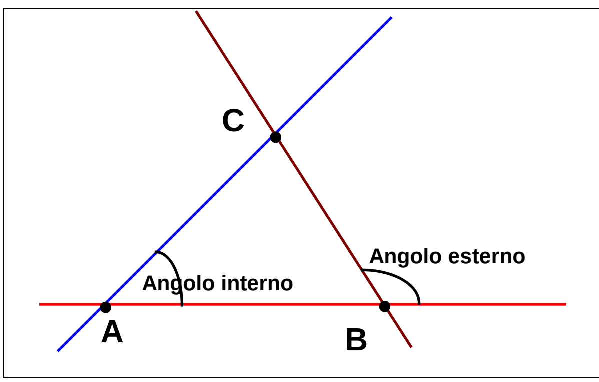
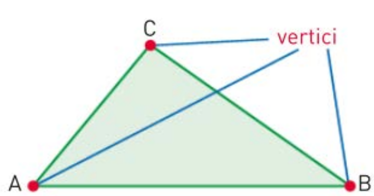
U.D. N°22 I triangoli

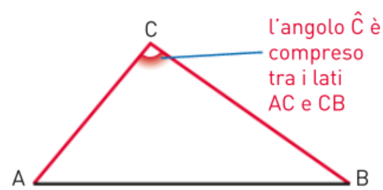
Il triangolo ed i suoi elementi

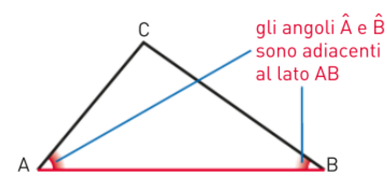
Definizione: Siano A, B, C tre punti non allineati di uno stesso piano. Congiungendoli a due a due, il piano rimane diviso in due parti. La parte di piano limitata prende il nome di triangolo. I tre punti si dicono i vertici del triangolo, mentre i tre segmenti che a due a due li congiungono si chiamano lati del triangolo. La figura costituita dai lati prende il nome di **contorno** (ed è una spezzata chiusa) del triangolo. La somma dei lati del triangolo (che è un segmento) dicesi perimetro (ed è un segmento) del triangolo. Si chiamano angoli interni del triangolo i tre angoli convessi che hanno come vertici i tre vertici del triangolo e per lati le semirette contenenti i lati del triangolo. Nel caso del triangolo della figura gli angoli interni vengono indicati nella seguente maniera: $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$, $C\hat{A}B$.

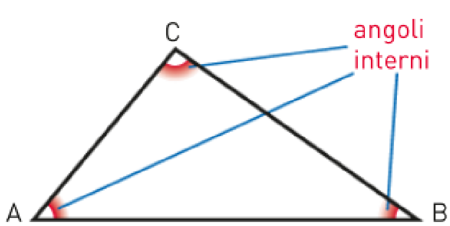


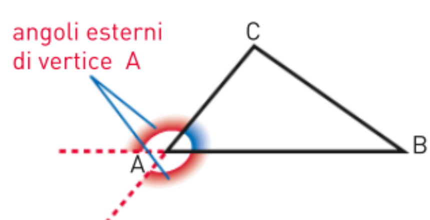
Gli angoli adiacenti agli angoli interni sono chiamati angoli esterni. Gli angoli esterni sono a due a due uguali. In ogni triangolo si diranno opposti un vertice ed il lato che non lo contiene. Sono opposti anche un lato e l'angolo del triangolo avente per vertice il vertice opposto a tale lato.









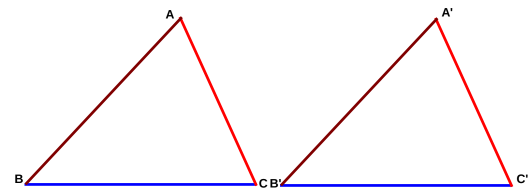


Criteri di congruenza dei triangoli

Congruenza di due triangoli: due triangoli ABC ed $A'B'C'$ sono congruenti se sovrapposti coincidono, cioè se $\hat{A} \cong \hat{A}'$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$, $\hat{C} \cong \hat{C}'$.

Due triangoli congruenti hanno i lati e gli angoli omologhi congruenti e viceversa.

$$A\overset{\triangle}{B}C \cong A'\overset{\triangle}{B'}C' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \;\; \hat{B} \cong \hat{B}' \;\; \hat{C} \cong \hat{C}' \\ AB \cong A'B' \;\; BC \cong B'C' \;\; AC \cong A'C' \end{cases}$$

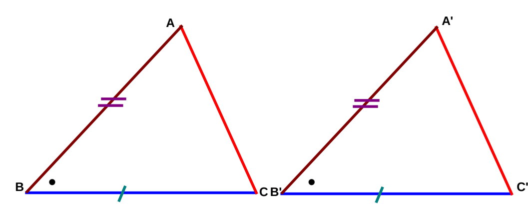


Osservazione Per stabilire l'uguaglianza di due triangoli non è necessario che siano uguali tutti i lati e tutti gli angoli. Si hanno le seguenti proposizioni che prendono il nome di criteri di congruenza dei triangoli.

Primo criterio di congruenza dei triangoli

Due triangoli sono congruenti se hanno due lati e l'angolo fra essi compreso congruenti.

$$Hp \begin{cases} AB \cong A'B' \\ BC \cong B'C' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \end{cases} \qquad Th \left\{ A\overset{\triangle}{B}C \cong A'\overset{\triangle}{B'}C' \right.$$



Dimostrazione

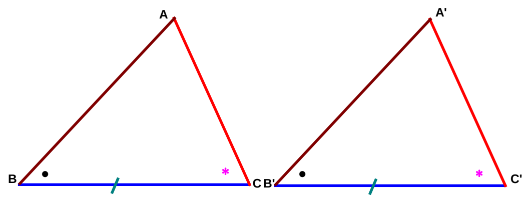
Con un movimento porto il triangolo $A'B'C'$ sul triangolo ABC in modo che $B \equiv B'$ e $C \equiv C'$. Il lato $A'B'$ si sovrappone al lato AB in quanto $\hat{B} \cong \hat{B}'$. Inoltre $\hat{A} \cong \hat{A}'$ in quanto i segmenti AB ed $A'B'$ sono congruenti, si trovano sulla stessa retta ed hanno un estremo in comune.

Osservazione Il messaggio geometrico del primo criterio è il seguente:

<<**dall'uguaglianza di due coppie di lati e dell'angolo fra essi compreso possiamo stabilire l'uguaglianza della terza coppia di lati e delle altre due coppie di angoli.**>>

Secondo criterio di congruenza dei triangoli

Due triangoli sono congruenti se hanno uguali un lato ed i due angoli ad esso adiacenti.



$$Hp \begin{cases} BC \cong B'C' \\ \hat{B} \cong \hat{B'} \\ \hat{C} \cong \hat{C'} \end{cases} \qquad Th \begin{cases} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'} \end{cases}$$

Dimostrazione

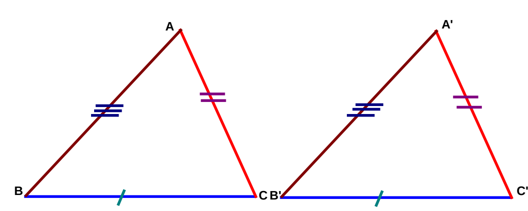
Riporto il triangolo $A'B'C'$ sul triangolo ABC in modo che $B \equiv B'$ e $C \equiv C'$. Questo è possibile in quanto per ipotesi è $BC \cong B'C'$. La retta che contiene il lato $A'B'$ si sovrappone alla retta che contiene il lato AB (in quanto per ipotesi è $\hat{B} \cong \hat{B'}$) mentre la retta che contiene il lato $A'C'$ si sovrappone alla retta che contiene il lato AC (in quanto per ipotesi è $\hat{C} \cong \hat{C'}$). Quindi $A \equiv A'$ in quanto i punti A ed A' sono l'intersezione delle stesse rette. Pertanto i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti in quanto hanno i vertici coincidenti.

Osservazione: Il messaggio geometrico del secondo criterio è il seguente: << dall'uguaglianza di una coppia di lati e delle due coppie di angoli ad essi adiacenti possiamo dedurre l'uguaglianza delle altre due coppie di lati e della coppia di angoli.

Terzo criterio di congruenza dei triangoli

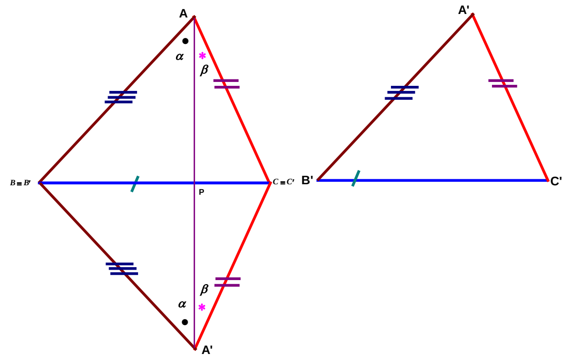
Due triangoli sono congruenti se hanno i tre lati congruenti.

$$Hp \begin{cases} AB \cong A'B' \\ BC \cong B'C' \\ CA \cong C'A' \end{cases} \qquad Th \begin{cases} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'} \end{cases}$$



Trasportiamo il triangolo $A'B'C'$ sul piano del triangolo ABC in modo che $B' \equiv B$ e $C' \equiv C$ (questo è possibile in quanto $BC \cong B'C'$) ed il vertice A' venga a trovarsi da parte opposta rispetto alla retta BC. Sia P il punto comune al segmento AA' ed alla retta BC. Si possono presentare 3 casi:

Primo caso: caso dei triangoli acutangoli



P è interno al segmento BC

$AB \cong A'B' \;\Rightarrow\; B\hat{A}A' \cong B\hat{A}'A = \alpha$

$AC \cong A'C' \;\Rightarrow\; A'\hat{A}C \equiv A\hat{A}'C = \beta$ I triangoli ABC ed $A'B'C'$ sono congruenti per il primo criterio in quanto hanno:

1) $B \cong A'B'$ per Hp 2) $AC \cong A'C'$ per Hp 3) $B\hat{A}C \cong B'\hat{A}'C' = \alpha + \beta$ in quanto somma di angoli congruenti.

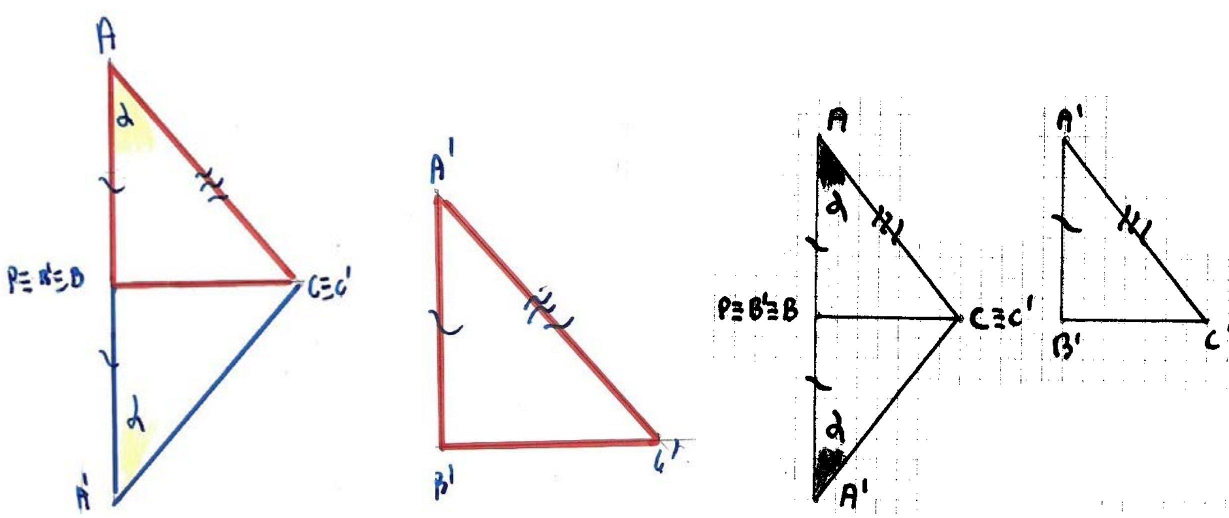
Secondo caso: caso dei triangoli rettangoli

P coincide con uno dei due estremi del segmento AB (ad esempio $P \equiv B \equiv B'$)

$AC \cong A'C' \;\Rightarrow\; C\hat{A}B \cong B'\hat{A}'C' = \alpha$

I triangoli ABC ed $A'B'C'$ sono congruenti per il primo criterio per avere:

1) $AB \cong A'B'$ per Hp 2) $AC \cong A'C'$ per Hp 3) $C\hat{A}B \cong B'\hat{A}'C' = \alpha$ per precedente dimostrazione

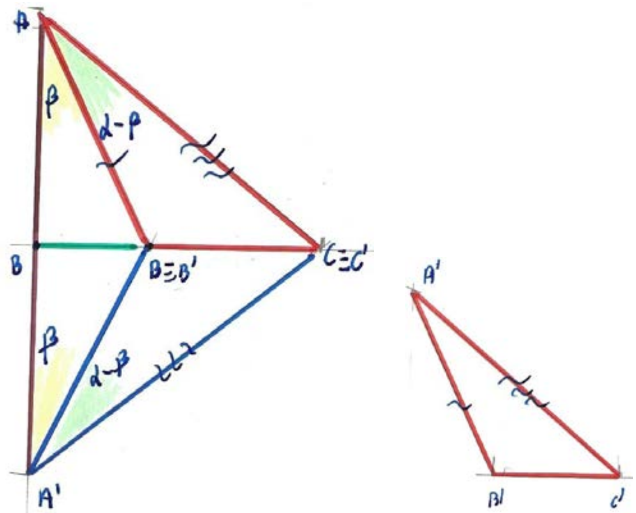


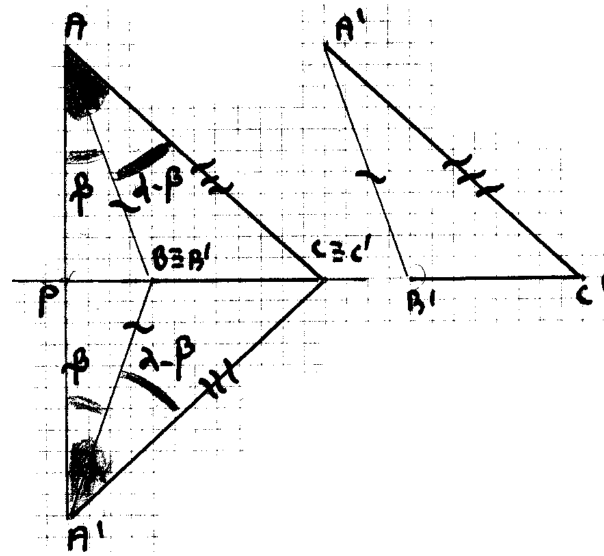
Terzo caso: caso dei triangoli ottusangoli **P è esterno al segmento** BC.

$AB \cong A'B' \;\Rightarrow\; A'\hat{A}B \cong A\hat{A}'B' = \beta$ $\qquad AC \cong A'C' \;\Rightarrow\; A'\hat{A}C \cong A\hat{A}'C' = \alpha$

I triangoli ABC ed $A'B'C'$ sono congruenti per il primo criterio per avere:

1) $AB \cong A'B'$ per Hp 2) $AC \cong A'C'$ per Hp 3) $B\hat{A}C \cong B'\hat{A}'C' = \alpha - \beta$ in quanto differenza di angoli congruenti.



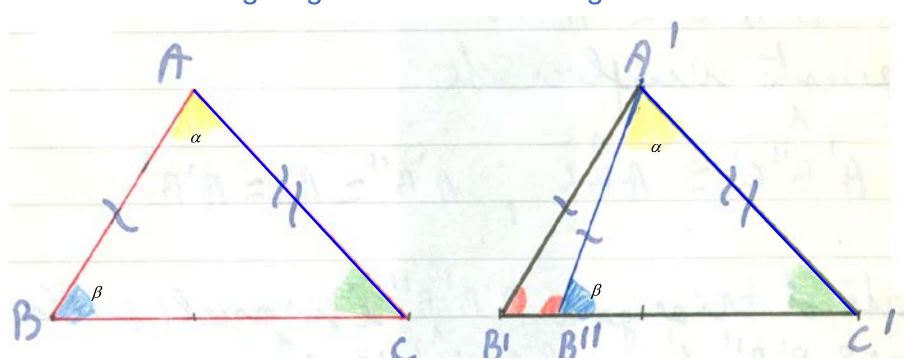


Osservazione

Il messaggio geometrico del terzo criterio è il seguente: <<**dall'uguaglianza delle tre coppie di lati deduciamo l'uguaglianza delle tre coppie di angoli omologhi.>>**

Quarto criterio di uguaglianza dei triangoli

Due triangoli aventi uguali due lati e l'angolo opposto al primo lato, sono uguali se nei due triangoli l'angolo opposto al secondo lato è della stessa specie



$$Hp\begin{cases} AB \cong A'B';\ AC \cong A'C';\ B\hat{C}A \cong B'\hat{C}'A' \\ \hat{B}\, e\, \hat{B}'\ angoli\ della\ stessa\ specie\ (ad\ es.\ acuti) \end{cases} \qquad Th\left\{ B\hat{A}C \cong B'\hat{A}'C' \right.$$

(cioè in entrambi i triangoli è acuto, oppure retto, oppure ottuso)

Per dimostrare che i triangoli ABC ed $A'B'C'$ sono congruenti basta dimostrare che $B\hat{A}C \cong B'\hat{A}'C'$. Dimostriamo questo teorema per assurdo negando la tesi, ammettendo, per esempio, che sia $B\hat{A}C < B'\hat{A}'C'$. Allora, internamente all'angolo $B'\hat{A}'C'$, posso condurre il segmento $A'B''$ tale che risulti: $B''\hat{A}'C' \cong B\hat{A}C = \alpha$. Per il secondo criterio di congruenza dei triangoli risulta: $A'\overset{\triangle}{B''}C' = A\overset{\triangle}{B}C$ e questo implica che:

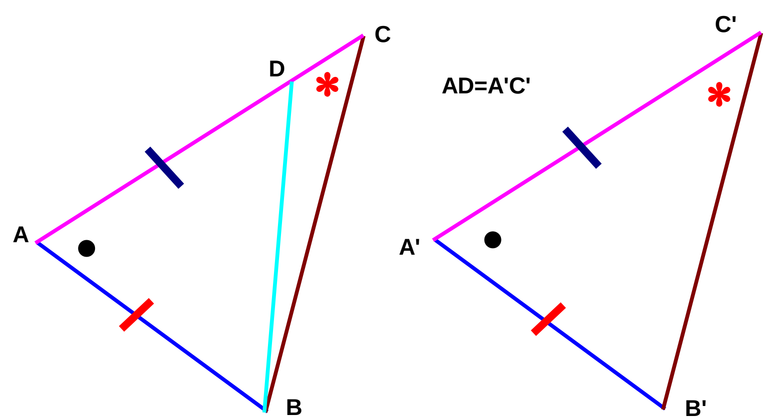
$$A'\hat{B}''C' = A\hat{B}C \quad ; \quad A'B'' = AB = A'B'$$

Poiché il triangolo $A'B'B''$ è isoscele sulla base $B'B''$, l'angolo $A'\hat{B}''C' \cong A\hat{B}C = \beta$ non può essere della stessa specie dell'angolo $A'\hat{B}'C'$. Infatti se l'angolo $A'\hat{B}''C' \cong A\hat{B}C = \beta$ è acuto, allora l'angolo $A'\hat{B}'C' \cong A'\hat{B}''B'$, supplementare dell'angolo β, è ottuso, contro l'ipotesi.

Perveniamo alle stesse conclusioni assurde supponendo $\hat{A} > \hat{A}'$; Poiché non possiamo negare la tesi, essa è vera, cioè $\hat{A} = \hat{A}'$.

Quinto criterio di uguaglianza dei triangoli

Due triangoli aventi ordinatamente uguali un lato, un angolo adiacente e l'angolo opposto ad esso, sono uguali.



$Hp\{AB \cong A'B';\ \hat{A} \cong \hat{A}';\ \hat{C} \cong \hat{C}' \qquad Th\{AC \cong A'C'$

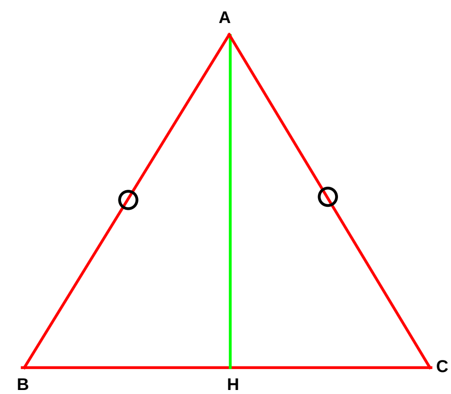
Per dimostrare il teorema basterà fare vedere che $AC \cong A'C'$ ed a questo scopo procediamo per assurdo, provando che AC non può essere né maggiore né minore di $A'C'$. Supponiamo che sia $AC > A'C'$. Questo ci consente di prendere sul segmento AC il segmento $AD \cong A'C'$ con il punto D interno al lato AC. Congiungendo D con B otteniamo il triangolo ABD uguale al triangolo $A'B'C'$ per il primo criterio di congruenza. Dall'uguaglianza di questi due triangoli deduco l'uguaglianza $A\hat{D}B \cong A'\hat{C}'B' \cong A\hat{C}B$. Ma ciò è assurdo perché l'angolo $A\hat{D}B$, essendo esterno al triangolo BDC, deve essere maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti, in particolare maggiore dell'angolo $A\hat{C}B$. L'assurdo si toglie ammettendo che $AC \cong A'C'$. Allora i due triangoli dati $A\overset{\triangle}{B}C$ e $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ vengono ad avere uguali due lati e l'angolo compreso e quindi sono uguali.

Triangolo isoscele

Un triangolo si dice isoscele se ha due lati congruenti.

Osservazione: Il lato diverso dai lati congruenti dicesi base del triangolo isoscele; gli angoli adiacenti alla base prendono il nome di angoli alla base: l'angolo opposto alla base prende il nome di angolo al vertice.

Teorema: **Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali**



$$Hp\{AB \cong AC \qquad Th\{A\hat{B}C \cong A\hat{C}B$$

Dimostrazione: La bisettrice dell'angolo al vertice $B\hat{A}C$ incontra la base BC nel punto H. I triangoli ABH ed AHC sono congruenti per il primo criterio in quanto hanno

1) $AB \cong AH$ per Hp 2) AH in comune 3) $B\hat{A}H \cong H\hat{A}C$ per costruzione

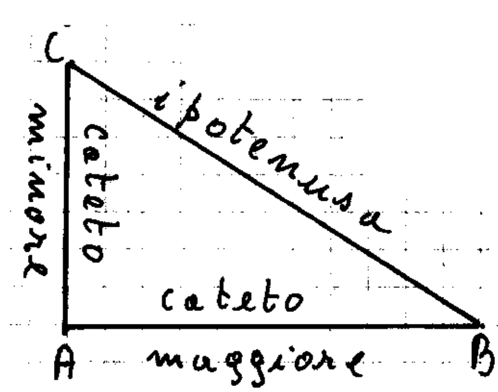
Ne consegue che: $A\hat{B}C \cong A\hat{C}B$ c.v.d.

Inoltre: $BH \cong HC$; $B\hat{H}C =$ angolo piatto $B\hat{H}A \cong A\hat{H}C$ = angolo retto e quindi possiamo affermare che la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana ed altezza rispetto alla base.

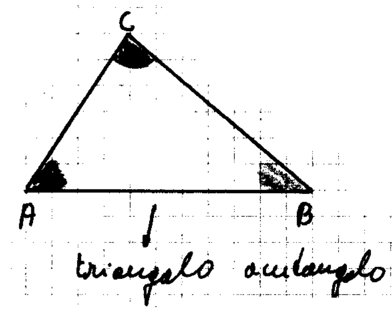
Teorema inverso Se un triangolo ha due angoli uguali esso è isoscele.

Classificazione dei triangoli rispetto agli angoli

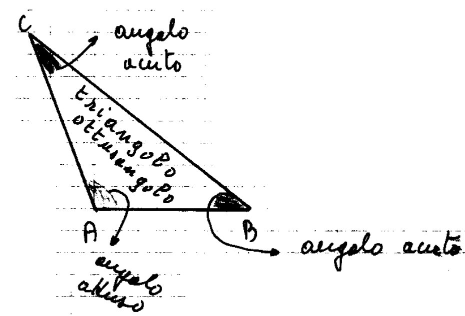
Un triangolo si dice **rettangolo** se ha un angolo retto (gli altri due sono **acuti**). Il lato che si oppone all'angolo retto si dice **ipotenusa**, gli altri due lati si dicono cateti. Se i cateti sono congruenti allora il triangolo rettangolo è isoscele e gli angoli alla base sono di $45°$.



Un triangolo si dice si dice acutangolo se ha tutti e tre gli angoli acuti.

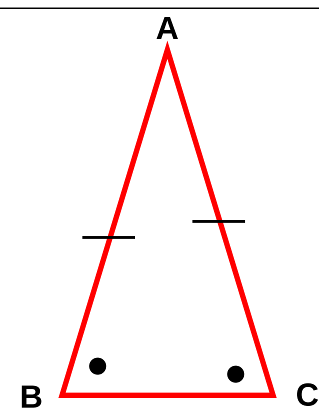


Un triangolo si dice si dice ottusangolo se ha un angolo ottuso (e gli altri due acuti).



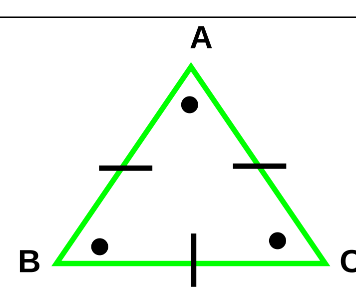
Classificazione dei triangoli rispetto ai lati

Un triangolo si dice isoscele se ha due lati uguali. Il lato diverso dai lati uguali si dice **base** del triangolo isoscele; gli angoli adiacenti alla base prendono il nome di angoli alla base; l'angolo opposto alla base prende il nome di **angolo al vertice**. Nel triangolo isoscele i lati obliqui sono uguali, gli angoli alla base sono uguali.

ABC è un triangolo isoscele avente come base il lato BC, come vertice il punto A, come lati (obliqui) i segmenti AB e AC, come angoli alla base gli angoli convessi $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$.	

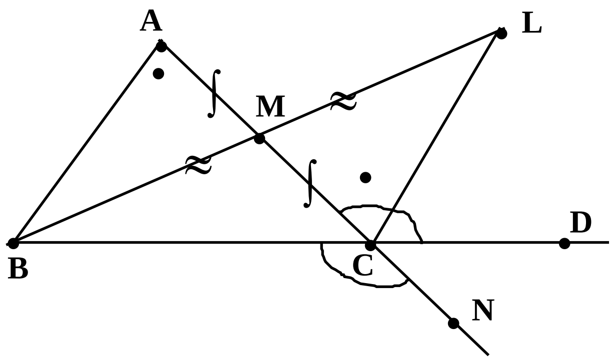
Un triangolo si dice equilatero se ha tutti e tre i lati uguali. In un triangolo equilatero i tre lati sono uguali, i tre angoli interni sono uguali.

$AB = BC = CA \qquad A\hat{B}C = B\hat{C}A = C\hat{A}B$



Teorema dell'angolo esterno

Ogni angolo esterno di un qualsiasi triangolo è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti.



$Hp \left\{ A\hat{C}D = \text{angolo esterno del triangolo } ABC \right.$

$Th \left\{ A\hat{C}D > B\hat{A}C \; ; \; A\hat{C}D > A\hat{B}C \right.$

Congiungiamo il vertice B con il punto medio M del lato opposto AC e prolunghiamo BM di un segmento $ML = BM$ e congiungiamo L con C.

I triangoli AMB ed LMC sono uguali per avere:

1) $AM = MC$ per costruzione 2) $BM = ML$ per costruzione 3) $A\hat{M}B = L\hat{M}C$ perché angoli opposti al vertice.

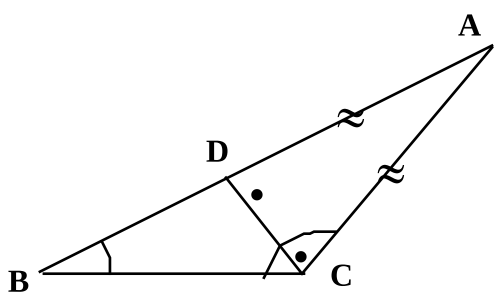
$$\overset{\triangle}{AMB} = \overset{\triangle}{LMC} \Rightarrow B\hat{A}C = M\hat{C}L \; ; \; \left.\begin{array}{l} A\hat{C}D > M\hat{C}L \\ B\hat{A}C = M\hat{C}L \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{C}D > B\hat{A}C$$

Prolungando il lato AC dalla parte di C , si dimostra in modo analogo che: $A\hat{C}D = B\hat{C}N > A\hat{B}C$

Corollario: **Un triangolo non può avere più di un angolo retto (ottuso)**

Disuguaglianze fra gli elementi di un triangolo

Teorema: **Se un triangolo ha due lati disuguali, allora al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore.**



$Hp \left\{ AB > AC \right.$

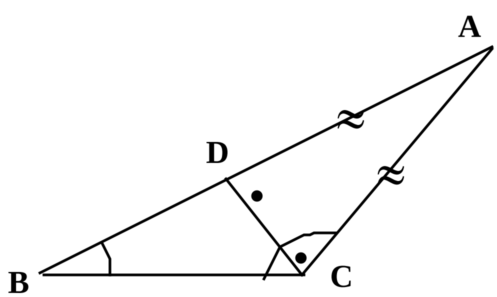
$Th \left\{ B\hat{A}C > A\hat{B}C \right.$

Sul lato AB riporto il segmento $AD = AC$. Il triangolo ACD è isoscele sulla base CD . Quindi risulta: $A\hat{C}D = A\hat{D}C$. Ma: $A\hat{C}B > A\hat{C}D = A\hat{D}C$.

Per il teorema dell'angolo esterno applicato al triangolo BDC risulta: $A\hat{D}C > D\hat{B}C$

$\left\{A\hat{C}B > A\hat{D}C \;\; ; \;\; A\hat{D}C > A\hat{B}C\right\} \Rightarrow \quad A\hat{C}B > A\hat{B}C$ (proprietà transitiva delle disuguaglianze)

Teorema: **Se un triangolo ha due angoli disuguali, allora all'angolo maggiore si oppone il lato maggiore.**



$Hp \left\{B\hat{A}C > A\hat{B}C\right.$

$Th \left\{AB > AC\right.$

Dimostrazione per assurdo

1) Supponiamo per assurdo che sia $AB = AC$. In questo caso, essendo il triangolo ABC isoscele sulla base BC , dovremmo avere: $B\hat{C}A = A\hat{B}C$ che è contro l'ipotesi.

2) Supponiamo per assurdo che sia: $AB < AC$

Per il teorema precedentemente dimostrato dovremmo avere: $B\hat{C}A < A\hat{B}$ che è contro l'ipotesi.

AB , non potendo essere né minore né uguale ad AC , sarà maggiore, cioè : $AB > AC$

Teorema: **In ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due.**

Teorema: **In ogni triangolo ciascun lato è maggiore della differenza degli altri due.**

Osservazione: I due ultimi teoremi mettono in evidenza che tre generici segmenti non possono essere sempre lati di un triangolo. Perché ciò si verifichi occorre che ciascuno di essi deve essere maggiore (minore) della differenza (somma) degli altri due.

Teorema: **Se due triangoli hanno due lati ordinatamente uguali e gli angoli fra loro compresi disuguali, allora dei rimanenti lati è maggiore quello che si oppone all'angolo maggiore.**

Teorema: **Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali ed i rimanenti lati disuguali, allora gli angoli a questi opposti sono pure diseguali ed è maggiore quello che si oppone al lato maggiore.**

Rette perpendicolari

Due rette si dicono perpendicolari se incontrandosi formano quattro angoli uguali (e quindi retti).

Teorema: **Per un punto assegnato passa una ed una sola retta perpendicolare ad una data retta**.

Rette oblique

Due rette che si incontrano senza essere perpendicolari si dicono rette oblique.

Distanza di un punto da una retta

La **distanza di un punto da una retta** è il segmento di perpendicolare condotto dal punto alla retta

Proiezione ortogonale di un punto e di un segmento su una retta

Definizione: Dicesi proiezione ortogonale di un punto su una retta il piede della perpendicolare condotta dal punto alla retta.

Definizione: Dicesi proiezione ortogonale di un segmento su di una retta il segmento che ha come estremi le proiezioni ortogonali degli estremi del segmento dato sulla retta.

Teorema: La distanza di un punto da una retta è minore di qualsiasi segmento obliquo condotto dal punto alla retta.

Teorema: **Due segmenti obliqui, condotti da un punto ad una retta, ed aventi proiezioni ortogonali uguali, sono uguali.**

Teorema: Se **due segmenti obliqui hanno proiezioni ortogonali disuguali, allora essi sono disuguali ed è maggiore quello che ha proiezione maggiore.**

Asse di un segmento

Definizione: L'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento passante per il suo punto medio .

Teorema: Si può dimostrare che l'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento.

Altezze, mediane e bisettrici di un triangolo

Definizione: Si dice altezza di un triangolo relativa ad un suo lato (che rappresenta la base del triangolo) il segmento di perpendicolare condotto dal vertice opposto alla retta contenente il lato considerato. **Un triangolo possiede tre altezze e quindi anche tre basi.**

Definizione: Si dice mediana di un triangolo, relativa ad un suo lato, il segmento che congiunge il punto medio di questo lato col vertice opposto. **Un triangolo possiede tre mediane.**

Definizione: Si dice **bisettrice** di un triangolo, relativa ad un suo angolo interno, il segmento di bisettrice di quell'angolo compreso fra il vertice ed il lato opposto. **Un triangolo ha tre bisettrici.**

Definizione: Si dice asse di un triangolo relativo ad un suo lato la retta perpendicolare al lato e passante per il suo punto medio. Un triangolo ha tre assi.

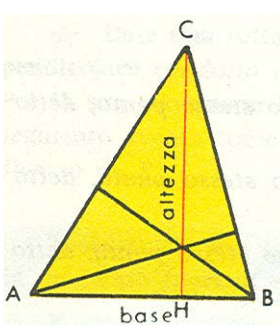
Osservazione Le mediane e le bisettrici di un triangolo sono sempre interne al triangolo. Le altezze possono essere interne, esterne o coincidere con un lato del triangolo.

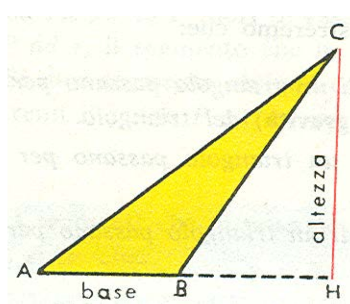
In particolare l'altezza relativa ad un lato è:

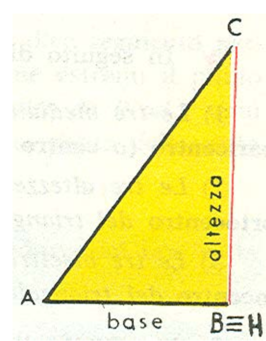
01) interna, se entrambi gli angoli adiacenti a questo lato sono acuti

02) esterna, se uno di questi angoli è ottuso

03) coincidente con un lato, se uno di questi angoli è retto.







In seguito dimostreremo che:

01) Le tre mediane di uno stesso triangolo passano per uno stesso punto detto baricentro del triangolo.

02) Le tre altezze di uno stesso triangolo passano per uno stesso punto detto ortocentro del triangolo.

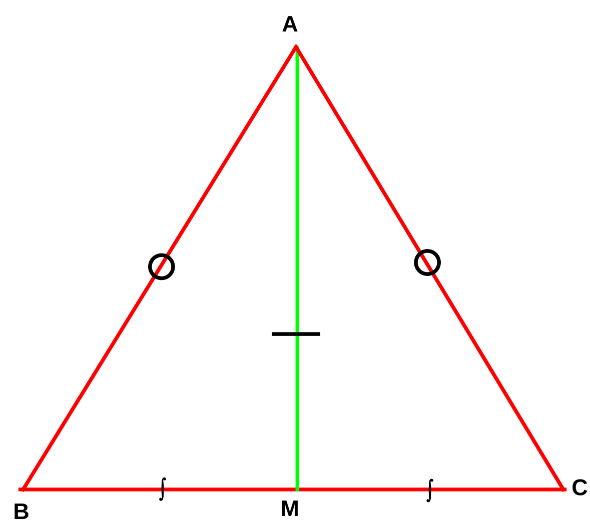
03) Le tre bisettrici di uno stesso triangolo passano per uno stesso punto detto incentro del triangolo.

04) Gli assi dei tre lati di uno stesso triangolo passano per lo stesso punto detto circocentro del triangolo.

Il *baricentro*, l'*ortocentro*, l'*incentro* ed il *circocentro* sono detti punti notevoli o punti caratteristici del triangolo. Nel triangolo equilatero tali punti coincidono.

Un altro teorema sul triangolo isoscele

Teorema: Nel triangolo isoscele la mediana relativa alla base è anche altezza e bisettrice



Sia AM la mediana relativa alla base BC del triangolo isoscele ABC. Vogliamo dimostrare che AM è anche altezza relativa alla base BC e bisettrice dell'angolo al vertice $B\hat{A}C$. I triangoli AMB ed AMC sono uguali per il terzo criterio di uguaglianza per avere: 1) AM in comune 2) $AB = AC$ perché lati obliqui di uno stesso triangolo isoscele 3) $BM = MC$ per ipotesi.

Ne consegue che: a) $B\hat{A}M = M\hat{A}C$ e quindi BC è bisettrice dell'angolo al vertice $B\hat{M}C$

b) $A\hat{M}B = A\hat{M}C = 90°$ e quindi AM è l ' altezza relativa alla base BC .

Teorema: Nel triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana ed altezza relative alla base.

Sia AM la bisettrice relativa alla base BC del triangolo isoscele ABC . Vogliamo dimostrare che AM è anche mediana ed altezza relative alla base BC . I triangoli AMB ed AMC sono uguali per il **secondo criterio di uguaglianza** per avere: 1) AM in comune 2) $AB = AC$ perché lati obliqui di uno stesso triangolo isoscele 3) $B\hat{A}M = M\hat{A}C$ per ipotesi. Ne consegue che:

a) $A\hat{M}B = A\hat{M}C = 90°$ e quindi AM è l ' altezza relativa alla base BC. b) $BM = MC$ e quindi AM è la **mediana** relativa alla base BC.