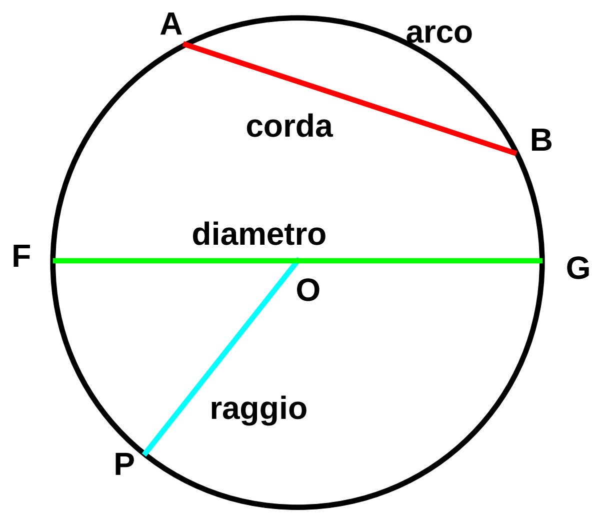
Unità Didattica N°27

Circonferenza e cerchio

Definizioni e proprietà



La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro.

Raggio di una circonferenza è il segmento che unisce un punto qualsiasi della circonferenza con il centro.

La corda è un segmento che unisce due punti della circonferenza.

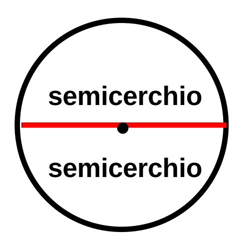
Diametro è una qualsiasi corda passante per il centro della circonferenza. Ogni diametro è uguale al doppio del raggio.

L'arco è una parte di circonferenza delimitata da due suoi punti. Un qualsiasi diametro divide la circonferenza in due parti uguali ciascuna delle quali dicesi semicirconferenza.

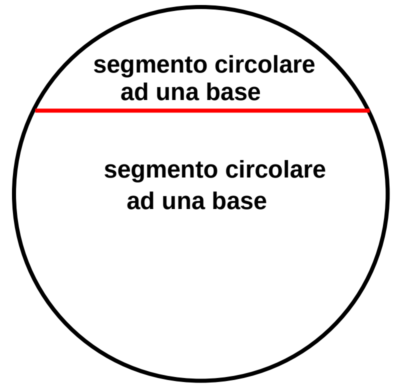
Il cerchio è il luogo geometrico dei punti del piano le cui distanze dal centro sono minori o uguali al raggio. Diversamente possiamo definire il cerchio come la parte di piano delimitata dalla circonferenza.

Osservazione: Mentre la circonferenza è una linea il cerchio è una superficie, cioè una parte di piano.

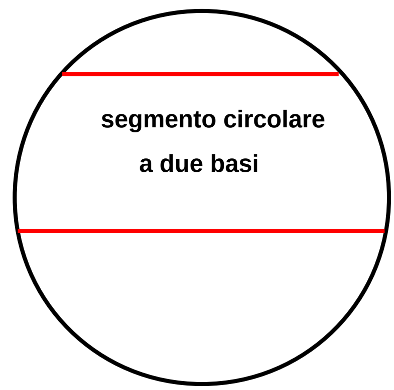
Un qualsiasi diametro divide il cerchio in due parti uguali, ciascuna delle quali prende il nome di semicerchio.



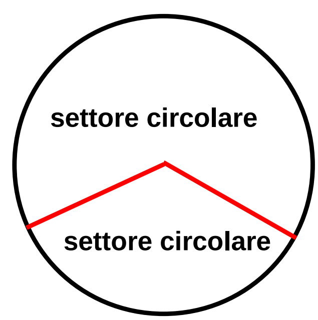
Dicesi segmento circolare ad una base **la parte di cerchio delimitata da un arco e dalla corda sottesa.**



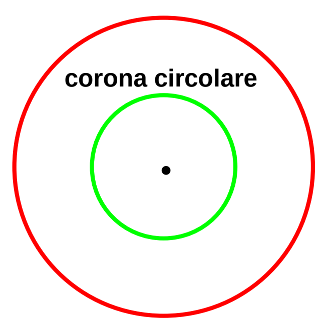
Dicesi segmento circolare a due basi **la parte di cerchio delimitata da due corde parallele e dagli archi aventi gli estremi sulle corde stesse.**



Dicesi settore circolare **la parte di cerchio delimitata da un arco e da due raggi passanti per gli estremi dell'arco.**



Due circonferenze si dicono concentriche **se hanno lo stesso centro. La** corona circolare **è la parte di piano delimitata da due circonferenze concentriche.**

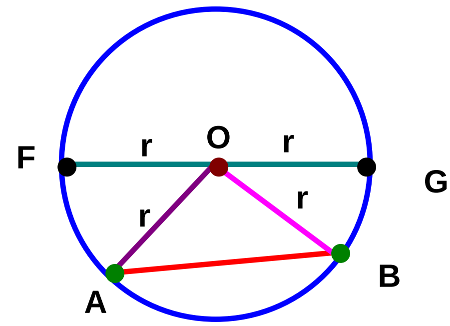


Due o più circonferenze sono uguali se hanno lo stesso raggio.

Un punto del piano dicesi interno **(**esterno**) alla circonferenza se la sua distanza dal centro è minore (maggiore) del raggio.**

Teorema: Una corda è sempre minore del diametro.

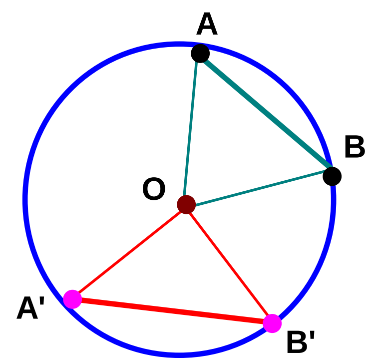
Tenendo presente che in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due possiamo scrivere:



$AB < OA + OB$ $\quad AB < OF + OG$ $\quad AB < FG$ $\quad OA \cong OF$

$OB \cong OG$

Teorema: In circonferenze uguali (ed in particolare nella stessa circonferenza) archi uguali sottendono corde uguali, e viceversa.



$Hp\{\widehat{AB} \cong \widehat{A'B'}$ $\quad Th\{ AB \cong A'B'$

$\widehat{AB} \cong \widehat{A'B'} \quad \Rightarrow \quad A\hat{O}B \cong A'\hat{O}B'$

I triangoli AOB ed $A'OB'$ sono uguali per avere:

I triangoli AOB ed $A'OB'$ sono uguali per avere:

1) $A\hat{O}B = A'\hat{O}B$ **per precedente dimostrazione**

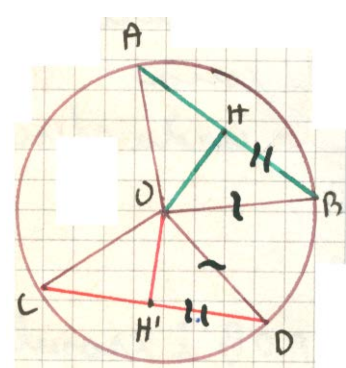
2) $AO = A'O$, $BO = B'O$ **in quanto raggi di una stessa circonferenza**

Ne deduco che: $AB = A'B'$

Teorema: Corde congruenti di una stessa circonferenza sono equidistanti dal centro, e viceversa.

$Hp\{AB \cong CD;\ OH \perp AB;\ OH' \perp CD$

$Th\{ OH \cong OH'$



I triangoli AOB e CDO sono entrambi isosceli. Quindi $HB = H'D$ perché metà di segmenti uguali. I triangoli OHB e $OH'D$ sono uguali per avere:

1) $OB = OD$ in quanto raggi di una stessa circonferenza.

2) $HB \cong H'D$ per precedente dimostrazione

3) $O\hat{H}B \cong O\hat{H}'D$ perché entrambi retti+

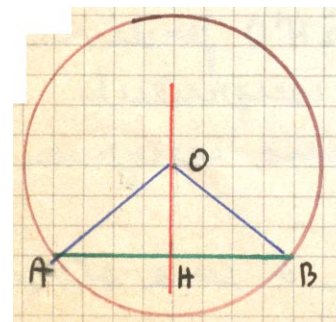
Ne deduco che: $OH \cong OH'$

Teorema: **L'asse di una qualsiasi corda di una circonferenza passa per il centro .**

Infatti il centro O della circonferenza è equidistante dagli estremi della corda e quindi appartiene all'asse della corda.

Teorema: **Nella circonferenza la perpendicolare condotta dal centro ad una qualsiasi corda dimezza la corda stessa.**

$Hp\{OH \perp AB \quad Th\{\ AH \cong HB$



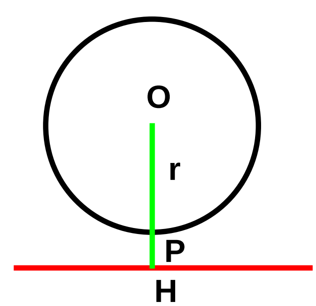
Il triangolo AOB è isoscele sulla base AB. Quindi l'altezza OH è anche mediana, cioè: $AH \cong HB$

Teorema: **La congiungente il punto medio di una generica corda col centro è perpendicolare alla corda. (Vedere figura precedente)**

Hp : $\{\ AH = HB$ **Th :** $\{\ OH \perp AB$

Il triangolo AOB **è isoscele sulla base** AB **. Quindi la mediana** OH **è anche altezza , cioè** $OH \perp AB$

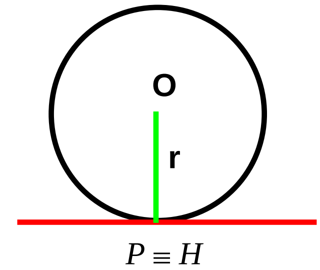
Mutua posizione di una retta e di una circonferenza



Una retta si dice esterna ad una circonferenza **se non ha punti in comune con essa. In questo caso la distanza** OH **del centro della circonferenza dalla retta è maggiore del raggio :** $OH > r$ **.**

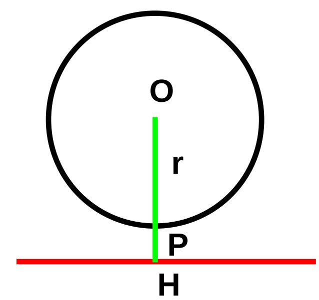
Una retta si dice tangente ad una circonferenza **se ha in comune con essa un solo punto (detto punto di tangenza o punto di contatto) .**

In questo caso la distanza OH **del centro della circonferenza dalla retta è uguale del raggio:** $OH = r$ **.**



Una retta si dice secante rispetto ad una circonferenza **se ha in comune con essa due punti .**

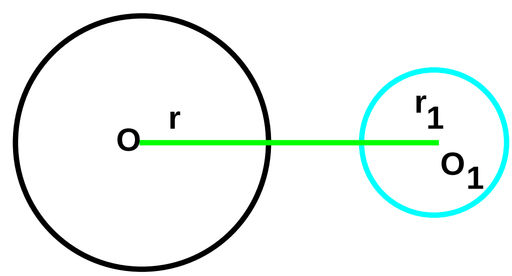
In questo caso la distanza OH **del centro della circonferenza dalla retta è minore del raggio :** $OH < r$ **.**



Mutua posizione di due circonferenze

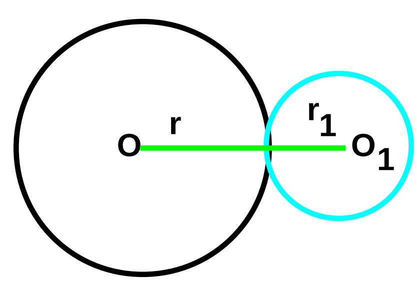
Due circonferenze si dicono mutuamente esterne **se la distanza dei loro centri è maggiore della somma dei loro raggi .**

$$OO_1 > r + r_1$$

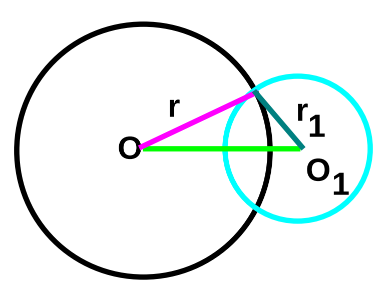


Due circonferenze si dicono tangenti esternamente **se la distanza dei loro centri è uguale della somma dei loro raggi .**

$$OO_1 = r + r_1$$

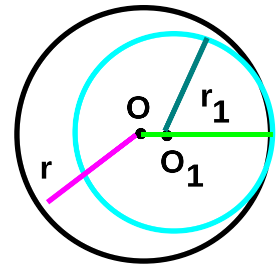


Due circonferenze si dicono secanti **se la distanza dei loro centri è minore della somma dei loro raggi e maggiore della loro differenza.** $r - r_1 < OO_1 < r + r_1$



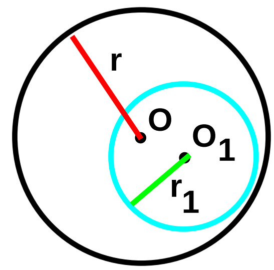
Due circonferenze si dicono tangenti internamente **se la distanza dei loro centri è uguale alla differenza dei loro raggi .**

$$OO_1 = r - r_1$$



Due circonferenze sono una interna all'altra se la distanza dei loro centri è minore della differenza dei loro raggi.

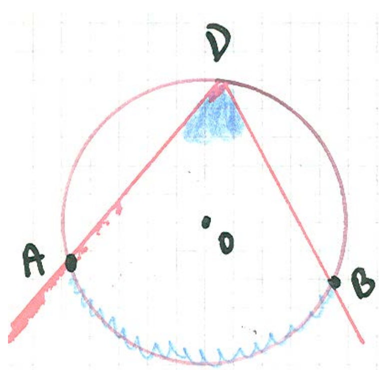
$$OO_1 < r - r_1$$



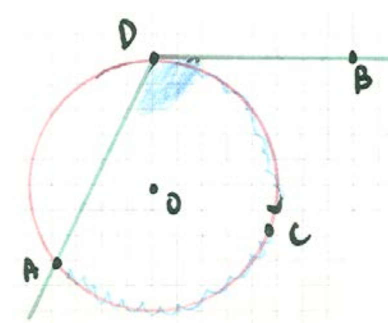
Angoli al centro ed alla circonferenza

Un angolo avente il vertice coincidente col centro della circonferenza dicesi angolo al centro.

Un angolo avente il vertice sulla circonferenza dicesi angolo alla circonferenza. Un angolo alla circonferenza può avere i lati: 1) entrambi secanti 2) uno secante e l'altro tangente 3) entrambi tangenti.



$A\hat{D}B$ **= angolo alla circonferenza che insiste sull'arco** $\overset{\frown}{AB}$



$A\hat{D}B$ **= angolo alla circonferenza che insiste sull'arco** $\overset{\frown}{ACD}$

Teorema**:** Ogni angolo alla circonferenza è uguale alla metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco.

Si possono presentare diversi casi:

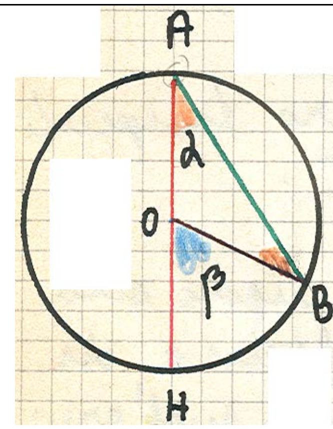
1) I due lati dell'angolo alla circonferenza sono secanti ed uno di essi è diametro.

$Th\left\{ B\hat{O}H = 2H\hat{A}B \right.$ cioè: $\beta = 2\alpha$ cioè $\alpha = \frac{1}{2}\beta$

$AO = OB \quad \Rightarrow \quad O\hat{A}B = O\hat{B}A = \alpha$

Per il teorema dell'angolo esterno abbiamo:

$H\hat{O}B = \beta = O\hat{A}B + O\hat{B}A \qquad \beta = \alpha + \alpha = 2\alpha \qquad \alpha = \frac{1}{2}\beta$



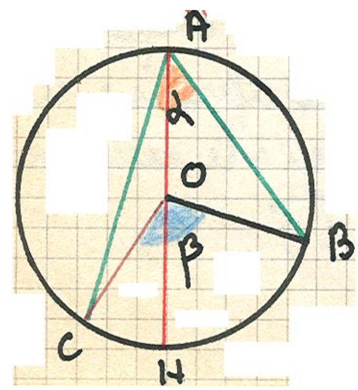
2) I due lati dell'angolo alla circonferenza sono secanti e l'angolo contiene il centro.

$Th\left\{ \alpha = \frac{1}{2}\beta \right.$

Per il caso 1) posso scrivere:

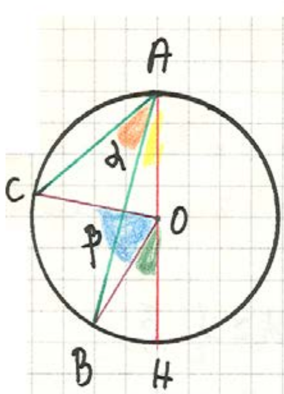
$$\begin{array}{rcl} H\hat{O}B & = & 2H\hat{A}B \\ H\hat{O}C & = & 2H\hat{A}C \\ \hline H\hat{O}B + H\hat{O}C & = & 2\left(H\hat{A}B + H\hat{A}C\right) \end{array}$$

sommo membro a membro



$C\hat{O}B = 2 \cdot C\hat{A}B \qquad \beta = 2\alpha$ cioè $\alpha = \frac{1}{2}\beta$

3) I due lati dell'angolo alla circonferenza sono secanti e l'angolo non contiene il centro.



$Th\left\{ \alpha = \frac{1}{2}\beta \right.$

Condotto il diametro AH ed applicando il caso 1) posso scrivere:

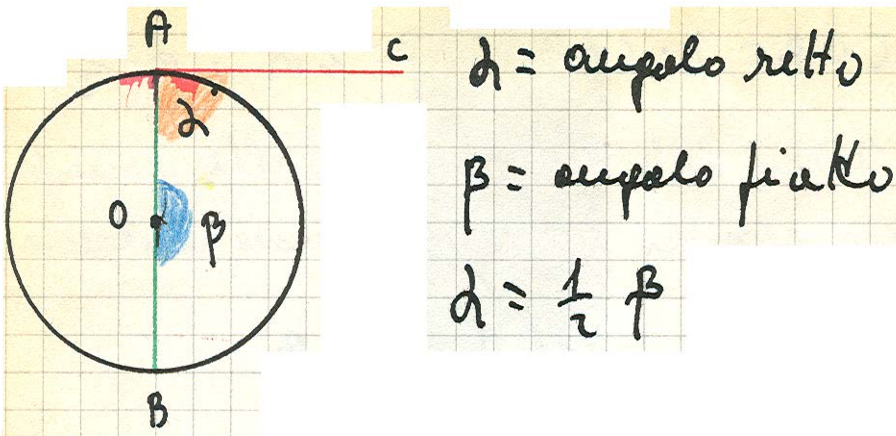
$$\begin{array}{rcl} C\hat{O}H & = & 2C\hat{A}H \\ B\hat{O}H & = & 2B\hat{A}H \\ \hline C\hat{O}H - B\hat{O}H & = & 2\left(C\hat{A}H - B\hat{A}H\right) \end{array}$$

sottraggo membro a membro

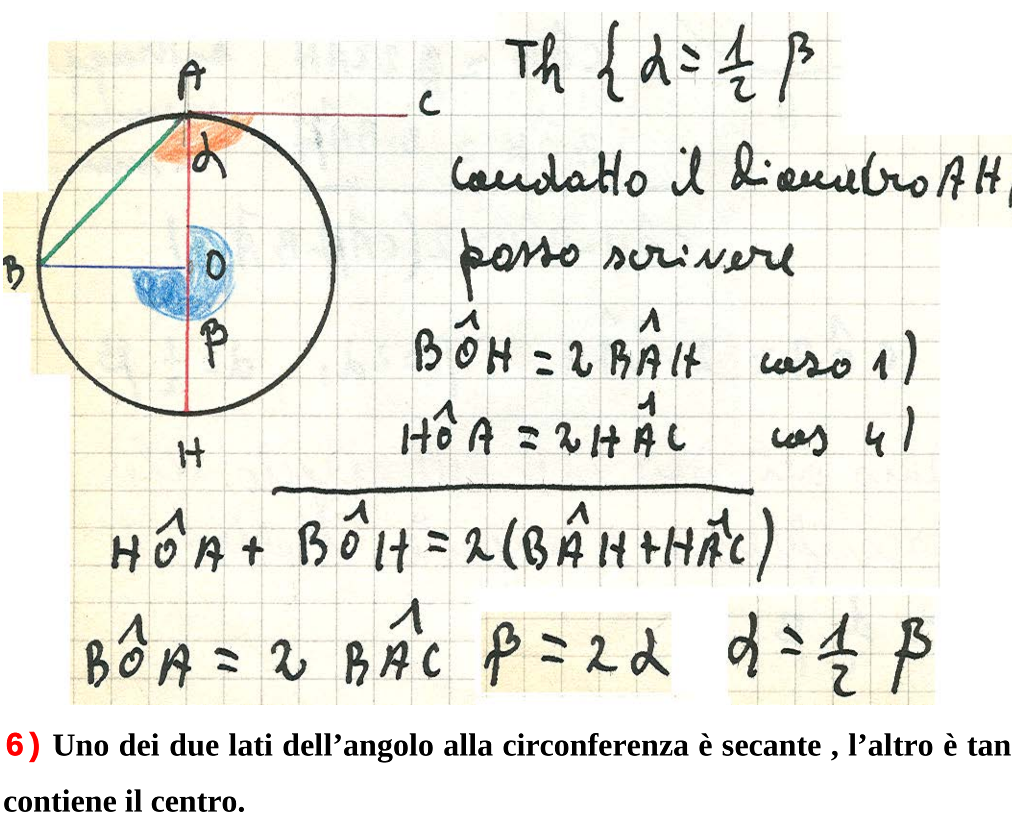
$C\hat{O}B = 2 \cdot C\hat{A}B \qquad \beta = 2\alpha \quad \text{cioè} \quad \alpha = \frac{1}{2}\beta$

4) Uno dei due lati dell'angolo alla circonferenza è tangente , l'altro è un diametro.

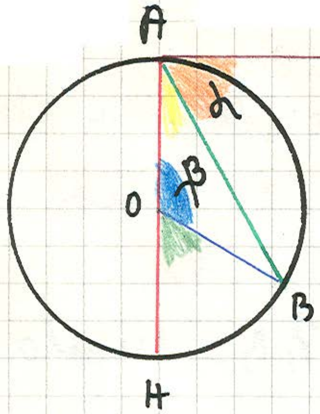
Th: $\left\{ \alpha = \frac{1}{2}\beta \right.$



5) Uno dei due lati dell'angolo alla circonferenza è secante, l'altro è tangente e l'angolo contiene il centro.



6) Uno dei due lati dell'angolo alla circonferenza è secante , l'altro è tangente e l'angolo non contiene il centro.



$Th\left\{ \alpha = \frac{1}{2}\beta \right.$

Condotto il diametro AH posso scrivere:

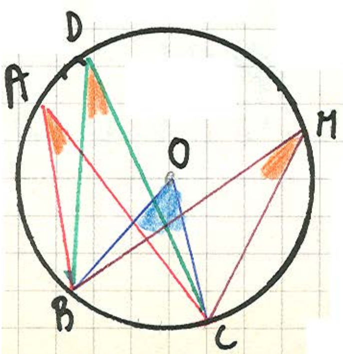
$H\hat{O}A = 2H\hat{A}C$ caso 4)

$H\hat{O}B = 2H\hat{A}B$ caso 1)

$H\hat{O}A - H\hat{O}B = 2(H\hat{A}C - H\hat{A}B)$

$B\hat{O}A = 2B\hat{A}C \qquad \beta = 2\alpha \ ; \ \alpha = \frac{1}{2}\beta$

Corollario N° 1: **Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono uguali.**



$Th\left\{ B\hat{A}C \cong B\hat{D}C \cong B\hat{M}C \right.$

Gli angoli alla circonferenza $B\hat{A}C$, $B\hat{D}C$, $B\hat{M}C$ sono fra loro congruenti

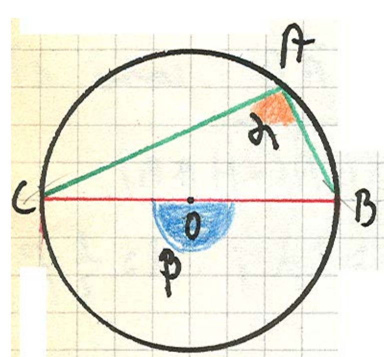
In quanto risultano uguali alla metà del corrispondente angolo al centro $B\hat{O}C$.

Corollario N° 2: **Ogni angolo alla circonferenza che insiste (inscritto) in una semicirconferenza è retto.**

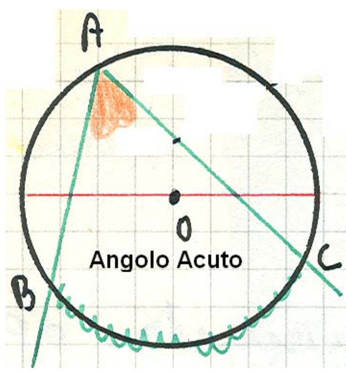
$Th\left\{ C\hat{A}B = \text{angolo retto} \right.$

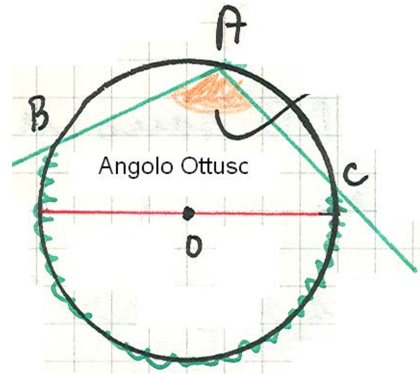
$C\hat{O}B = \text{angolo piatto}$

$C\hat{A}B = \frac{1}{2}C\hat{O}B = \frac{1}{2}\text{angolo piatto} = \text{angolo retto}$



Corollario N° 3: Un angolo alla circonferenza che insiste su un arco minore (maggiore) di una semicirconferenza è acuto (ottuso)

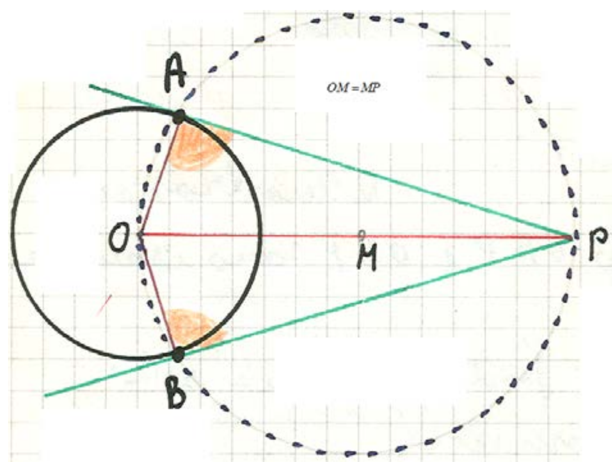




Corollario N° 4: Angoli alla circonferenza che insistono su archi uguali sono uguali.

Problema: Costruire le rette tangenti ad una circonferenza di centro O condotte da un punto P esterno ad essa.

La circonferenza di diametro OP incontra la circonferenza data nei punti A e B. Dico che le rette PA e PB sono le tangenti richieste.



Teorema: I segmenti di tangenti condotte da un punto P esterno ad una circonferenza sono uguali e l'angolo formato dalle due tangenti ha per bisettrice la retta che congiunge il punto P col centro O della circonferenza considerata.

Dimostrazione

I triangoli OAP e OBP sono congruenti per avere.

1) $O\hat{A}P = O\hat{B}P$ perché entrambi retti 2) OP in comune 3) $OA = OB$ perché raggi di una stessa circonferenza.

Ne deduco che: $AP = BP$ $\quad A\hat{P}O = B\hat{P}O$