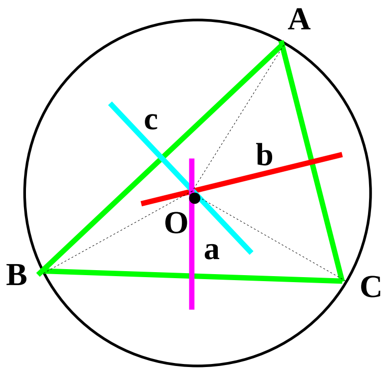
Unità Didattica N°28
Punti notevoli di un triangolo

Punti notevoli di un triangolo

Teorema: **Gli assi dei lati di un triangolo qualsiasi passano per uno stesso punto O equidistante dai tre vertici. Il punto O è detto** circocentro **in quanto è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo.**



$$Hp: \begin{cases} a = asse\ del\ lato\ BC \\ b = asse\ del\ lato\ AC \\ c = asse\ del\ lato\ AB \end{cases}$$

$$Th: \{ a \cap b \cap c = O$$

Dimostrazione: **Sia O il punto comune agli assi a e b. Voglio dimostrare che** $O \in c$.

$$\left.\begin{array}{l} a = asse\ di\ BC \Rightarrow BO \cong CO \\ b = asse\ di\ AC \Rightarrow AO \cong CO \end{array}\right\} \Rightarrow BO \cong AO \Rightarrow O \in c$$

$AO \cong BO \cong CO \Rightarrow$ O **equidistante dai vertici del triangolo . La circonferenza di centro O e raggio** OA **passa per i tre vertici del triangolo .**

Osservazione

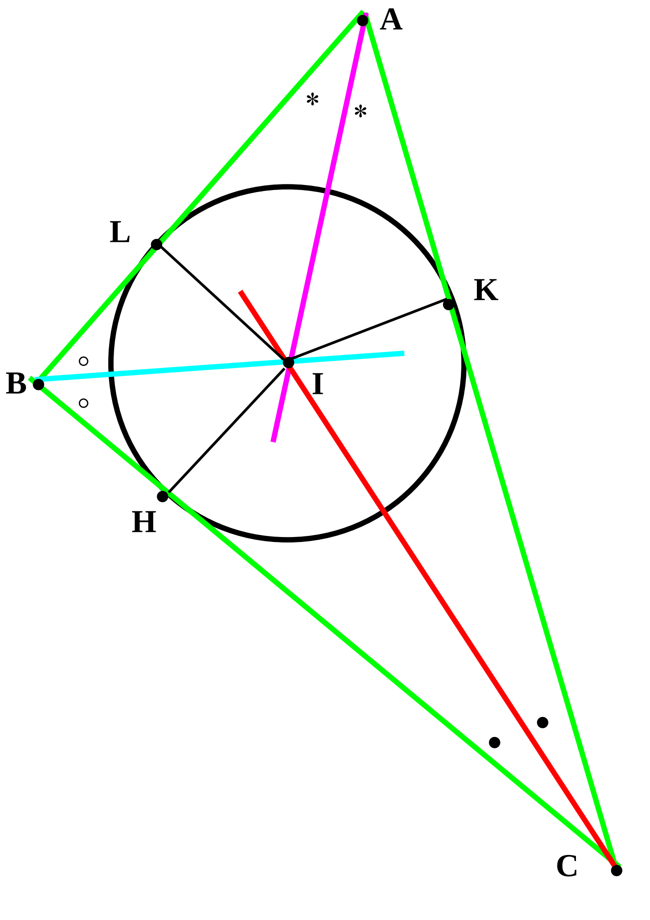
- **Dicesi** asse di un segmento **la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio.**
- **L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento.**

Teorema: **Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo passano per uno stesso punto I equidistante dai tre lati. Il punto** $\mathcal{I}$ **è detto** incentro **in quanto è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo.**

Dimostrazione: Sia I l'intersezione delle bisettrici a e b . Voglio dimostrare che $I \in c$. Infatti :

$$\left.\begin{array}{l} a = bisettrice\ di\ \hat{A} \Rightarrow IL \cong IK \\ b = bisettrice\ di\ \hat{B} \Rightarrow IH \cong IL \end{array}\right\} \Rightarrow IH \cong IK \Rightarrow I \in c$$

$IL \cong IK \cong IH \Rightarrow$ $\mathcal{I}$ **equidistante dai lati del triangolo. La circonferenza di centro I e raggio IL è inscritta nel triangolo.**



$$Hp: \begin{cases} a = \text{bisettrice dell'angolo } \hat{A} \\ b = \text{bisettrice dell'angolo } \hat{B} \\ c = \text{bisettrice dell'angolo } \hat{C} \end{cases}$$

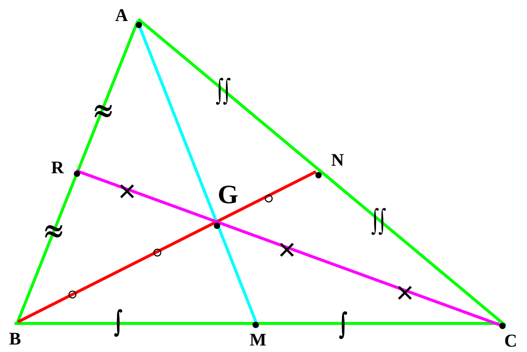
$$Th: \{ a \cap b \cap c = \mathcal{I}$$

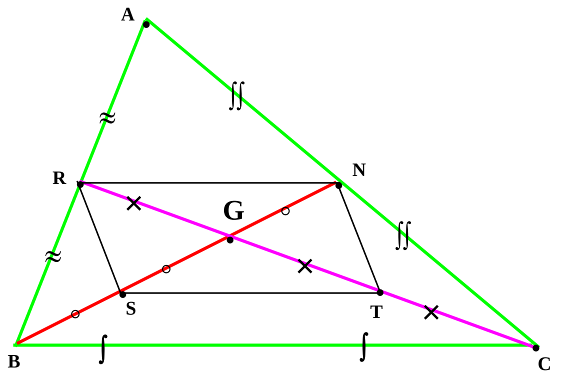
Osservazione

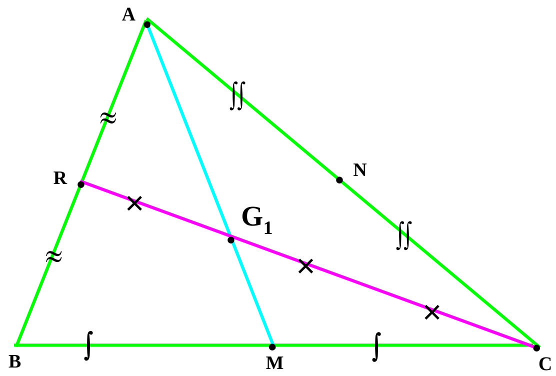
- **La bisettrice di un angolo è la semiretta che divide l'angolo in due parti uguali**
- **La bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti (interni all'angolo) equidistanti dai lati dell'angolo.**

Teorema: Le tre mediane di un triangolo passano per uno stesso punto G detto baricentro che divide ogni mediana in due parti di cui quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.

Hp : $\begin{cases} AR = RB \\ BM = MC \\ CN = NA \end{cases}$ **Th :** $\begin{cases} AM \cap BN \cap CR = \{G\} \\ AG = 2GM \\ BG = 2GN \\ CG = 2GR \end{cases}$







Dimostrazione:

Detta G l'intersezione delle mediane BN **e** CR**, indichiamo con S e T i punti medi dei segmenti** BG **e** CG **.**

$$\left.\begin{array}{l} AR = RB \\ AN = NC \end{array}\right\} \Rightarrow RN \parallel BC \ \wedge \ RN = \frac{1}{2}BC \qquad \left.\begin{array}{l} BS = SG \\ CT = TG \end{array}\right\} \Rightarrow ST \parallel BC \ \wedge \ ST = \frac{1}{2}BC$$

(Teorema di Talete)

$$\left.\begin{array}{l} RN \parallel BC \wedge RN = \frac{1}{2}BC \\ ST \parallel BC \wedge ST = \frac{1}{2}BC \end{array}\right\} \Rightarrow RN = ST = \frac{1}{2}BC \ \wedge \ RN \parallel ST$$

Il quadrilatero $NRST$ **è un parallelogrammo per avere una coppia di lati opposti uguali e paralleli. Ricordando che le diagonali di un parallelogrammo si dimezzano scambievolmente possiamo scrivere:** $RG = GT = TC \ \wedge \ BS = SG = GN$ **e quindi :** $BG = 2GN \ \wedge \ CG = 2GR$

ed anche : $\mathbf{CG = \frac{2}{3}CR}$

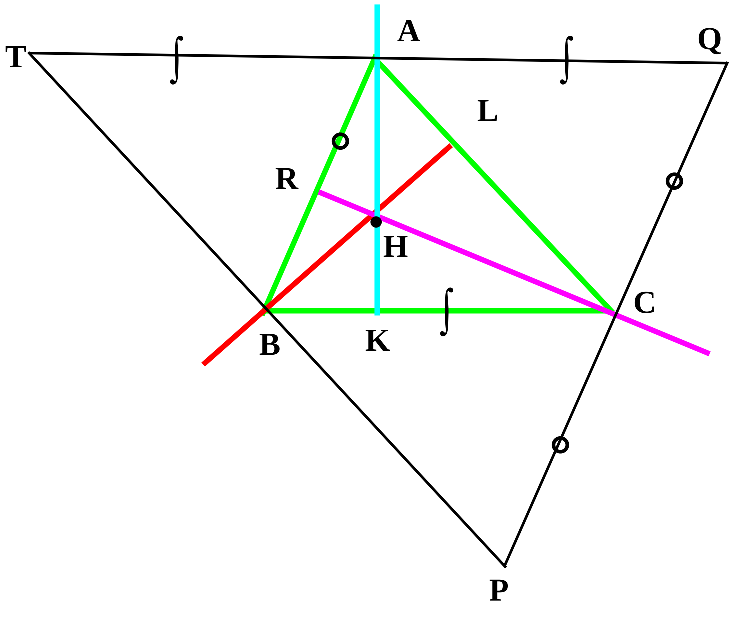
Abbiamo così dimostrato che due mediane di uno stesso triangolo si incontrano in un punto che divide ciascuna mediana in due parti delle quali quella contenente il vertice è doppia dell'altra.

Sia G_1 **l'intersezione delle mediane** AM **e** CR **. Per la precedente dimostrazione possiamo scrivere :** $CG_1 = 2G_1R$ **e quindi :** $CG_1 = \frac{2}{3}CR$ **;** $\left.\begin{array}{l} CG = \frac{2}{3}CR \\ CG_1 = \frac{2}{3}CR \end{array}\right\} \Rightarrow CG = CG_1 \Rightarrow$ $\mathbf{G \equiv G_1}$

Abbiamo così dimostrato che le tre mediane di uno stesso triangolo passano per uno stesso punto.

Osservazione: Mediana **relativa ad un lato di un triangolo è il segmento che congiunge il punto medio del lato col vertice opposto al lato.**

Teorema**: Le tre altezze di un triangolo passano per uno stesso punto H detto** ortocentro**.**



$Hp \begin{cases} AK \perp BC \\ BL \perp AC \\ CR \perp AB \end{cases}$

$Th \{AK \cap BL \cap CR = H$

Dimostrazione**: Condotte per i vertici A, B, C le rette parallele ai lati opposti , otteniamo il triangolo** PQT **.**

$AT \cong BC$ **(lati opposti dello stesso parallelogramma** $ACBT$ **)**

$AQ \cong BC$ **(lati opposti dello stesso parallelogramma** $AQCB$ **)** $AT \cong AQ$

$$\left.\begin{array}{l} BT \cong AC \\ BP \cong AC \end{array}\right\} \Rightarrow BT \cong BP \qquad \left.\begin{array}{l} CP \cong AB \\ CQ \cong AB \end{array}\right\} \Rightarrow CP \cong CQ$$

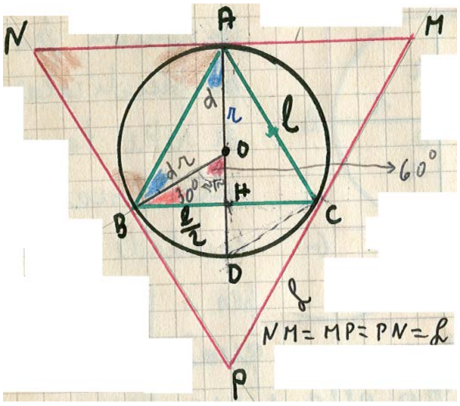
Dunque le altezze del triangolo ABC sono gli assi del triangolo PQT e quindi, per quanto dimostrato precedentemente , passano per uno stesso punto .

Osservazione

$$\left.\begin{array}{l} TQ \parallel BC \\ AH \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow TQ \perp AK \;, \quad \left.\begin{array}{l} PQ \parallel AB \\ CR \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow PQ \perp CR \;, \quad \left.\begin{array}{l} PT \parallel AC \\ BL \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow PT \perp BL$$

- Altezza **di un triangolo rispetto ad un suo lato è il segmento di perpendicolare condotto dal vertice opposto alla retta che contiene il lato, detto** base **del triangolo.**
- **L'ortocentro è interno al triangolo se il triangolo è acutangolo, coincide col vertice dell'angolo retto se il triangolo è rettangolo, è esterno se il triangolo è ottusangolo.**

Triangolo equilatero inscritto e circoscritto ad una circonferenza di raggio r



Sia AD un diametro qualsiasi di una circonferenza di centro O e raggio r. Per il punto medio H del raggio OD, conduco la corda $BC \perp OD$. ABC è il triangolo equilatero di lato ℓ inscritto nella circonferenza. Infatti: $OH = \dfrac{OB}{2} = \dfrac{r}{2} \Rightarrow H\hat{B}O = 30°$; $H\hat{O}B = 60°$; $2\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 30° \Rightarrow$

$$C\hat{B}A = 60° \Rightarrow B\hat{C}A = C\hat{A}B = 60°$$

Le rette tangenti alla circonferenza, condotte rispettivamente per i punti A, B, C, individuano il triangolo equilatero MNP di lato L circoscritto alla circonferenza.

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 \Rightarrow \frac{\ell^2}{4} = r^2 - \frac{r^2}{4} \Rightarrow \ell^2 = 3r^2 \qquad \ell = r\sqrt{3} \qquad r = \frac{\ell}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell$$

$N\hat{A}B = N\hat{A}H - B\hat{A}H = 90° - 30° = 60°$ $\quad NA = NB \quad \Rightarrow \quad N\hat{A}B = N\hat{B}A = 60°$

Quindi risulta: $B\hat{N}A = 60°$ Il triangolo NAB (come pure i triangoli AMC , BCP) è equilatero:

$$NA = NB = AB = \ell \qquad MN = 2\,AN \qquad \mathbf{L = 2\ell} \qquad \boldsymbol{\ell = \frac{L}{2}}$$

Il lato L del triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza è il doppio del lato ℓ del triangolo equilatero inscritto nella stessa circonferenza. $\mathbf{L = 2r\sqrt{3}}$ $\quad \mathbf{r = \frac{L}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot L}$