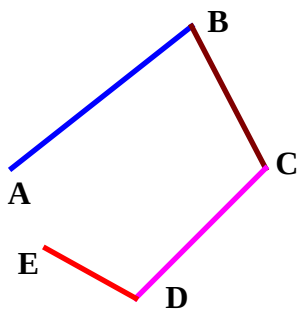


U.D. N°24 I poligoni

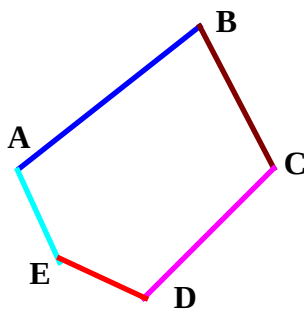
- 01) Definizione di poligono**
- 02) Alcune proprietà dei poligoni**
- 03) Somma degli angoli interni di un poligono**
- 04) Somma degli angoli esterni di un poligono**
- 05) Criteri di uguaglianza dei poligoni**
- 06) Proprietà perimetriche dei poligoni**
- 07) Poligoni regolari**

Definizione di poligono

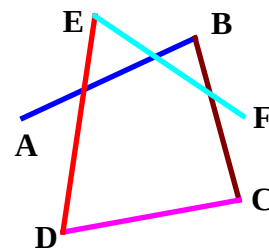
Definizione: Dicesi **spezzata** o **poligonale** la figura geometrica formata da più segmenti a due a due consecutivi e non adiacenti. I segmenti sono i **lati** della spezzata; gli estremi dei segmenti sono i **vertici** della poligonale. Una spezzata è **aperta** (**chiusa**) se gli estremi non coincidono (coincidono). La **poligonale** è **intrecciata** se due lati non consecutivi si intersecano.



Poligonale aperta



Poligonale chiusa



Poligonale intrecciata

Definizione: Dicesi **poligono** la parte di piano delimitata da una spezzata chiusa non intrecciata. I punti A, B, C, D, E sono i **vertici** del poligono, i segmenti AB , BC , CD , DE , EA sono i **lati** del poligono. La spezzata $ABCDE$ dicesi **contorno** del poligono, mentre la somma dei lati dicesi **perimetro** del poligono. Il **poligono prende il nome dal numero dei lati**:

a) $n = 3 \rightarrow$ triangolo **b)** $n = 4 \rightarrow$ quadrilatero (o quadrangolo) **c)** $n = 5 \rightarrow$ pentagono

d) $n = 6 \rightarrow$ esagono **e)** $n = 7 \rightarrow$ ettagono **f)** $n = 8 \rightarrow$ ottagono **g)** $n = 10 \rightarrow$ decagono

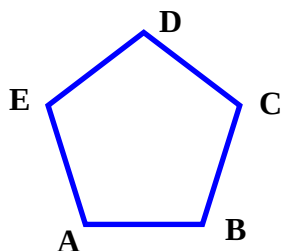
Alcune proprietà dei poligoni

Definizione: Un poligono si dice **convesso** quando ogni segmento che congiunge due qualsiasi suoi punti appartiene al poligono, altrimenti il poligono dicesi **concavo**.

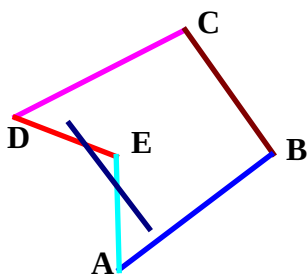
Altra definizione: Un poligono si dice **convesso** se ogni retta contenente ciascun lato lascia il poligono nello stesso semipiano. Un poligono si dice **intrecciato** quando è intrecciata la spezzata che lo delimita. Un poligono si dice **equilatero** (**equiangolo**) quando ha tutti i (gli) lati (angoli) uguali.

Un poligono si dice **regolare** se è contemporaneamente equilatero ed equiangolo. Dicesi **corda** di un poligono ogni segmento che congiunge due punti qualsiasi del contorno del poligono non appartenenti ad uno stesso lato. **Diagonale** di un poligono è il segmento che congiunge due vertici non consecutivi del poligono. Un poligono avente n lati possiede $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonali.

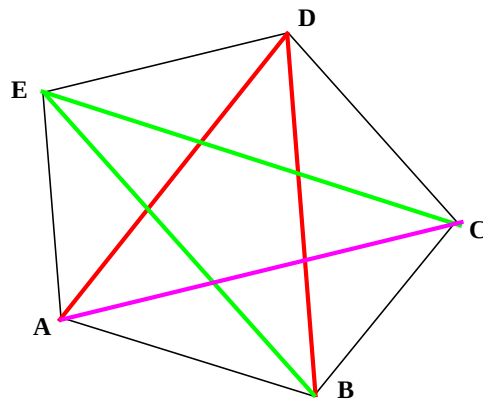
Si dice **angolo interno** (o semplicemente angolo) di un poligono ogni angolo convesso formato da una coppia di semirette contenenti due lati consecutivi del poligono. Un poligono ha tanti angoli interni quanti sono i vertici, ed ha tanti vertici quanti sono i lati del poligono. Si dice **angolo esterno** di un poligono un angolo adiacente ad un suo angolo interno.



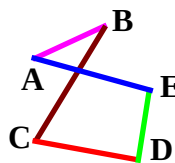
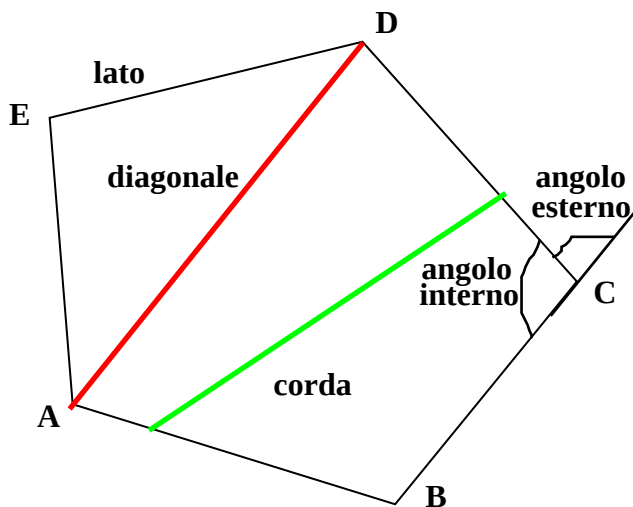
Poligono Convesso



Poligono concavo



Poligono convesso con diagonali



Poligono intrecciato

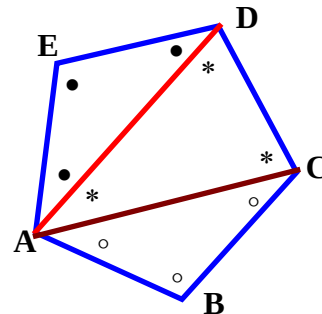
Somma degli angoli interni di un poligono

Teorema

La somma degli angoli interni di un poligono convesso è uguale alla somma di tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due.

$Hp \{ ABCDE = \text{poligono convesso avente } 5(n) \text{ lati} \}$

$Th \{ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 3 \text{ angoli piatti} = n - 2 \text{ angoli piatti} \}$



Da un vertice qualsiasi (ad esempio A) conduciamo tutte le possibili diagonali. Esse sono $n - 3$ (2). Il poligono resta diviso in $n - 3$ (3) triangoli. La somma degli angoli interni del poligono è uguale alla somma degli angoli interni degli $n - 2$ triangoli, cioè risulta uguale a $n - 2$ angoli piatti.

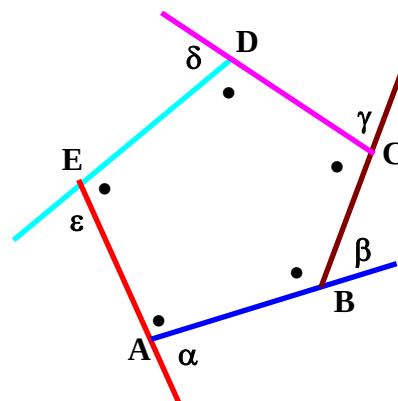
Somma degli angoli esterni di un poligono

Teorema

La somma degli angoli esterni di un qualsiasi poligono convesso è uguale a due angoli piatti, cioè ad un angolo giro.

$Hp \{ ABCDE = \text{poligono convesso avente } 5(n) \text{ lati} \}$

$Th \{ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 2 \text{ angoli piatti} \}$



La somma di un angolo interno del poligono e del corrispondente angolo esterno è uguale ad un angolo piatto.

$$(\hat{A} + \alpha) + (\hat{B} + \beta) + (\hat{C} + \gamma) + (\hat{D} + \delta) + (\hat{E} + \varepsilon) = n \text{ Angoli Piatti}$$

$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E}) + (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = n \text{ Angoli Piatti}$$

$$(n - 2) \text{ Angoli Piatti} + (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = n \text{ Angoli Piatti}$$

$$n \text{ Angoli Piatti} - 2 \text{ Angoli Piatti} + (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = n \text{ Angoli Piatti}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = n \text{ Angoli Piatti} - n \text{ Angoli Piatti} + 2 \text{ Angoli Piatti}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = 2 \text{ Angoli Piatti}$$

Criteri di uguaglianza dei poligoni

Definizione: Due poligoni aventi lo stesso numero di lati sono **uguali** quando sovrapposti coincidono. Essi hanno ordinatamente uguali tutti i lati e tutti gli angoli.

Primo criterio di uguaglianza dei poligoni

Due poligoni convessi aventi lo stesso numero di lati sono uguali se hanno uguali tutti i lati e gli angoli compresi tranne due lati consecutivi e l'angolo compreso.

Secondo criterio di uguaglianza dei poligoni

Due poligoni convessi aventi lo stesso numero di lati sono uguali se hanno uguali tutti i lati e gli angoli compresi tranne un lato e gli angoli adiacenti.

Terzo criterio di uguaglianza dei poligoni

Due poligoni convessi aventi lo stesso numero di lati sono uguali se hanno uguali tutti i lati e gli angoli compresi tranne tre angoli consecutivi.

Definizione: Un poligono si dice inscritto in un altro poligono quando tutti i vertici del primo appartengono al perimetro del secondo.

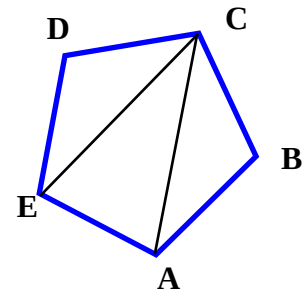
Proprietà perimetrali dei poligoni

Teorema

In ogni poligono ciascun lato è minore della somma degli altri lati.

$Hp\{ABCDE \text{ è un poligono}$

$Th\{AB < BC + CD + DE + AE$



Dal vertice C traccio tutte le possibili diagonali, ottenendo tre triangoli. Ricordando che in ogni triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due, possiamo scrivere:

$$AB < AC + BC \quad \text{Sommando membro a membro}$$

$$AC < AE + EC \quad \text{otteniamo}$$

$$EC < CD + DE$$

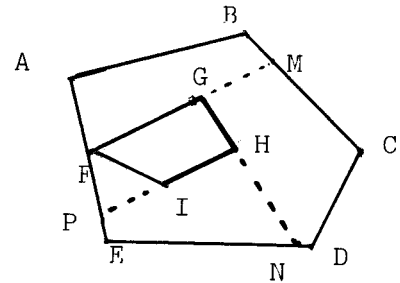
$$AB + \cancel{AC} + \cancel{EC} < \cancel{AC} + BC + AE + \cancel{EC} + CD + DE$$

$$AB < BC + CD + DE + AE \quad \text{c.v.d.}$$

Teorema: Il perimetro di un poligono convesso è minore del perimetro di un qualsiasi poligono che lo contenga.

Hp { Il poligono $FGHI$ è contenuto nel poligono $ABCDE$

Th { $FG + GH + HI + IF < AB + BC + CD + DE + EF$



Prolunghiamo i lati del poligono $FGHI$ fino ad incontrare i lati del poligono $ABCDE$. Ricordando il teorema precedente possiamo scrivere:

$$FM = FG + GM < FA + AB + BM \quad (1)$$

$$GN = GH + HN < GM + MC + CD + DN \quad (2)$$

$$HP = HI + IP < HN + NE + EP \quad (3)$$

$$IF < IP + FP \quad (4)$$

Sommando membro a membro le disuguaglianze (1), (2), (3), (4) otteniamo:

$$\cancel{FG + GM} + \cancel{GH + HN} + \cancel{HI + IP} + IF < \cancel{FA + AB + BM} + \cancel{GM + MC + CD + DN} + \cancel{HN + NE + EP} + \cancel{IP + FP}$$

$$FG + GH + HI + IF < AB + BC + CD + DE + EA$$

Teorema: Il perimetro di un poligono convesso è maggiore del perimetro di ogni poligono convesso in esso inscritto.

Poligoni regolari

Definizione: Un poligono si dice inscritto in una circonferenza quando tutti i suoi vertici sono punti della circonferenza.

Definizione: Un poligono si dice circoscritto ad una circonferenza quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.

Il centro della circonferenza inscritta in un poligono risulta ad uguale distanza da tutti i lati del poligono. Questa distanza che coincide col raggio della circonferenza inscritta prende il nome di **apotema** del poligono.

Osservazione: Non tutti i poligoni hanno l'apotema, ma solo quelli nei quali si può inscrivere una circonferenza.

I lati del poligono sono tutti equidistanti dal centro in quanto tutti i segmenti OH , OM , ON , OP ed OQ sono raggi della circonferenza inscritta nel poligono. Il centro O , per essere equidistante da tutti i lati, deve appartenere alla bisettrice di ogni angolo del poligono.

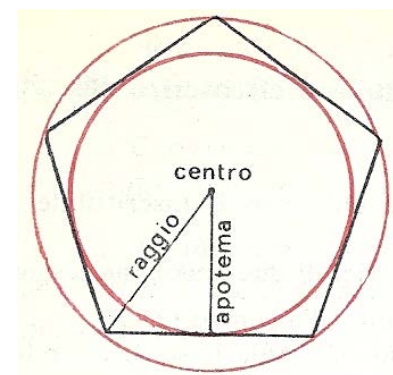
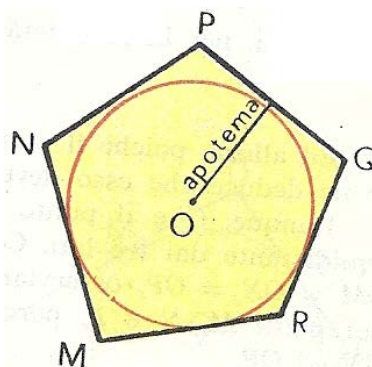
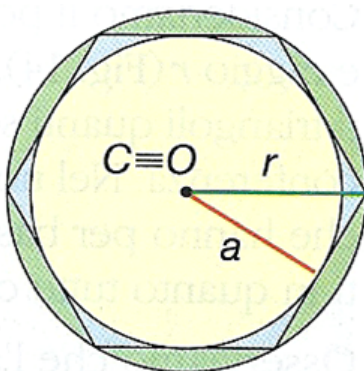
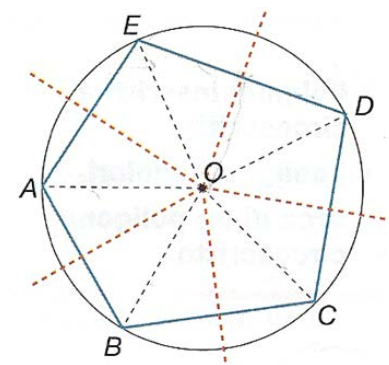
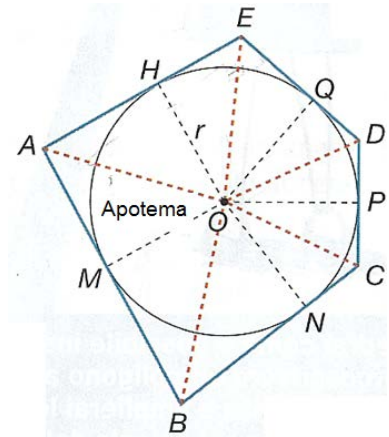
Teorema: Un poligono si può circoscrivere ad una circonferenza se le bisettrici di tutti i suoi angoli si incontrano in un unico punto che sarà il centro della circonferenza.

Definizione: Un **poligono** si dice **regolare** se ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti, ovvero se è equilatero ed equiangolo.

Corollario: Gli assi dei lati e le bisettrici degli angoli di un poligono regolare concorrono in un medesimo punto che, essendo equidistante da tutti i vertici, è il **centro** della circonferenza circoscritta.

Teorema: Ogni poligono regolare è **inscrittibile** in una circonferenza e **circoscrittibile** ad un'altra circonferenza. Queste due circonferenze hanno lo stesso centro che prende il nome di **centro** del poligono regolare.

Il raggio della circonferenza circoscritta si dice **raggio** del poligono. Il raggio della circonferenza inscritta è l'**apotema** del poligono.

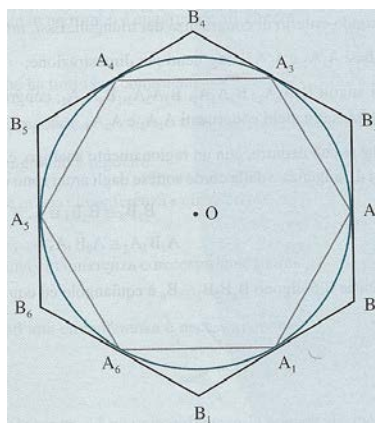


Concludendo possiamo affermare che:

- Il **raggio** di un poligono regolare è il segmento che unisce il centro del poligono con uno dei suoi vertici.
- L'**apotema** di un poligono regolare è la distanza del centro del poligono da uno dei suoi lati.

Esso è l'**altezza** di ciascuno dei triangoli isosceli, uguali fra loro, che si ottengono congiungendo il centro del poligono con i vertici.

Teorema: Se dividiamo una circonferenza in n parti uguali, il poligono inscritto avente per vertici i punti di divisione è regolare ed il poligono circoscritto avente come punti di tangenza i punti di divisione è regolare.



Teorema: Il lato di un esagono regolare è uguale al raggio della circonferenza ad esso circoscritta.

