Unità Didattica N°23

Rette parallele

01) Definizione di rette parallele

02) Angoli formati da due rette tagliate da una trasversale

03) Quinto postulato di Euclide sulle rette parallele

04) Rette parallele: Teorema fondamentale

05) Rette parallele: Teorema inverso del fondamentale

06) Rette parallele tagliate da una trasversale

07) Distanza tra due rette parallele

08) Teorema dell'angolo esterno di un triangolo

09) Somma degli angoli interni di un triangolo

10) Triangolo con un lato doppio rispetto alla sua mediana

11) Criteri di uguaglianza dei triangoli rettangoli

12) Criterio speciale di uguaglianza dei triangoli rettangoli

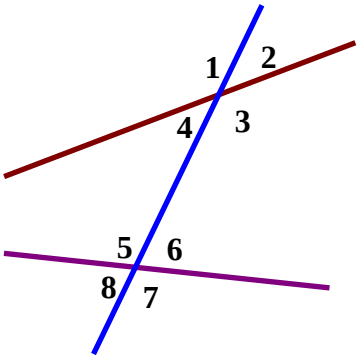
13) Un altro teorema sul triangolo isoscele

RETTE PARALLELE

Definizione: Due rette si dicono parallele quando sono complanari e non hanno alcun punto in comune.

Definizione: date due rette r ed s (parallele o incidenti), si dice loro **trasversale** una qualsiasi retta t che incontri sia r che s.

Angoli formati da due rette tagliate da una trasversale



Due rette r ed s tagliate da una trasversale t formano otto angoli (che solo per comodità indichiamo con dei numeri) che possiamo associare a due a due in diversi modi:

1) **Angoli alterno-interni**: Sono le due seguenti coppie di angoli: $\hat{4}\,;\hat{6}$ e $\hat{3}\,;\hat{5}$

2) Angoli alterno-esterni: Sono le due seguenti coppie di angoli: $\hat{1}\,;\hat{7}$ e $\hat{2}\,;\hat{8}$

3) Angoli coniugati interni: Sono le due seguenti coppie di angoli: $\hat{4}\,;\hat{5}$ e $\hat{3}\,;\hat{6}$

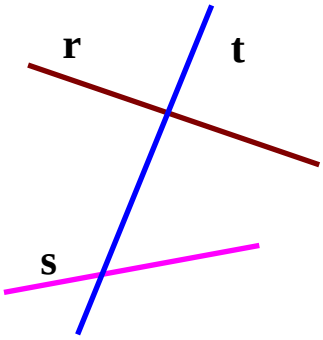
4) Angoli coniugati esterni: Sono le due seguenti coppie di angoli: $\hat{1}\,;\hat{8}$ e $\hat{2}\,;\hat{7}$

5) Angoli corrispondenti: Sono le quattro seguenti coppie di angoli:

$$\hat{1}\,;\hat{5}\ ,\ \hat{2}\,;\hat{6}\ ,\ \hat{4}\,;\hat{8}\ ,\ \hat{3}\,;\hat{7}$$

Quinto postulato di Euclide

<<**Per un punto fuori di una retta r passa una sola parallela alla retta data r**>>

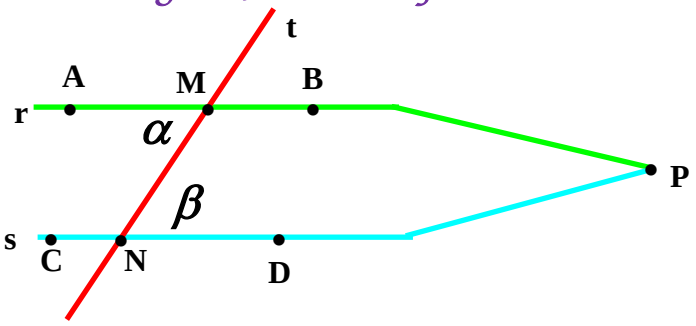


Euclide enunciò questo postulato nella seguente maniera equivalente:

<<**Se due rette r ed s formano con una trasversale t angoli coniugati non supplementari, esse si incontrano da quella parte dove la somma dei due angoli coniugati è minore di un angolo piatto.**>>

Rette parallele: Teorema fondamentale

Se due rette complanari formano con una trasversale angoli alterno-interni uguali, esse sono parallele.



$$Hp\begin{cases} r\cap t=\{M\} \\ s\cap t=\{N\} \\ A\hat{M}N=\alpha=M\hat{N}D=\beta \end{cases}$$

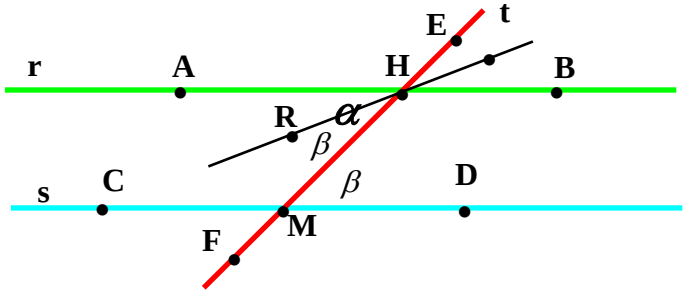
$$Th\{\ r\ //\ s$$

Dimostriamo questo teorema per assurdo negando la tesi. Se le rette r ed s non sono parallele esse si incontreranno nel punto P individuando il triangolo MPN. L'angolo α è esterno rispetto al triangolo MPN e quindi, per un teorema precedentemente dimostrato, esso dovrebbe essere maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti, cioè: $\alpha > \beta$ in contrasto con l'ipotesi.

La tesi non può essere negata e quindi le rette r ed s sono parallele.

Rette parallele: Teorema inverso del fondamentale

Due rette parallele r ed s formano con ogni trasversale angoli alterni interni uguali



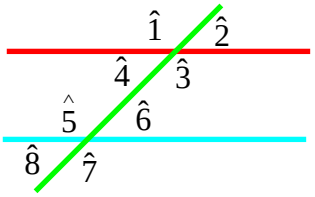
$$Hp\ \{r\ //\ s$$

$$Th\ \{\ A\hat{H}M=\alpha=H\hat{M}D=\beta$$

Dimostriamo questo teorema per assurdo negando la tesi e supponendo, ad esempio, che sia $A\hat{H}M > H\hat{M}D$. Allora è possibile costruire la retta RH in modo che risulti: $R\hat{H}M=H\hat{M}D=\beta$. Questo, per il teorema fondamentale, implica che: $RH\ //\ s$. Quindi, per il punto H passerebbero due rette, r ed HR parallele alla stessa retta s. Questo è in contrasto col quinto postulato di Euclide. La tesi non può essere negata e quindi gli angoli α e β sono uguali: $\alpha=\beta$.

I due teoremi dimostrati possono essere così formulati: <<**C.N.S. perché due rette r ed s siano parallele è che formino angoli alterno-interni uguali**.>>

Rette parallele tagliate da una trasversale



Teorema: Due rette parallele formano con una trasversale coppie di angoli che sono **uguali** o **supplementari**. Sono ***uguali***: 1) gli ***angoli alterni interni*** 2) gli ***angoli alterni esterni*** 3) gli ***angoli corrispondenti*** . Sono **supplementari**: 1) gli **angoli coniugati interni** 2) gli **angoli coniugati esterni**.

Dimostrazione:

1) $\hat{4}=\hat{6}$, $\hat{3}=\hat{5}$ per il teorema inverso del fondamentale

2) $\hat{1}=\hat{3}=\hat{5}=\hat{7} \Rightarrow \hat{1}=\hat{7}$ $\hat{2}=\hat{4}=\hat{6}=\hat{8} \Rightarrow \hat{2}=\hat{8}$

3) $\hat{2}=\hat{4}=\hat{6} \Rightarrow \hat{2}=\hat{6}$ $\hat{3}=\hat{5}=\hat{7} \Rightarrow \hat{3}=\hat{7}$ $\hat{4}=\hat{6}=\hat{8} \Rightarrow \hat{4}=\hat{8}$ $\hat{1}=\hat{3}=\hat{5} \Rightarrow \hat{1}=\hat{5}$

4) $\hat{3}+\hat{2}=1\,Angolo\ Piatto$, $\boxed{\hat{2}=\hat{6}} \Rightarrow \hat{3}+\hat{6}=1\,Angolo\ Piatto$

5) $\hat{3}+\hat{2}=1\,Angolo\ Piatto$, $\boxed{\hat{3}=\hat{7}} \Rightarrow \hat{7}+\hat{2}=1\,Angolo\ Piatto$

Se due rette tagliate da una trasversale hanno due angoli alterni interni o alterni esterni o corrispondenti uguali o due angoli coniugati interni o coniugati esterni supplementari, allora le due rette sono parallele. (**criterio di parallelismo**)

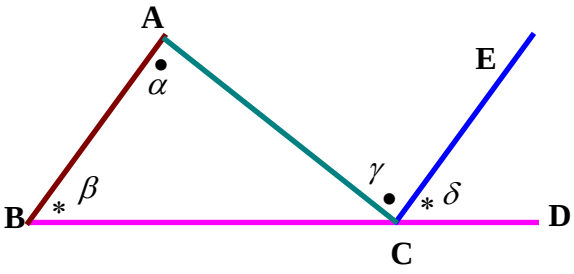
Distanza tra due rette parallele

Teorema: Se due rette sono parallele, allora tutti i punti dell'una sono **equidistanti** dall'altra.

Definizione: Dicesi distanza tra due rette parallele la distanza di un punto qualsiasi di una di esse dall'altra retta.

Teorema dell'angolo esterno di un triangolo

Teorema: ***In un qualsiasi triangolo ogni angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti.***



$Hp\{A\hat{C}D$ è un angolo esterno del triangolo ABC

$Th\{A\hat{C}D = C\hat{A}B + C\hat{B}A = \alpha + \beta$

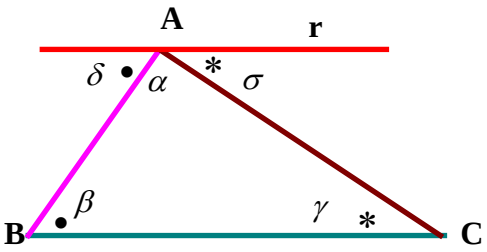
Per il vertice C traccio la retta CE parallela al lato AB. Risulta:

$A\hat{C}D = \delta = \beta$ perché angoli corrispondenti rispetto alle parallele CE ed AB tagliate dalla trasversale BC.

$A\hat{C}E = \gamma = \alpha$ perché angoli alterni interni rispetto alle parallele CE e AB tagliate dalla trasversale AC. $A\hat{C}D = \gamma + \delta = \alpha + \beta$

Somma degli angoli interni di un triangolo

Teorema: *La somma degli angoli interni di un qualsiasi triangolo è uguale ad un angolo piatto*



$Hp\{ABC$ è un triangolo qualsiasi

$Th\{\alpha + \beta + \gamma =$ angolo piatto

Per il vertice A traccio la retta r parallela al lato BC.

$\delta = \beta$ perché angoli alterni interni rispetto alle parallele r e BC tagliate dalla trasversale AB

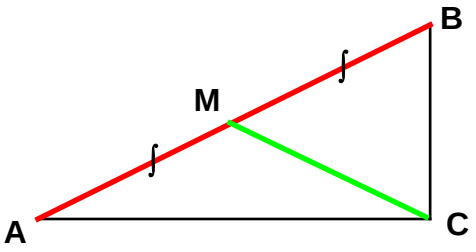
$\sigma = \gamma$ perché angoli alterni interni rispetto alle parallele r e BC tagliate dalla trasversale AC

$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \delta + \sigma =$ angolo piatto

Triangolo con un lato doppio rispetto alla sua mediana

Teorema:

Se in un triangolo ABC la mediana CM relativa al lato AB è uguale alla metà di questo lato, allora ABC è un triangolo rettangolo in C.



Criteri di uguaglianza dei triangoli rettangoli

Primo criterio: Due triangoli rettangoli sono uguali se hanno uguali i due cateti

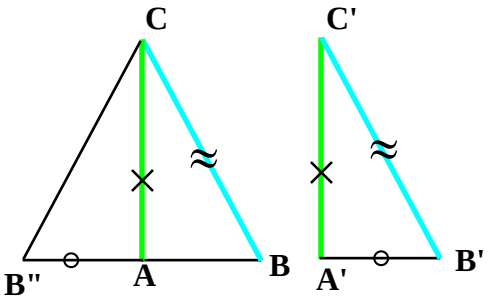
Secondo criterio: Due triangoli rettangoli sono uguali se hanno uguali un cateto e l'angolo acuto ad esso adiacente

Terzo criterio: Due triangoli rettangoli sono uguali se hanno uguali un cateto e l'angolo acuto ad esso opposto

Quarto criterio: Due triangoli rettangoli sono uguali se hanno uguali l'ipotenusa ed un angolo acuto.

Criterio speciale di uguaglianza per i triangoli rettangoli

<<Due triangoli rettangoli sono uguali se hanno uguali l'ipotenusa ed un cateto>>



$$Hp\begin{cases} B\hat{A}C = B'\hat{A}'C' = angolo\ retto \\ BC = B'C' \\ AC = A'C' \end{cases}$$

$$Th\begin{cases} \overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{A'B'C} \end{cases}$$

Prolungo il segmento BA dalla parte di A di un segmento $AB'' = A'B'$ e congiungo C con B''.

I triangoli ACB'' e $A'B'C'$ sono uguali per avere:

1) $AB'' = A'B'$ **per costruzione**

2) $AC = A'C'$ **per ipotesi**

3) $B''\hat{A}C = B'\hat{A}'C'$ **perché entrambi retti**.

Ne consegue che $CB'' = C'B' = CB$ e che il triangolo BCB'' è isoscele sulla base BB''. Ricordando che in un triangolo isoscele l'altezza (AC) relativa alla base (BB'') è anche mediana, possiamo scrivere: $AB'' = AB = A'B'$.

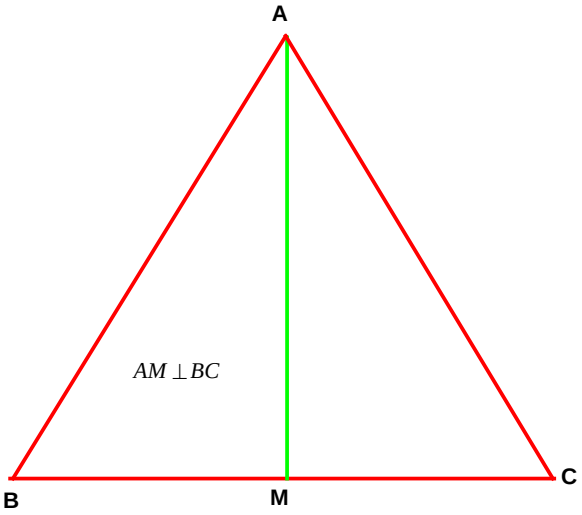
I triangoli ABC e $A'B'C'$ sono uguali per avere uguali i tre lati.

Un altro teorema sul triangolo isoscele

Teorema: Nel triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche mediana e bisettrice

Dimostrazione

Sia AH l'altezza relativa alla base BC del triangolo isoscele ABC. Vogliamo dimostrare che AH è anche mediana relativa alla base BC e bisettrice dell'angolo al vertice $B\hat{A}C$. I triangoli AMB ed AMC sono uguali per il **criterio speciale di uguaglianza per i triangoli rettangoli** per avere: 1) AM in comune 2) $AB = AC$ perché lati obliqui di uno stesso triangolo isoscele 3) $A\hat{M}B = A\hat{M}C = 90°$ per ipotesi.



Ne consegue che: a) $B\hat{A}M = M\hat{A}C$ e quindi BC è **bisettrice** dell'angolo al vertice $B\hat{M}C$

b) $BM = MC$ e quindi AM è la **mediana** relativa alla base BC.

Corollario In un triangolo equilatero, l'altezza, la bisettrice e la mediana uscenti da uno stesso vertice coincidono.