# Unità Didattica N°26

# Fascio di rette parallele e luoghi geometrici

## Definizione di fascio di rette parallele

**Dicesi fascio di rette parallele l'insieme di tutte le rette di uno stesso piano fra loro parallele.**

## Primo teorema di Talete

Se un fascio di rette parallele è tagliato da una trasversale allora:

1) a segmenti congruenti su di una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra

2) alla somma di due segmenti dell'una corrisponde sull'altra la somma dei segmenti corrispondenti

3) a segmenti disuguali sulla prima corrispondono segmenti disuguali e dello stesso senso sull'altra

$$\text{Hp}\begin{cases} a \parallel b \parallel c \parallel d \parallel e \\ 1) AB \cong CD \\ 2) AC \cong AB + BC \\ 3) AB < CE \end{cases} \qquad \text{Th}\begin{cases} 1) A'B' \cong C'D' \\ 2) A'C' \cong A'B' + B'C' \\ 3) A'B' < C'E' \end{cases}$$

### *Dimostrazione*

1) Sia dato il fascio di rette parallele a, b, c, d, e tagliate dalle trasversali r ed s. Indichiamo con A, B, C, D, E ed $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ le intersezioni delle due trasversali r ed s col fascio di rette parallele. Vogliamo dimostrare che $AB \cong CD \quad \Rightarrow \quad A'B' \cong C'D'$

Conduciamo dai punti A e C le rette parallele alla trasversale s e siano $B''$ e $D''$ le rispettive intersezioni con le rette b e d.

I triangoli $ABB''$ e $CDD''$ sono congruenti per il secondo criterio per avere:

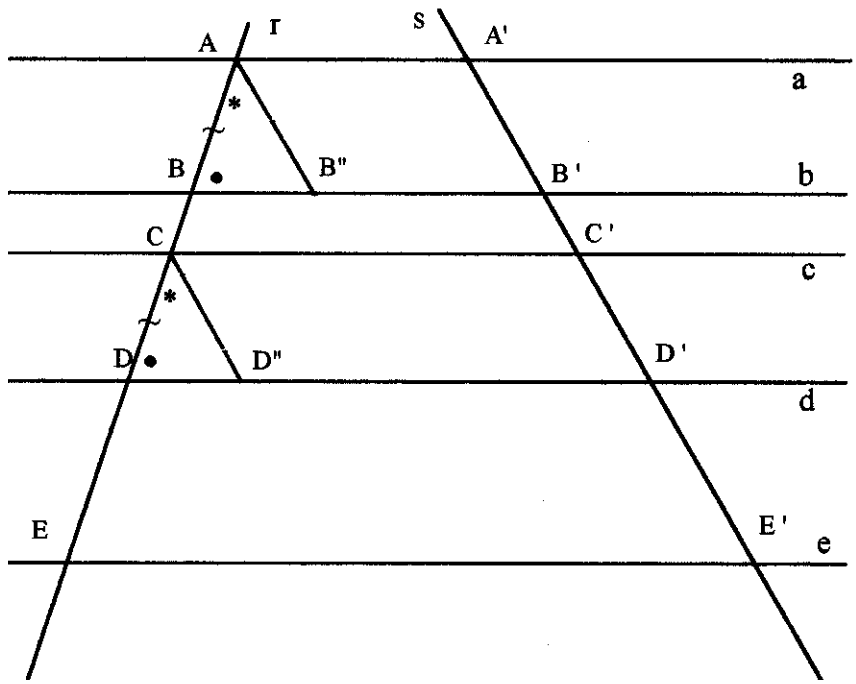
1) $AB \cong CD$ per Hp 2) $B\hat{A}B''$ perché angoli corrispondenti rispetto alle rette parallele $AB''$ e $CD''$ tagliate dalla trasversale r. $AB''$ e $CD''$ sono tra loro parallele in quanto entrambe parallele alla trasversale s. 3) $A\hat{B}B'' \cong C\hat{D}D''$ in quanto angoli corrispondenti rispetto alle parallele b e d tagliate dalla trasversale t. Dalla Congruenza dei due triangoli deduciamo che $AB'' \cong CD''$. Ma $A'B' \cong AB''$ in quanto lati opposti dello stesso parallelogramma $AA'B'B''$. $C'D' \cong CD''$ in quanto lati opposti dello stesso parallelogramma $CC'D'D''$. Per la proprietà transitiva della congruenza abbiamo: $A'B' \cong C'D'$.

2) Si prendano sulla trasversale r due segmenti consecutivi qualsiasi, ad esempio $AB$ e $BC$ e si considerino sulla trasversale s i segmenti corrispondenti $A'B'$ e $B'C'$ che sono anch'essi consecutivi.

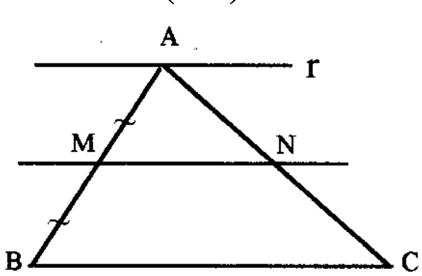
Alla somma dei segmenti $AB$ e $BC$ corrisponde sulla trasversale s il segmento $A'C'$ che è proprio la somma dei segmenti $A'B'$ e $B'C'$.

3) Supposto $AB < CE$ vogliamo dimostrare che $A'B' < C'E'$.

Sul segmento $CE$ considero il segmento $CD = AB$. La retta del fascio passante per il punto D incontra la trasversale s nel punto $D'$. Risulta $C'D' < C'E'$. Avendo dimostrato che $C'D' = A'B'$ deduciamo che $A'B' < C'E'$.



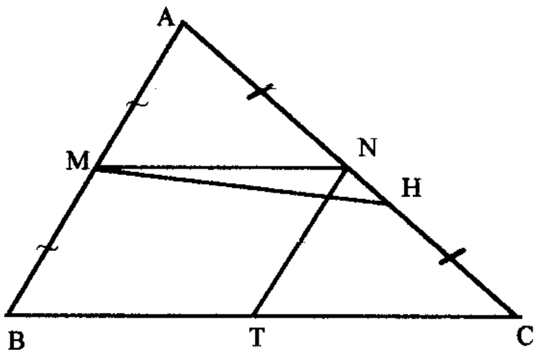

Corollario: In un triangolo qualsiasi la parallela condotta dal punto medio M di un lato ( $AB$ ) ad un altro lato ( $BC$ ) dimezza il lato rimanente ( $AC$ ).




$$\text{Hp} \begin{cases} ABC \text{ triangolo} \\ AM \cong MB \\ MN \,//\, BC \end{cases} \qquad \text{Th} \{ AN \cong NC$$

La retta passante per il punto medio M del lato $AB$ e parallela al lato $BC$ incontra il terzo lato $AC$ nel punto N. Si immagini di tracciare per il punto A la retta r parallela al lato $BC$. R, $MN$, $BC$ individuano un fascio di rette parallele tagliate dalle trasversali $AB$ ed $AC$. Per il teorema di Talete abbiamo $AN \cong NC$ in quanto per ipotesi è $AM \cong MB$.

Teorema: Il segmento congiungente i punti medi di due lati di un triangolo qualsiasi è parallelo al terzo lato ed uguale alla sua metà.



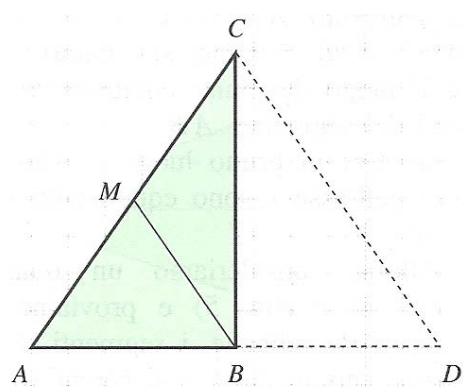

$$\text{Hp}\begin{cases} AM \cong MB \\ AN \cong NC \end{cases} \qquad \text{Th}\begin{cases} MN \,//\, BC \\ MN = \dfrac{BC}{2} \end{cases}$$

Dimostro questo teorema per assurdo supponendo che $MN$ non sia parallelo al lato $BC$. Allora per M posso condurre la parallela al lato $BC$. Essa incontra il lato $AC$ nel punto H. Per il corollario precedente avrò $AH \cong HC$ cioè H è il punto medio del segmento $AC$. Esso deve coincidere con N in quanto il punto medio di un segmento è unico. Quindi $MH$ coincide con $MN$ che è parallelo a $BC$. La parallela ad $AB$ condotta per il punto N incontra $BC$ nel punto T. $MNTB$ è un parallelogramma per avere i lati opposti paralleli. Risulta pertanto: $MN \cong BT$. Inoltre avremo $TC \cong BT$ perché $AN \cong NC$ ed $NT \parallel AB$. Per la proprietà transitiva della congruenza possiamo scrivere: $MN \cong BT \cong TC$ e quindi $MN \cong \dfrac{BC}{2}$.

## La mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo

Teorema: **In ogni triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è uguale alla metà dell'ipotenusa.**

$$Hp:\left\{ A\hat{B}C = 90° \quad AM = MC \right. \qquad Th:\left\{ BM = \frac{1}{2}AC \right.$$




Sia $BM$ l'altezza relativa all'ipotenusa $AC$ del triangolo $ABC$ rettangolo in A. Prolungo il segmento $AB$ dalla parte di B di un segmento $AB = BD$. Ottengo il triangolo $ADC$ isoscele sulla base $AD$.

Infatti, se due segmenti obliqui condotti da uno stesso punto C ad una retta $AD$ hanno proiezioni ortogonali uguali, allora essi sono uguali. Questo ci consente di scrivere: $AC = DC$. Ricordando che il segmento congiungente i punti medi di due lati di un triangolo qualsiasi è parallelo al terzo lato ed uguale alla sua metà possiamo scrivere:

$$BM = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}AC$$

## Alcuni luoghi geometrici

**Definizione di luogo geometrico** Si chiama luogo geometrico una figura costituita da **tutti** e **soli** i punti del piano che godono di una stessa proprietà.

Questo significa che affinché una figura sia un luogo geometrico è necessario che siano verificate le due seguenti condizioni:

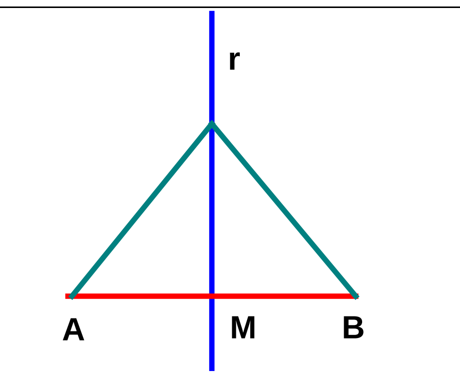
1) tutti i punti della figura godono di una certa proprietà

2) ogni punto che gode di quella proprietà appartiene a quella figura.

**Teorema**: **L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento**

$Hp:\{r \perp AB \ ; \ AM = MB \qquad Th:\{AP = BP$

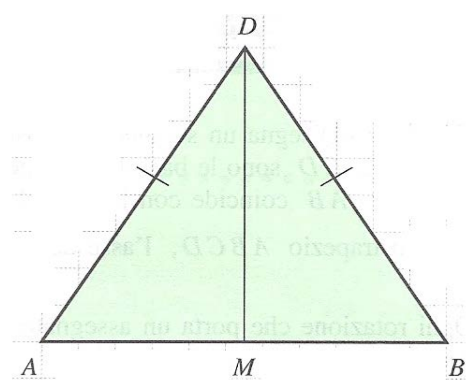
Noi sappiamo che l'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio. Voglio dimostrare che ogni punto dell'asse è equidistante dagli estremi del segmento. Sia $r$ l'asse del segmento $AB$ e sia $P$ un suo generico punto. I segmenti $AP$ e $BP$ sono uguali in quanto hanno proiezioni ortogonali uguali. Infatti sappiamo per ipotesi che $AM = MB$ e $r \perp AB$




Adesso voglio dimostrare che se $D$ è un generico punto del piano equidistante dagli estremi $A$ e $B$ del segmento $AB$ ( $AD = DB$ ) allora esso appartiene all'asse del segmento $AB$ .

$Hp:\{DA = DB \ \ AM = MB \qquad Th:\{DM \perp AB$

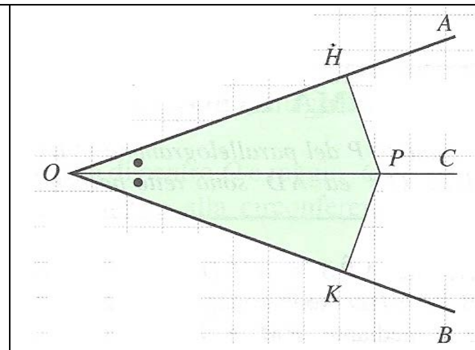
Per dimostrare che il punto D giace sull'asse del segmento $AB$, congiungo Il punto D col punto medio M del segmento $AB$ . $DM$ è la mediana relativa alla base $AB$ del triangolo isoscele $ABD$ e, quindi, è anche altezza relativa alla base $AB$ . Questo ci dice che la retta $DM$ è asse del segmento $AB$ . Infatti la retta $DM$ passa per il punto medio M del segmento $AB$ ed è perpendicolare ad esso.




**Teorema**: **La bisettrice di un angolo convesso è il luogo geometrico dei punti dell'angolo equidistanti dai due lati dell'angolo.**

$Hp:\left\{ P\hat{O}H = P\hat{O}P \; ; \; PH \perp AO \;\; PK \perp BO \right. \qquad Th:\left\{ PH = PK \right.$

Sia $r$ la bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$ e $P$ un suo generico punto. Voglio dimostrare che il punto $P$ è equidistante dei lati $AO$ e $BO$ dell'angolo $A\hat{O}B$, cioè voglio dimostrare che $PH = PK$ con $PH \perp AO$ e $PK \perp BO$. Infatti, i due triangoli rettangoli $PHO$ e $PKO$ sono uguali per avere $OP$ in comune e gli angoli acuti $P\hat{O}H$ e $P\hat{O}K$ uguali per ipotesi.

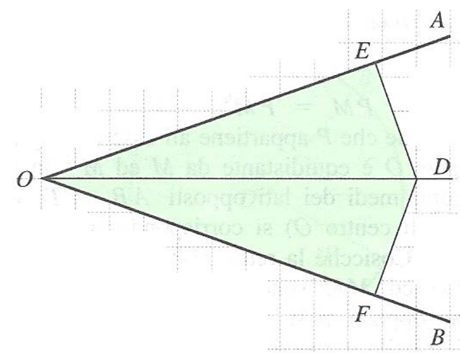



Ne consegue la seguente uguaglianza $PH = PK$

Adesso debbo dimostrare che se $D$ è un generico punto dell'angolo convesso $A\hat{O}B$ equidistante dai lati $AO$ e $BO$ allora la semiretta $OD$ è la bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$.

$Hp:\left\{ DE = DF \;\;\; DE \perp AO \;\; DF \perp BO \right. \qquad Th:\left\{ D\hat{O}E = D\hat{O}F \right.$

I triangoli rettangoli $DEO$ e $DFO$ sono uguali per avere in comune l'ipotenusa $DO$ ed uguali (per ipotesi) i cateti $DE = DF$. Ne consegue che: $D\hat{O}E = D\hat{O}F$ e, quindi, $OD$ è la bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$.




Corollario: **Il luogo dei punti di un piano equidistanti da due rette che si incontrano è costituito dalle bisettrici degli angoli da esse formati.**