

Unità Didattica N° 21

Introduzione alla geometria euclidea

- 01)** Enti primitivi; assiomi; teoremi
- 02)** Applicazioni della logica alla geometria euclidea
- 03)** Enti geometrici fondamentali e loro proprietà

Enti primitivi; Assiomi; Teoremi

Poiché definire un ente matematico significa illustrare le sue proprietà mediante nozioni più semplici, è chiaro che, in un qualsiasi sistema *ipotetico-deduttivo*, qual è la **geometria euclidea**, dobbiamo partire da enti matematici non definibili e che chiameremo **enti primitivi**. Nello studio della **geometria euclidea** si parte da **enti primitivi**, cioè da enti che non si possono definire mediante nozioni più semplici. Tali **enti primitivi** o **enti fondamentali**, sono il **punto**, la **retta**, il **piano**.

In geometria euclidea il punto, la retta, il piano sono enti primitivi non definibili mediante nozioni più semplici.

Tali enti primitivi sono caratterizzati da alcune proprietà, dette **postulati**, che non si possono dimostrare logicamente. I **postulati** servono a definire implicitamente gli enti primitivi della geometria euclidea. **Postulato** è una **proposizione che si ammette come vera senza alcuna dimostrazione**. La parola **postulato** deriva dal latino **postulo** (chiedo) in quanto il costruttore della geometria euclidea chiede ai suoi eventuali ipotetici lettori di accettare come vere le affermazioni contenute nei postulati senza alcuna dimostrazione.

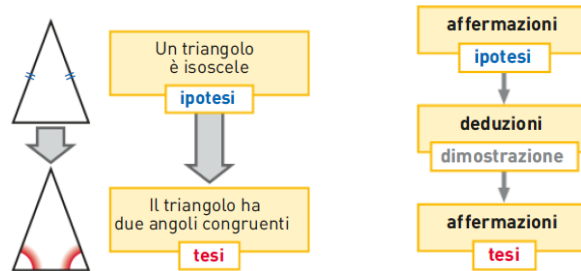
Si pone subito il problema di stabilire quali e quanti postulati introdurre. La scelta dei postulati si basa su due requisiti: **1)** bisogna introdurre il minor numero possibile di postulati (cioè nessun postulato dovrà potere essere dedotto da altri postulati o da proposizioni dimostrate in precedenza) **2)** nessun postulato deve essere in contraddizione con altri postulati o con proprietà già dimostrate.

I postulati possono essere divisi in cinque gruppi:

- Postulati dell'esistenza • Postulati dell'appartenenza • Postulati dell'uguaglianza
- Postulati dell'ordine • Postulato delle parallele

Una **dimostrazione** è una sequenza di deduzioni logiche che, partendo da affermazioni considerate vere (**ipotesi**) si perviene ad una nuova affermazione (**tesi**). Pertanto un **teorema** è una affermazione che si dimostra mediante il ragionamento. In un teorema distinguiamo l'**ipotesi** $\mathcal{I}$ (esprime ciò che si suppone vero) e la **tesi** $\mathcal{T}$ (ciò che noi vogliamo dimostrare). Le considerazioni logiche che dobbiamo effettuare per dedurre, dalla verità dell'ipotesi la verità della tesi, prende il nome di **dimostrazione**.

Con i simboli dell'insiemistica un teorema è indicato con la scrittura: $\mathcal{J} \Rightarrow \mathbf{T}$. Diciamo pure che $\mathcal{J}$ è **condizione sufficiente** per il verificarsi di $\mathbf{T}$, mentre $\mathbf{T}$ è **condizione necessaria** per il verificarsi di $\mathcal{J}$.



Dimostrazione diretta

Una **dimostrazione è diretta** quando, partendo dall'ipotesi ed utilizzando i postulati e le proprietà dimostrate in precedenza, si perviene, attraverso una catena di deduzioni logiche, alla verità della tesi. E' la dimostrazione maggiormente utilizzata in **geometria euclidea**.

Dimostrazione per assurdo o dimostrazione indiretta

In questo caso si nega la tesi e si deduce qualche proprietà che è in contrasto con l'ipotesi ammessa, o con qualche postulato, o con qualche teorema dimostrato in precedenza. Si conclude affermando che l'avere supposto falsa la tesi è sbagliato bisogna ammettere che la tesi è vera (Si applica il principio di non contraddizione: una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa)

Lemma è un teorema che si dimostra come premessa di un teorema più importante. **Corollario** è un teorema che è conseguenza immediata, o caso particolare, di un teorema più importante già dimostrato.

Teoremi derivati

(1) Un teorema si dice **inverso** o **reciproco** di un altro, detto **teorema diretto**, se si ottiene da questo mediante lo scambio dell'ipotesi con la tesi. L'inverso del teorema $\mathcal{J} \Rightarrow \mathbf{T}$ è il teorema $\mathbf{T} \Rightarrow \mathcal{J}$. Conviene ricordare che non sempre l'inverso di un teorema è vero.

(2) Un teorema si dice **contrario** di un altro quando si ottiene mediante la sostituzione dell'ipotesi e della tesi del teorema diretto con le rispettive negazioni. Il contrario di un teorema non sempre è vero. Il contrario del teorema $\mathcal{J} \Rightarrow \mathbf{T}$ è il teorema $\bar{\mathcal{J}} \Rightarrow \bar{\mathbf{T}}$

(3) Il teorema **contrapposto** del teorema $\mathcal{J} \Rightarrow \mathbf{T}$ è il teorema $\bar{\mathbf{T}} \Rightarrow \bar{\mathcal{J}}$

Il teorema **contrapposto** è sempre vero. **Prima legge delle inverse**: se un teorema è vero, allora è vero anche il suo **contrapposto** e viceversa.

Applicazioni della logica alla geometria euclidea

Nello studio della geometria euclidea utilizzeremo i seguenti principi fondamentali della logica:

- (1) il principio d'identità**: ogni ente geometrico è identico a se stesso
- (2) il principio di non contraddizione**: una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa
- (3) il principio del terzo escluso (tertium non datur)**: una proposizione o è vera o è falsa
- (4) la proprietà transitiva dell'implicazione**: se una proposizione **p** implica una seconda proposizione **q** e questa, a sua volta, implica una terza proposizione **r**, allora la prima implica la terza. In simboli abbiamo : $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Enti geometrici fondamentali

- Gli **enti primitivi** della geometria euclidea sono il **punto**, la **retta**, il **piano**. I punti si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino, le rette con le lettere minuscole dell'alfabeto latino, i piani con le lettere minuscole dell'alfabeto greco.

α = alfa , β = beta , γ = gamma , δ = delta , σ = sigma , λ = lambda , ϑ = teta

Un modello fisico di punto ci viene fornito dalla traccia lasciata da una matita su un foglio di carta, quella di retta dalla traccia lasciata da una matita che scorre lungo il bordo di una riga, quella di piano dalla superficie del mare o dalla superficie di un foglio. Si tratta, però, di modelli fisici in quanto il punto, la retta ed il piano sono enti geometrici astratti privi di dimensioni.

Postulato N° 1: Per un punto passano infinite rette

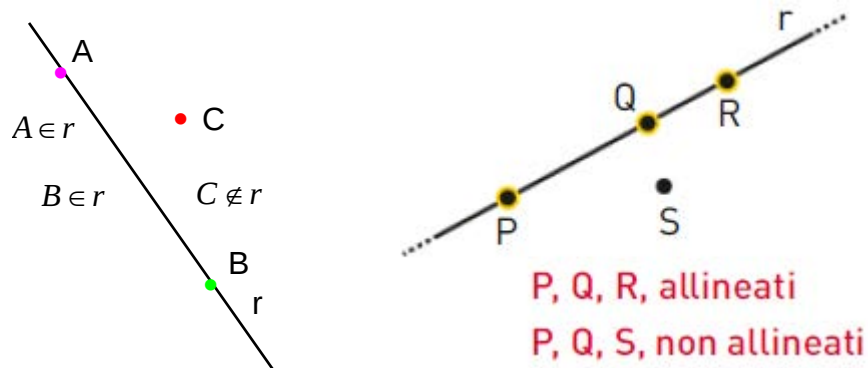
Postulato N°2: Per due punti distinti passa una sola retta

Postulato N° 3: La retta è costituita da infiniti punti

Postulato N° 4: Un piano contiene infiniti punti ed infinite rette

Postulato N° 5: Per tre punti non allineati passa un solo piano

Postulato N° 6: Tra due punti distinti di una stessa retta cadono infiniti punti



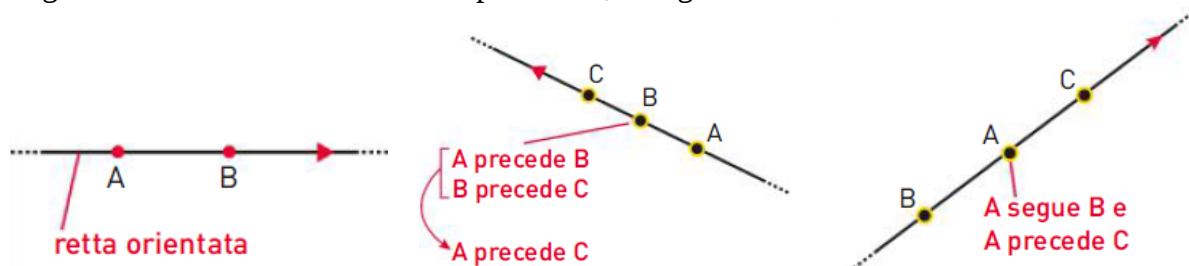
Retta r o retta AB : $r = AB$ La retta r è individuata dai due punti A e B

La retta r è illimitata nei due sensi I punti che si trovano sulla stessa retta si dicono **allineati**

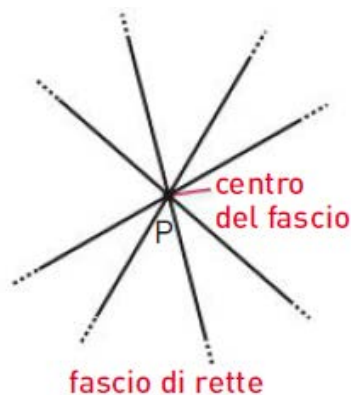
Retta orientata

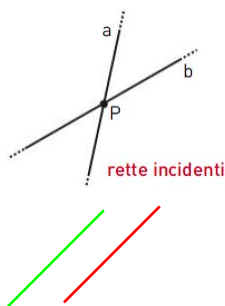
I punti di una retta si possono pensare **ordinati** in due versi, uno opposto dell'altro, in corrispondenza dei due versi secondo cui la retta può essere percorsa.

L'**ordine** è tale per cui, fissato il verso di percorrenza di una retta r e fissati su r due punti A e B , è possibile dire se A precede o segue B . Quando su una retta è fissato un verso di percorrenza, si parla di **retta orientata** e si scrive $\vec{r}$. A precede B , B segue A



Fascio di rette è l'insieme di tutte le rette di uno stesso piano passanti per uno stesso punto detto **centro del fascio**.

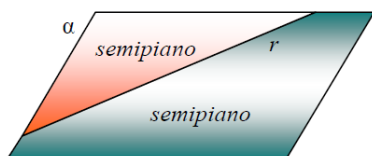




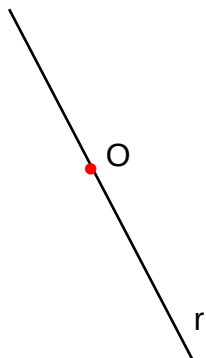
Due rette che si incontrano in un punto si dicono **rette incidenti**.

Due rette sono **parallele** se sono complanari e non hanno alcun punto in comune.

Come caso limite assumiamo come **parallele** due **rette coincidenti**. In questo caso limite le due rette hanno in comune infiniti punti.

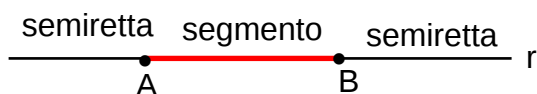


Una retta **r** divide il piano in due parti, ciascuna delle quali prende il nome di **semipiano**. La retta **r** è l'**origine** di ciascuno dei due semipiani.

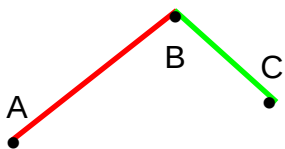


Un punto divide una retta in due parti, ciascuna delle quali prende il nome di **semiretta**.

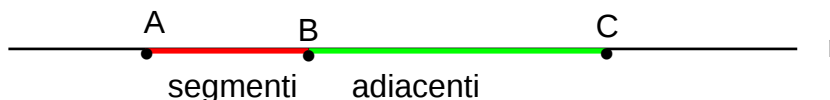
Il punto (nel caso nostro **O**) dicesi **origine** di ciascuna semiretta.



Segmento è la parte di retta delimitata da due punti, detti **estremi** del segmento.

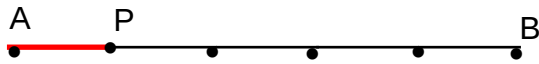


AB e **BC** sono segmenti **consecutivi** perché hanno un estremo in comune. Due segmenti si dicono **adiacenti** se, oltre ad essere consecutivi, appartengono alla stessa retta.



M è il **punto medio** del segmento **AB** perché lo divide in due parti uguali.

AB dicesi **multiplo** del segmento AP secondo il numero 5. Un segmento AB è **multiplo** di un altro segmento PQ secondo un numero intero n quando è la somma di n segmenti tutti uguali a PQ oppure, ed è la stessa cosa, quando il segmento AB contiene n volte il segmento PQ.



$$AB = AP + AP + AP + AP + AP = 5 \cdot AP$$

Nel caso nostro, il segmento AB è la somma di 5 segmenti tutti uguali ad AP, cioè il segmento AB contiene 5 volte il segmento AP.

Se risulta $AB = 5 \cdot AP$ possiamo scrivere anche: $AP = \frac{1}{5} AB$ e dire che il segmento AP è

sottomultiplo del segmento AB secondo il numero 5, cioè AP è la quinta parte del segmento AB, cioè AP è contenuto 5 volte nel segmento AB.

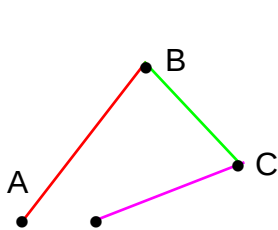
Postulato di Eudosso-Archimede per i segmenti

Dati due segmenti, che non siano congruenti o nulli, esiste sempre un segmento multiplo del minore che supera il maggiore.

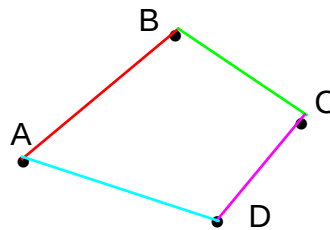
Postulato di divisibilità dei segmenti

Dato un segmento, esiste il suo sottomultiplo secondo un qualsiasi numero naturale.

Dicesi **spezzata** la figura geometrica formata da segmenti a due a due consecutivi. I segmenti che formano la spezzata si dicono **lati** della spezzata; gli estremi dei segmenti si dicono **vertici** della spezzata. Se il primo estremo del primo segmento non coincide col secondo estremo dell'ultimo segmento la spezzata si dice **aperta**, in caso contrario si dice **chiusa**.



spezzata aperta



spezzata chiusa

Distanza tra due punti è il segmento che ha come estremi i due punti. Ad esempio, dati i punti A e B, il segmento AB dicesi **distanza tra i punti A e B**.



Misura di un segmento AB è il numero che esprime quante volte un altro segmento (ad esempio CD) è contenuto in AB.



$AB = 5CD$; $\overline{AB} = \text{misura}$ del segmento $AB = 5$

$CD = \text{unità di misura}$; $\overline{CD} = 1$; $AB = \text{segmento } AB$

Figure geometriche convesse, figure geometriche concave

Una **figura geometrica** è detta **convessa** se due suoi punti qualsiasi sono estremi di un segmento tutto contenuto nella figura geometrica. In caso contrario la **figura** è detta **concava**.

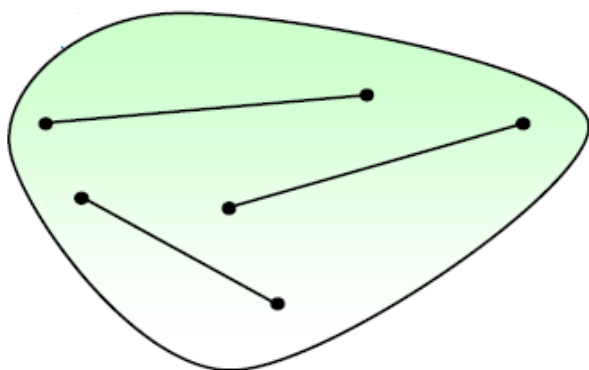


Figura geometrica convessa

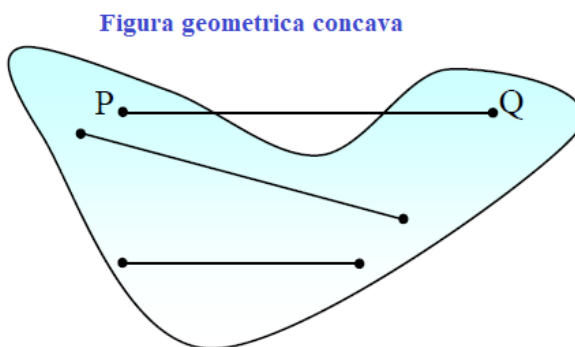
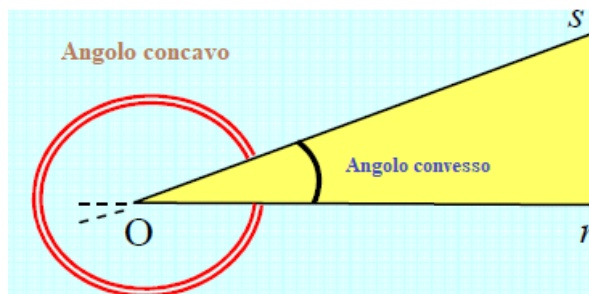
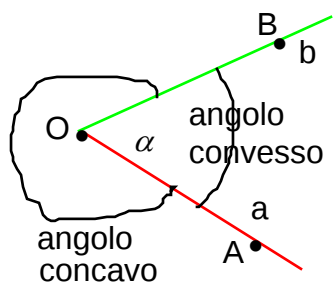


Figura geometrica concava

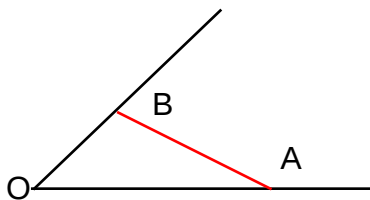
Gli angoli del piano

Due semirette (ad esempio OA ed OB) aventi la stessa origine O dividono il piano in due parti, ciascuna delle quali prende il nome di **angolo**; quella che non contiene i prolungamenti dei lati dicesi **angolo convesso**, quella che contiene i prolungamenti dei lati **angolo concavo**.



Simbolicamente un angolo si può indicare in una delle seguenti maniere: $\widehat{AOB}$, $\widehat{O}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{ab}$

Le semirette OA ed OB si dicono i **lati** dell'angolo; il punto O dicesi **vertice** dell'angolo.

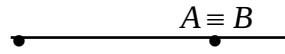


Chiamasi **corda** di un angolo convesso un qualsiasi segmento i cui estremi appartengono ai lati dell'angolo.

Angolo piatto è quell'angolo avente come lati due semirette opposte. L'angolo piatto individua un semipiano.



Angolo nullo è quell'angolo i cui lati sono sovrapposti.



angolo nullo

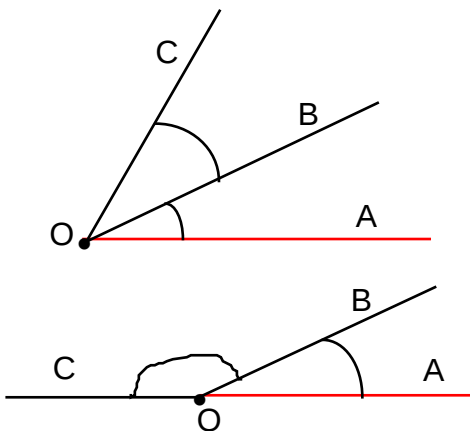
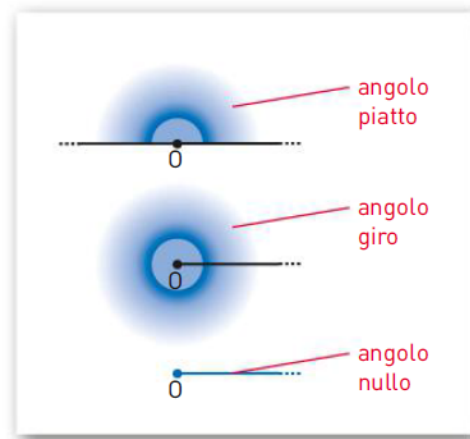


Angolo giro è quell'angolo i cui lati sono sovrapposti, ma è costituito da tutti i punti del piano.

Un **angolo giro** individua l'intero piano, in quanto è costituito da tutte le semirette del piano aventi la stessa origine, detta vertice dell'angolo giro.

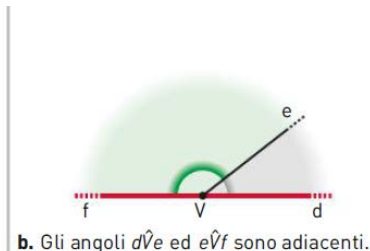
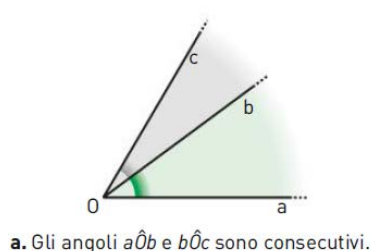
Angolo piatto, angolo giro, angolo nullo

- Un angolo è **piatto** quando i suoi lati sono due semirette opposte; coincide con un semipiano e spesso lo indicheremo con π .
- L'angolo **giro** è l'angolo i cui lati sono semirette coincidenti e che coincide con l'intero piano.
- Un angolo è **nullo** quando i suoi lati sono due semirette coincidenti e non comprende altri punti oltre quelli dei lati.

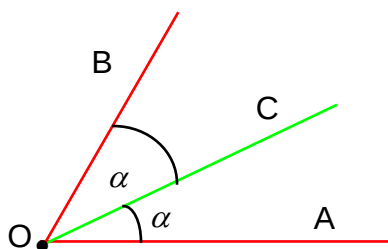


Due **angoli** si dicono **consecutivi** quando hanno in comune soltanto il vertice ed un lato, ed i lati non in comune si trovano nei due semipiani opposto rispetto al lato comune.

Due **angoli** si dicono **adiacenti** se, oltre ad essere consecutivi, hanno i lati non in comune son semirette opposte.



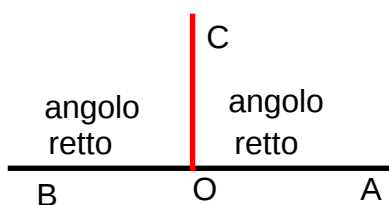
Bisettrice di un angolo



Bisettrice di un angolo è la semiretta che divide l'angolo in due parti uguali.

OC è la **bisettrice** dell'angolo $\widehat{AOB}$ in quanto risulta $\widehat{AOC} = \widehat{COB}$

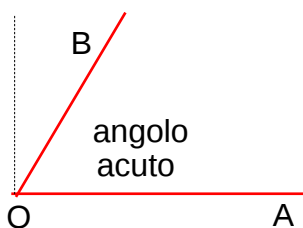
Angolo retto



L'**angolo retto** è la metà dell'angolo piatto.

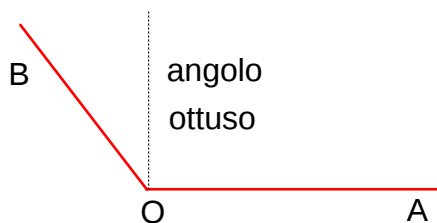
La **bisettrice** di un angolo piatto divide tale angolo in due angoli retti.

Angolo acuto

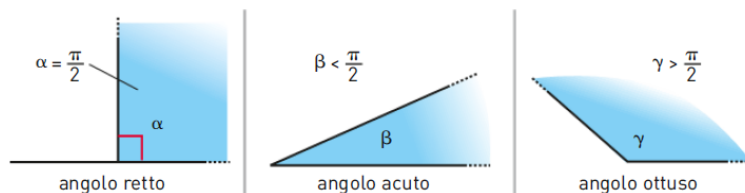


Un angolo minore dell'angolo retto si chiama **angolo acuto**.

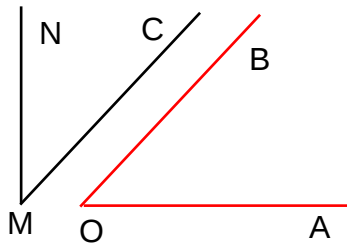
Angolo ottuso



Un angolo maggiore dell'angolo retto si chiama **angolo ottuso**.



Angoli complementari

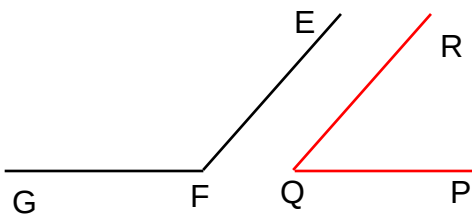


Due angoli si dicono **complementari** quando la loro somma è un angolo retto.

Gli angoli $\widehat{AOB}$ e $\widehat{CMN}$ sono complementari in quanto $\widehat{AOB} + \widehat{CMN} = \text{angolo retto}$. Un angolo retto misura 90° .

Due **angoli complementari di uno stesso angolo sono uguali** in quanto differenza di angoli uguali

Angoli supplementari

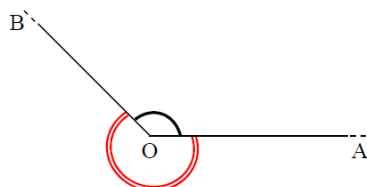
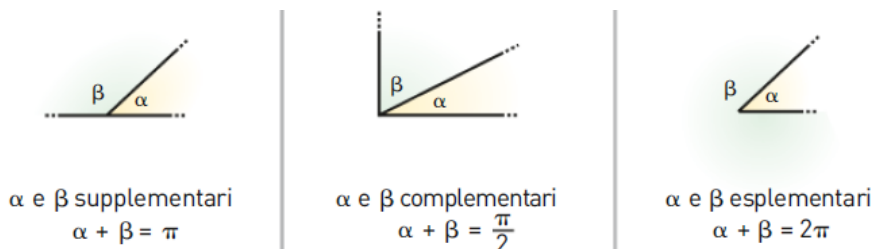


Due angoli si dicono **supplementari** quando la loro somma è un angolo piatto. Un angolo piatto misura 180° . Gli angoli $\widehat{PQR}$ e $\widehat{GFE}$ sono supplementari in quanto risulta: $\widehat{PQR} + \widehat{GFE} = \text{angolo piatto}$

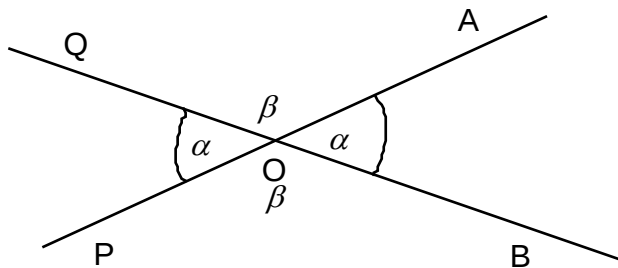
Due **angoli supplementari di uno stesso angolo sono uguali** in quanto differenza di angoli uguali.

Angoli esplementari

Due **angoli si dicono esplementari** quando la loro somma è un angolo giro.



Angoli opposti al vertice



Due angoli si dicono **opposti al vertice** quando i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro. $\hat{A}OB$ e $\hat{P}OQ$ sono **angoli opposti al vertice** $\hat{P}OB$ e $\hat{A}OQ$ sono **angoli opposti al vertice**

Due angoli opposti al vertice sono uguali. $\hat{A}OB = \hat{P}OQ$ $\hat{P}OB = \hat{A}OQ$

Postulato di Eudosso-Archimede per gli angoli

Dati due angoli, che non siano congruenti o nulli, esiste sempre un angolo multiplo del minore che supera il maggiore.

Postulato di divisibilità degli angoli

Dato un angolo, esiste il suo sottomultiplo secondo un qualsiasi numero naturale.