Unità Didattica N°25

Quadrilateri particolari

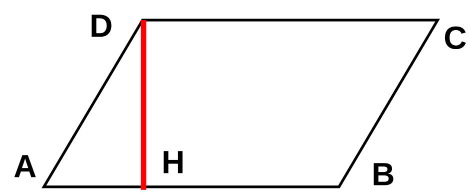
Definizione di quadrilatero

Il **quadrilatero** o *quadrangolo* è un poligono avente quattro lati. In un qualsiasi quadrilatero ogni lato ed ogni angolo ha il suo opposto. **La somma degli angoli interni è uguale a due angoli piatti**. Un quadrilatero ha due diagonali.

Definizione di parallelogrammo

Il parallelogrammo è un quadrilatero avente i lati opposti paralleli. Un lato qualsiasi del parallelogrammo può essere considerato come **base** del parallelogrammo e la **distanza tra la base ed il lato opposto** ad essa rappresenta l'**altezza** del parallelogrammo relativa alla base considerata.

Il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogrammo in quanto ha paralleli sia i lati AB e CD che i lati BD ed AD.
Se prendiamo come base il lato AB, allora l'altezza relativa a tale lato è il segmento DH.



Teoremi diretti sul parallelogrammo

In ogni parallelogrammo:

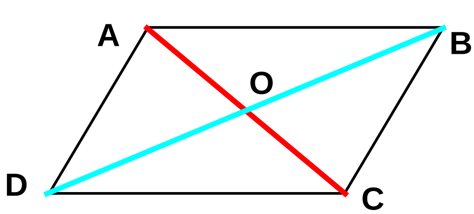
1) **ciascuna diagonale lo divide in due triangoli uguali**

2) **i lati opposti sono uguali**

3) **gli angoli opposti sono uguali**

4) *gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari*

5) **le diagonali si dimezzano scambievolmente, cioè hanno lo stesso punto medio.**



$$Hp\left\{ AB \parallel CD;\ AD \parallel BC \right.$$

$$Th\begin{cases} \mathbf{1)}\ \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{BCD};\quad \overset{\Delta}{ACD} \cong \overset{\Delta}{ABC} \\ \mathbf{2)}\ AD \cong BC;\quad AB \cong CD \\ \mathbf{3)}\ A\hat{B}C \cong A\hat{D}C;\quad B\hat{A}D \cong B\hat{C}D \\ \mathbf{4)}\ A\hat{D}C + B\hat{C}D \cong B\hat{C}D + A\hat{B}C \cong A\hat{B}C + B\hat{A}D \cong B\hat{A}D + A\hat{D}C = \pi \\ \mathbf{5)}\ AO \cong OC;\quad BO \cong DO \end{cases}$$

Dimostrazione

La diagonale AC divide il parallelogramma $ABCD$ in due triangoli ACD e ABC. Essi sono uguali per il secondo criterio di uguaglianza per avere:

1) AC in comune 2) $A\hat{C}D = C\hat{A}B$ perché angoli alterno-interni rispetto alle parallele AB e CD tagliate dalla trasversale AC 3) $C\hat{A}D = A\hat{C}B$ perché angoli alterno-interni rispetto alle parallele AD e BC tagliate dalla trasversale AC.

Essendo i triangoli uguali avranno uguali anche gli altri elementi. In particolare:

- $AD = BC$, $CD = AB$ (teorema N°2)
- $A\hat{D}C = A\hat{B}C$ (teorema N°3)

Inoltre: $\hat{A} = \hat{C}$; $\hat{B} = \hat{D}$; $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 2A.P.$ e quindi $\hat{A} + \hat{A} + \hat{B} + \hat{B} = 2A.P.$ $2\hat{A} + 2\hat{B} = 2A.P.$

$\hat{A} + \hat{B} = 1A.P.$ (teorema N°4)

Sia O il punto d'incontro delle due diagonali AC e BD. I triangoli AOB e COD sono uguali per il secondo criterio per avere: 1) $CD = AB$ 2) $O\hat{A}B = O\hat{C}D$ perché angoli alterno-interni rispetto alle rette parallele AB e CD tagliate dalla trasversale AC 3) $A\hat{B}O = O\hat{D}C$ perché angoli alterno-interni rispetto alle rette parallele AB e CD tagliate dalla trasversale BD.

Dall'uguaglianza dei due triangoli scaturiscono le seguenti uguaglianze:

$AO = OC$; $BO = OD$ (Teorema N°4)

Teoremi inversi sul parallelogrammo

Un quadrilatero convesso è un parallelogrammo se:

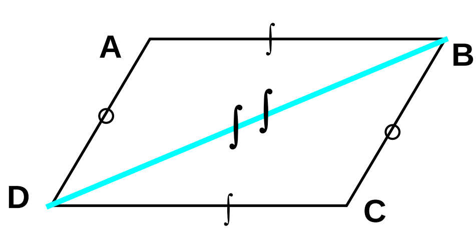
1) **ha i lati opposti a due a due uguali**

2) **ha gli angoli opposti a due a due uguali**

3) *le diagonali si dimezzano scambievolmente*

4) **ognuna delle due diagonali divide il quadrilatero in due triangoli uguali**.

Teorema N°1



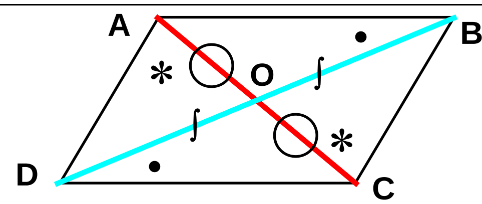
$Hp\{AB = CD; AD = BC$ $Th\{AB \parallel CD; AD \parallel BC$

La diagonale BD divide il quadrilatero $ABCD$ nei due triangoli ABD e BCD . Essi sono uguali per il terzo criterio per avere: 1) BD in comune 2) $AB = DC$ per Hp 3) $AD = BC$ per HP

Dall'uguaglianza dei due triangoli deduciamo che: a) $A\hat{B}D = B\hat{D}C$ e quindi $AB // CD$

b) $A\hat{D}B = B\hat{D}C$ e quindi $AD // BC$

Teorema N° 3

Hp $\begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} AB // DC \\ AD // BC \end{cases}$	

I triangoli AOB e DOC sono uguali per il primo criterio per avere:

1) $AO = OC$ per Hp 2) $OB = OD$ per Hp 3) $A\hat{O}B = D\hat{O}C$ perché angoli opposti al vertice.

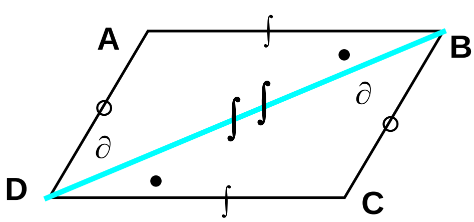
Dall'uguaglianza dei due triangoli deduciamo che: a) $A\hat{B}O = O\hat{D}C$ e quindi $AB // CD$

I triangoli AOD e BOC sono uguali per il primo criterio per avere:

1) $AO = OC$ per Hp 2) $OB = OD$ per Hp 3) $A\hat{O}D = B\hat{O}C$ perché angoli opposti al vertice.

Dall'uguaglianza dei due triangoli deduciamo che: a) $O\hat{A}D = O\hat{C}B$ e quindi $BC // AD$

Teorema: **Un quadrilatero convesso avente una coppia di lati opposti uguali e paralleli è un parallelogrammo**



Hp $\begin{cases} AB = CD \\ AB // CD \end{cases}$ Th $\{ AD // BC$

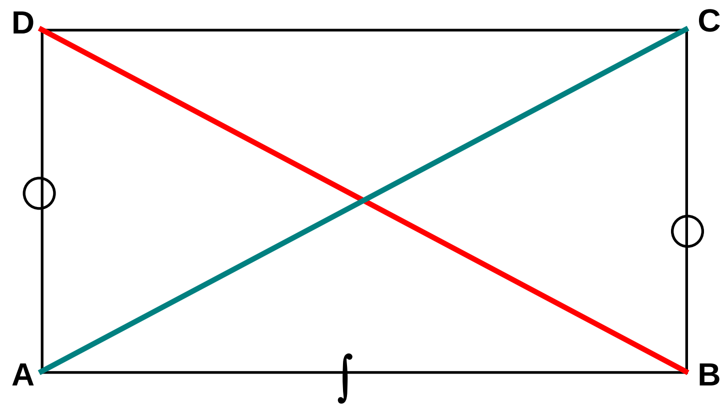
La diagonale BD divide il quadrilatero convesso nei due triangoli ABD e BCD.

Essi sono uguali per il primo criterio per avere: 1) BD in comune 2) $AB = CD$ per Hp 3) $A\hat{B}D = B\hat{D}C$ perché angoli alterno-interni rispetto alle parallele AB e CD tagliate dalla trasversale BD. Ne consegue che $A\hat{D}B = C\hat{B}D$ e questo ci consente di affermare che $AD // CB$.

Definizione di rettangolo

Dicesi **rettangolo** un parallelogrammo avente tutti gli angoli interni uguali e quindi retti.

Teoremi sul rettangolo



Per il rettangolo valgono tutti i teoremi dimostrati per il parallelogrammo più i due seguenti teoremi:

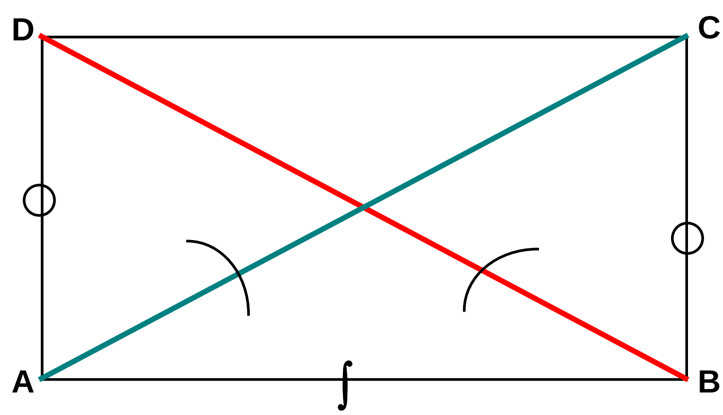
Teorema: **In ogni rettangolo le due diagonali sono uguali tra loro**.

$Hp\{ABCD$ rettangolo

$Th\{AC = BD$

I triangoli ABC e ABD sono uguali per il primo criterio per avere:

1) AB in comune 2) $AD = BC$ perché lati opposti di uno stesso parallelogramma 3) $A\hat{B}C = B\hat{A}D$ perché entrambi retti. Ne consegue l'uguaglianza: $AC = BD$.



Teorema inverso

Un parallelogrammo avente le diagonali uguali è un rettangolo.

$Hp\{ABCD$ parallelogramma; $AC = BD$ $Th\{ABCD$ rettangolo

I triangoli ABC e ABD sono uguali per avere:

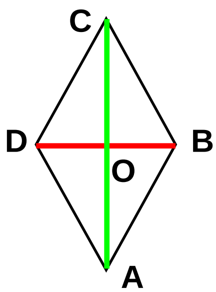
1) AB in comune 2) $AC = BD$ per Hp 3) $BC = AD$ perché lati opposti di un o stesso parallelogramma Quindi risulta: $B\hat{A}D = A\hat{B}C$, ma $B\hat{A}D + A\hat{B}C = 1$ angolo piatto per cui: $B\hat{A}D = A\hat{B}C = 1$ angolo retto ed il parallelogramma è un rettangolo.

Definizione di rombo

Dicesi **rombo** o *losanga* un parallelogrammo avente i quattro lati uguali.

Teoremi sul rombo

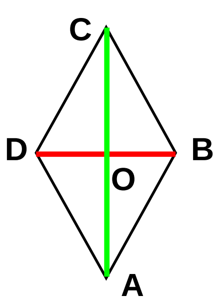
Teorema **Le diagonali di un qualsiasi rombo sono perpendicolari fra loro e bisettrici degli angoli interni.**



$$Hp\{ABCD\,rombo \quad Th\begin{cases} AC \perp BD \\ D\hat{C}A = A\hat{C}B \\ B\hat{D}C = B\hat{D}A \end{cases}$$

Nel rombo $ABCD$ tracciamo le diagonali AC e BD e sia O il loro punto comune.
Il triangolo BCD è isoscele per avere $BC = CD$ ed essendo $DO = OB$ possiamo affermare che CO, mediana rispetto al lato BD, è anche altezza ($CA \perp BD$) e bisettrice ($D\hat{C}O = A\hat{C}B$).

Teorema inverso: **Se in un parallelogrammo le diagonali sono perpendicolari tra loro o se una di esse biseca un angolo interno, il parallelogrammo è un rombo.**



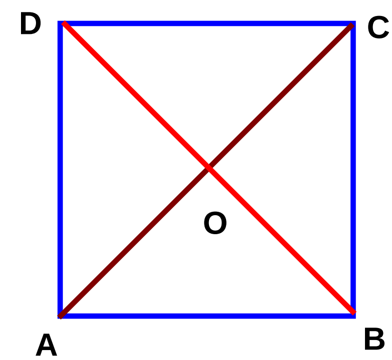
$$Hp\begin{cases} ABCD \text{ parallelogramma} \\ \textbf{1)}\ \ \mathrm{CA} \perp \mathrm{BD} \text{ oppure} \\ \textbf{2)}\ \mathrm{D\hat{C}A = A\hat{C}B} \end{cases} \qquad Th\{ABCD\ rombo$$

1) Se $ABCD$ è un parallelogramma risulta $DO = OB$. Ma $CO \perp BD$ per Hp, quindi essendo CO mediana ed altezza rispetto stesso lato BD, il triangolo BCD è isoscele sulla base BD. Quindi $BC = DC$. Il parallelogramma $ABCD$, avendo due lati consecutivi uguali, è un rombo.

2) Se risulta $D\hat{C}A = A\hat{C}B$ allora CO è mediana e bisettrice rispetto al lato BD e quindi anche altezza. Questo vuole dire che il triangolo BCD è isoscele sulla base DB e quindi $BC = DC$.

Il parallelogrammo $ABCD$, avendo due lati consecutivi uguali, è un rombo.

Quadrato



Definizione: Si chiama quadrato un quadrilatero avente tutti e quattro gli angoli interni retti e tutti e quattro i lati uguali. Quindi un quadrato è un quadrilatero che è contemporaneamente rettangolo e rombo. Infatti il quadrato è un rombo perché ha tutti i lati congruenti ed è un rettangolo perché ha tutti gli angoli retti.

Teorema: Le diagonali di un quadrato sono congruenti, perpendicolari fra di loro e bisettrici degli angoli opposti.

Il quadrato (1) ha le diagonali congruenti in quanto è un rettangolo (2) ha le **diagonali perpendicolari** fra di loro e **bisettrici degli angoli opposti**.

Teoremi inversi: Un parallelogramma è un quadrato se è verificata una delle seguenti condizioni: (1) le diagonali sono congruenti e perpendicolari (2) le diagonali sono congruenti ed una di esse è bisettrice di un angolo interno di un parallelogramma.

Definizione di trapezio

Dicesi trapezio ogni quadrilatero avente due lati opposti paralleli. I lati paralleli sono le **basi** del trapezio e la loro distanza si dice **altezza** . I lati non paralleli sono chiamati **lati obliqui**. Le due basi del trapezio sono sempre disuguali e per questo motivo una è detta **base maggiore** e l’altra **base minore**.

Definizione Si chiama **trapezio rettangolo** un trapezio avente uno dei due lati obliqui perpendicolare alle due basi. Da questa definizione deduciamo che un trapezio rettangolo ha due angoli retti e che il lato obliquo perpendicolare alle due basi è l’**altezza** del trapezio.

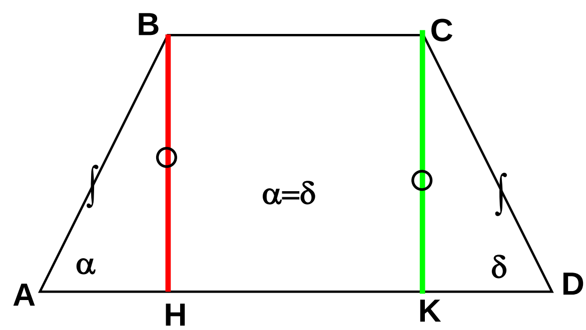
Definizione Si chiama **trapezio isoscele** un trapezio avente i lati obliqui uguali.

Teoremi sul trapezio

Teorema **Gli angoli adiacenti a ciascun lato obliquo di un trapezio sono supplementari**

Infatti , essi sono angoli coniugati interni rispetto a due rette parallele tagliate da una trasversale.

Teorema **In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna base sono uguali .**



Hp $ABCD \ trapezio \ isoscele \quad AB = CD$

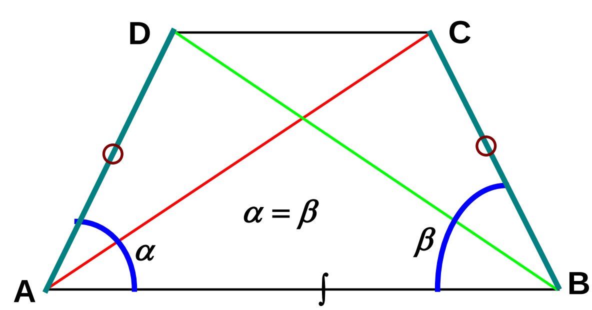
Th $B\hat{A}D = A\hat{D}C \qquad \alpha = \delta$

I triangoli rettangoli AHB e DCK sono uguali (quarto criterio di uguaglianza dei triangoli rettangoli) per avere: 1) $BH = CK$ in quanto altezze di uno stesso trapezio 2) $AB = DC$ in quanto lato obliqui di uno stesso trapezio isoscele 3) $A\hat{H}B = D\hat{K}C = 90°$. Ne consegue che: $H\hat{A}B = K\hat{D}C$

Teorema: **Un trapezio avente uguali gli angoli adiacenti ad una base è isoscele**.

Teorema

Le diagonali di un trapezio isoscele sono uguali.



Hp $ABCD \ trapezio \ isoscele \quad AB = CD$

Th $\{ AC = BD$

I triangoli ABC e ABD sono uguali per il primo criterio per avere:

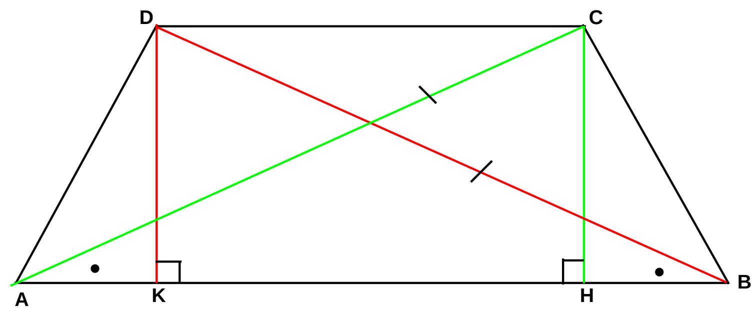
1) AB in comune 2) $BC = AD$ perché lati obliqui di uno stresso trapezio isoscele

3) $A\hat{B}C = B\hat{A}D$ perché angoli alla base di uno stesso trapezio isoscele. Ne consegue che: $AC = BD$

Teorema inverso: **Un trapezio avente le diagonali uguali è isoscele.**

$Hp\begin{cases} AB // CD \\ AC = BD \end{cases}$

$Th\{AD = BC$



$$\left.\begin{array}{l} AC = BD \ \ per \ \ Hp \\ CH = DK \text{ distanza tra 2 rette parallele} \\ A\hat{H}C = B\hat{K}D = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \ \overset{\Delta}{ACH} = \overset{\Delta}{BDK} \quad \Rightarrow \quad C\hat{A}B = D\hat{B}K$$

$$\left.\begin{array}{l} AC = BH \ \ per \ \ Hp \\ AB \quad in \ \ comune \\ C\hat{A}B = D\hat{B}K \ \text{ per precedente dimostrazione} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \overset{\Delta}{ACB} = \overset{\Delta}{ABD} \quad \Rightarrow \quad BC = AD$$