot q^k \end{array} \right. \text{Dividendo membro a membro otteniamo:}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_n} = \frac{a_1}{a_{n-k}} \Rightarrow a_1 \cdot a_n = a_{n-k} \cdot a_{k+1}$$

OSSERVAZIONE

Se la progressione geometrica è limitata ed ha un numero dispari di termini, quello centrale a_c è

coniugato di se stesso, per cui la [4] diventa: $a_c^2 = a_1 a_n$ $a_c = \sqrt{a_1 a_n}$ [5]

• **Prodotto di n termini consecutivi**

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \quad P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \quad [6]$$

Dímostrazione

$$\left. \begin{array}{l} P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \\ P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \end{array} \right\} \text{Moltiplico membro a membro}$$

$$P_n^2 = \underset{1}{(a_1 \cdot a_n)} \cdot \underset{2}{(a_2 \cdot a_{n-1})} \cdots \underset{n-1}{(a_{n-1} \cdot a_2)} \cdot \underset{n}{(a_n \cdot a_1)}$$

Per la [4] abbiamo:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \quad P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

• **Somma di n termini consecutivi di una progressione geometrica**

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot a_1 \quad \text{se } q > 1 \quad [7]$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a_1 \quad \text{se } q < 1 \quad [8]$$

Dímostrazione

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n, \quad q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n \cdot q + (a_1 - a_1) \quad , \quad q \cdot S_n = S_n + q \cdot a_n - a_1$$

$$(q - 1)S_n = q a_n - a_1, \quad S_n = \frac{q a_n - a_1}{q - 1} = \frac{q a_1 q^{n-1} - a_1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot a_1$$

Se risulta $q < 1$ scriviamo: $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a_1$

Altra dímostrazione

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Sottraggo
membro a
membro

$$qS_n - S_n = -a_1 + qa_n = a_1 q^n - a_1 \dots$$

- Somma dei termini di una progressione geometrica illimitata**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \quad [9] \quad \text{se } |q| < 1 \quad \text{cioè se : } -1 < q < 1$$

Dímostrazione

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{1 - q} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 q^n}{1 - q} = \\ &= \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \frac{a_1}{1 - q} \end{aligned}$$

- Inserzione di medi geometrici**

Inserire **m medi geometrici** $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ fra due numeri dati **a, b**, entrambi diversi da zero, significa costruire la progressione geometrica : $a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, b$

Dalla [1] ricaviamo :

$$b = a \cdot q^{m+1}$$

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{a}{b}} \quad [10]$$

che ci permette di ricavare gli elementi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$

3) Frazione generatrice di un numero periodico

$$0, \bar{8} = 0,8888888\dots = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{8}{10000} + \dots = \frac{8}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \dots =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{8}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \right] = \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{8}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$$

$$2, \bar{3} = 2,333333\dots = 2 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots = 2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots =$$

$$= 2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \right] = 2 + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = \frac{23 - 2}{9}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad 2,3\overline{15} &= 2,315151515... = \frac{23}{10} + \frac{15}{10^3} + \frac{15}{10^5} + \frac{15}{10^7} + \dots = \frac{23}{10} + \frac{15}{10^3} \left[1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots \right] = \\
 &= \frac{23}{10} + \frac{15}{10^3} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10^2} \right)^n}{1 - \frac{1}{10^2}} \right] = \frac{23}{10} + \frac{15}{10^3} \left[\frac{1}{\frac{99}{100}} \right] = \frac{23}{10} + \frac{15}{990} = \frac{2292}{990} = \frac{2315 - 23}{990}
 \end{aligned}$$

<<Un numero decimale periodico non può avere come periodo il numero 9 o un gruppo di cifre tutte uguali al 9>>

Esempio: $2,\overline{9} = 2,99999... = 2 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = 2 + 9 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right) =$

$$2 + 9 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right) = 2 + 9 \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right) = 2 + 9 \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} \right) = 2 + 1 = 3$$

• Caso generale

Sia $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ una progressione geometrica di ragione q e primo termine a_1 .

La somma S_n dei primi n termini in progressione geometrica è uguale a : $S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a_1$

Se i termini n sono infiniti, se $q < 1$ allora q^n è trascurabile, cioè : $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$ è la somma di infiniti termini in progressione geometrica avente primo

termine $a_1 = \frac{1}{10}$ e ragione $q = \frac{1}{10} < 1$. Quindi : $S_n = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = S_n = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9}$

N.B. Il simbolo $2,\overline{9}$ rappresenta un numero intero, precisamente il numero 3. Infatti, in particolari situazioni, la somma di infiniti termini (che in generale non ha significato) è una quantità finita.

- Vogliamo calcolare la **frazione generatrice** del numero decimale $0,\overline{p} = 0,ppppppp\dots$ avente la cifra decimale p che si ripete illimitatamente. Quindi p è il periodo formato da una sola cifra.

(p potrebbe avere r cifre che si ripetono illimitatamente, ad esempio $0,\overline{251} = 0,251251251\dots$)

$$0,\overline{p} = 0,ppppp\dots = \frac{p}{10} + \frac{p}{100} + \frac{p}{1000} + \dots = p \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right) = p \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right) = p \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} \right) = \frac{p}{9}$$

$$p = 9 \Rightarrow 0,\overline{9} = 1$$

p è formato da due cifre: $p = ab$

$$0,\overline{ab} = 0,ababab\dots = \frac{ab}{10^2} + \frac{ab}{10^4} + \frac{ab}{10^6} + \dots = ab \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots \right) = ab \left(\frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} \right) =$$

$$= ab \left(\frac{1}{10^2} \cdot \frac{10^2}{99} \right) = \frac{ab}{99}$$

Se $a = b = 9$ abbiamo: $0,\overline{99} = \frac{99}{99} = 1$ Il simbolo $0,\overline{99}$ rappresenta il numero 1.