Unità Didattica N° 29

Quadrilateri inscrittibili e circoscrittibili

01) **Poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza**

02) **Quadrilateri inscrittibili in una circonferenza**

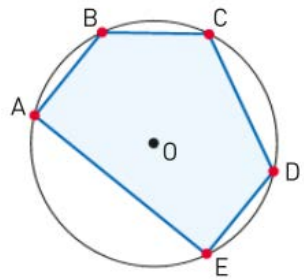
03) **Quadrilateri circoscrittibili ad una circonferenza**

04) **Poligoni regolari**

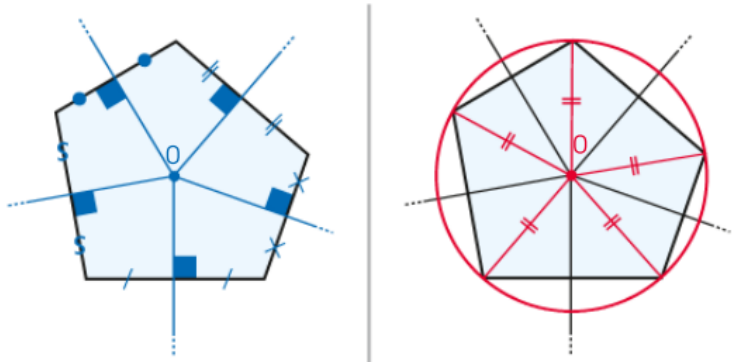
Poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza

Definizione: Un poligono è **inscritto in una circonferenza** quando i suoi vertici sono punti della circonferenza. In questo caso la circonferenza è circoscritta al poligono.

Il poligono *ABCDE* è inscritto nella circonferenza di centro O. La circonferenza è circoscritta al poligono *ABCDE* .



Teorema: Condizione necessaria e sufficiente perché un **poligono sia inscrittibile** in una circonferenza è che gli assi dei suoi lati si incontrino tutti in uno stesso ponto che è il centro della circonferenza circoscritta.

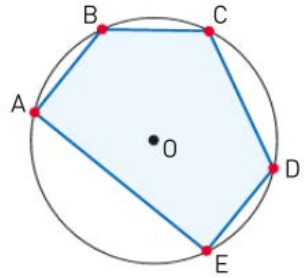


a. Gli assi dei lati del poligono si incontrano in un punto *O*.

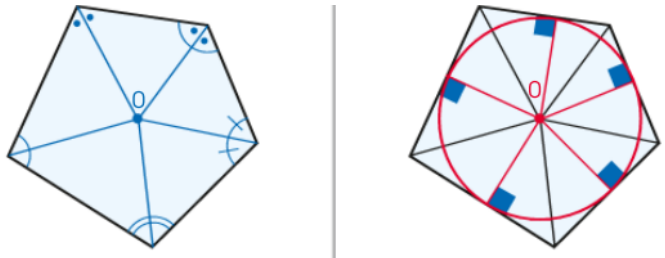
b. Il poligono è inscrivibile nella circonferenza di centro *O*.

Definizione: Un poligono si dice **circoscritto ad una circonferenza** quando i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. A sua volta la circonferenza è inscritta nel poligono.

Il poligono *ABCDE* è circoscritto alla circonferenza di centro O. La circonferenza è inscritta nel poligono *ABCDE* .



Teorema: Condizione necessaria e sufficiente perché un poligono sia circoscrivibile a una circonferenza è che le bisettrici dei suoi angoli interni si incontrino tutte in uno stesso ponto che è il centro della circonferenza inscritta.



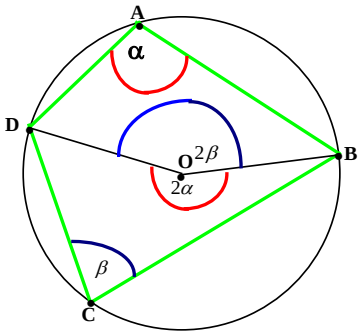
a. Le bisettrici degli angoli del poligono si incontrano in un punto *O*. **b.** Il poligono è circoscrivibile alla circonferenza di centro *O*.

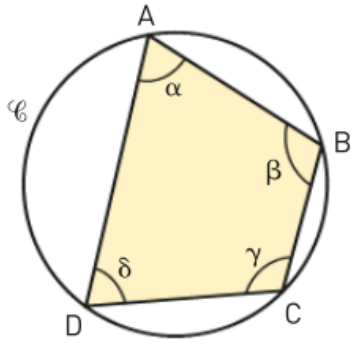
Osservazione: Una condizione necessaria rappresenta una tesi, una condizione sufficiente rappresenta una ipotesi.

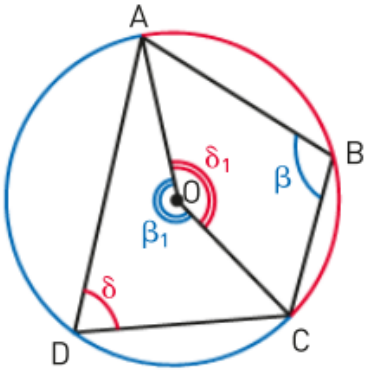
Quadrilateri inscritti in una circonferenza

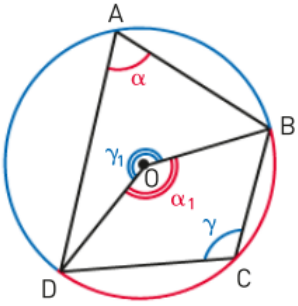
Definizione: Un quadrilatero è inscritto in una circonferenza se i suoi vertici sono punti della circonferenza. A sua volta la circonferenza è circoscritta al quadrilatero.

Teorema: Gli angoli opposti di un qualsiasi quadrilatero inscritto in una circonferenza sono supplementari.









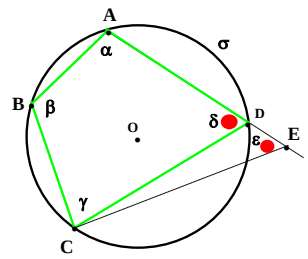
$Hp\ \{ABCD\ inscritto\ in\ una\ circonferenza \quad Th\ \{D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180°$

$D\hat{C}B$ e $D\hat{O}B$ sono rispettivamente angoli alla circonferenza ed al centro che insistono sullo steso arco $D\overset{\frown}{AB}$. Pertanto: $D\hat{C}B = \beta \Rightarrow D\hat{O}B = 2\beta$.

$D\hat{A}B$ e $D\hat{O}B$ sono rispettivamente angoli alla circonferenza ed al centro che insistono sullo stesso arco $D\overset{\frown}{CB}$. Pertanto: $D\hat{A}B = \alpha \Rightarrow D\hat{O}B = 2\alpha$. Ma: $2\alpha + 2\beta = 360° \Rightarrow \alpha + \beta = 180°$

Quadrilateri inscrittibili in una circonferenza

Teorema: Un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza se ha due angoli opposti supplementari.



$Hp\left\{D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180°\right.$ $\quad Th\left\{ABCD\ inscrittibile\ in\ una\ circonferenza\right.$

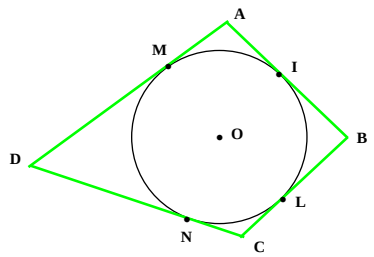
Dimostrazione: Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso avente gli angoli $\hat{A}=\alpha$ e $\hat{C}=\gamma$ supplementari. $\alpha+\gamma=1P \quad \Rightarrow \quad \beta+\delta=1P \quad \Rightarrow$ **δ=1P-β** . Vogliamo dimostrare che circonferenza σ passante per i tre punti non allineati A, B, C passa anche per il punto D. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che σ non passi per il punto D. La retta contenente ilo lato AD incontra σ in un punto E diverso dal punto D. Il quadrilatero $ABCE$ è inscritto nella circonferenza σ i n quanto ha i suoi vertici su di essa. Per il teorema precedente possiamo scrivere: $\varepsilon=1P-\beta$. $\delta=1P-\beta \quad \wedge \quad \varepsilon=1P-\beta \quad \Rightarrow$ **ε=δ** Questa uguaglianza è assurda perché in un qualsiasi triangolo ogni angolo esterno è maggiore dell'angolo interno non adiacente. L'assurdo si toglie ammettendo che la circonferenza σ passa per il punto D e quindi il quadrilatero $ABCD$ è inscrittibile in una circonferenza.

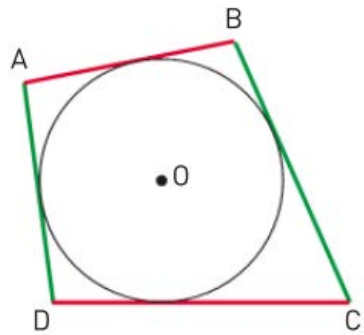
I due precedenti teoremi possono essere così sintetizzati: Condizione necessaria e sufficiente perché una quadrilatero convesso sia inscrittibile in una circonferenza è che i suoi angoli opposti siano supplementari.

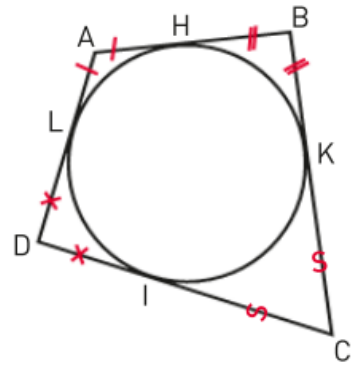
N.B. Tre o più punti che si trovano sulla stessa circonferenza si dicono conciclici.

Quadrilateri circoscritti ad una circonferenza

Definizione: Un quadrilatero è circoscritto ad una circonferenza se i suoi lati sono tangenti alla circonferenza che risulta essere inscritta nel quadrilatero.







Teorema: In un quadrilatero convesso circoscritto ad una circonferenza la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due lati.

Ricordando che risultano uguali i segmenti di tangente condotti da un punto ad una circonferenza possiamo scrivere:

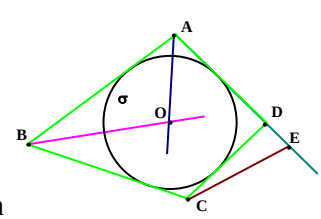
$$\begin{array}{ccc} AI & = & AM \\ IB & = & BL \\ DN & = & MD \\ NC & = & LC \\ \hline AI+IB+DN+NC & = & AM+BL+MD+LC \end{array}$$

Sommando membro a membro otteniamo

$$AB + CD = BC + AD$$

Quadrilateri circoscrivibili ad una circonferenza

Teorema: Se in un quadrilatero la somma di due lati è uguale alla somma degli altri due, allora il quadrilatero è circoscrivibile in una circonferenza.



$Hp\ \{AB + CD = BC + AD \quad Th\ \{ABCD$ circoscrittibile in una circonferenza

Dimostrazione: Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso per il quale la somma di due lati opposti è uguale a quella degli altri due. Se risulta $AB + CD = BC + AD$ allora il quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza. Costruiamo la circonferenza σ tangente ai lati AB, AD, BC, il cui centro coincide con l'intersezione delle bisettrici degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Vogliamo dimostrare che il lato CD è tangente a σ. Ragioniamo per assurdo supponendo che il lato CD non sia tangente σ. Se il lato CD non è angente σ, allora per ilo vertice C posso condurre la retta tangente

a σ e supponiamo che essa incontri la retta contenente il lato AD nel punto E. Il quadrilatero $ABCE$, avendo i lati tangenti a σ, è un quadrilatero circoscritto a σ. Per il teorema precedente possiamo scrivere:

$$\begin{array}{ccccccccl} AB & + & CE & = & AE & + & BC & & \\ AB & + & CD & = & AD & + & BC & & \textit{per ipotesi} \\ \hline CE & - & CD & = & AE & - & AD & & \end{array}$$

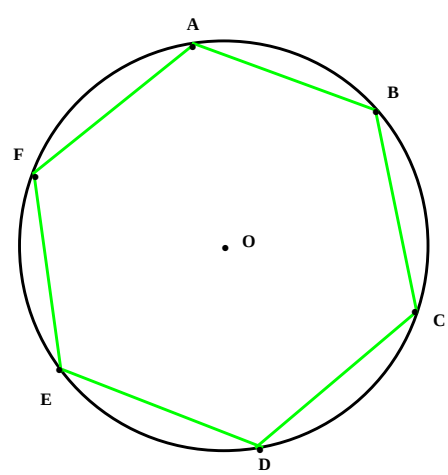
$CE - CD = AE - AD \quad \Rightarrow \quad CE - CD = DE$ uguaglianza non vera in quanto sappiamo che in ogni triangolo ciascun lato è maggiore della differenza degli altri due. L'assurdo si toglie ammettendo che il lato CD è tangente alla circonferenza σ. I due precedenti teoremi possono essere così sintetizzati: Condizione necessaria e sufficiente perché un quadrilatero convesso sia circoscrivibile ad una circonferenza è che la somma di due suoi lati opposti sia uguale alla somma degli due lati opposti.

Corollario: Un rettangolo è inscrittibile • Un rombo è circoscrittibile • Un quadrato è inscrittibile e circoscrittibile.

Poligoni regolari

Definizione: Un poligono si dice regolare se è equilatero ed equiangolo.

Teorema: Se dividiamo una circonferenza in tre o più archi uguali e congiungiamo successivamente i punti di divisione , otteniamo un poligono regolare inscritto in quella circonferenza .



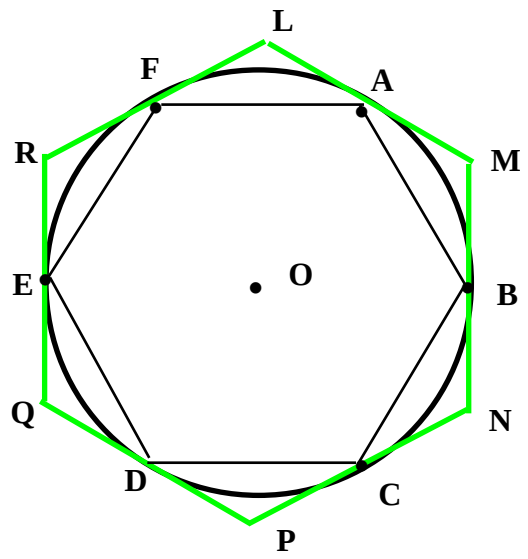
Dimostrazione: Dividiamo la circonferenza in un numero qualsiasi (nel nostro caso 6) di archi uguali mediante i punti A , B , C , D , D , E , F . Congiungendo successivamente tali punti otteniamo il poligono (esagono) $ABCDEF$ che vogliamo dimostrare essere regolare .

Infatti : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA} \Rightarrow AB = BC = CD = DE = EF = FA$

Inoltre : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = \hat{F}$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono su archi uguali . Il poligono $ABCDEF$ è regolare in quanto risulta essere equilatero ed equiangolo .

Teorema: Se dividiamo una circonferenza in tre o più archi uguali e conduciamo le tangenti nei punti di divisione otteniamo un poligono regolare circoscritto alla circonferenza.

Dividiamo la circonferenza, ad esempio in 6 archi uguali mediante i punti A , B , C , D , E , F nei quali conduciamo le rette tangenti alla circonferenza .



Otteniamo il poligono $LMNPQR$ che voglio dimostrare essere regolare.

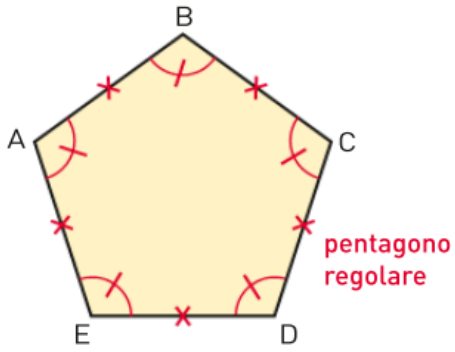
I triangoli AMB , BNC , CPD , DQE , ERF , FLA sono triangoli isosceli fra loro uguali per avere:

1) le basi fra loro uguali in quanto corde che sottendono archi congruenti

2) gli angoli alla base uguali in quanto angoli alla circonferenza che insistono su archi uguali .

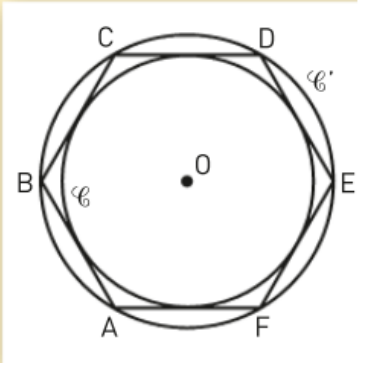
Ne deduciamo che : $\hat{L} = \hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \hat{Q} = \hat{R}$

Inoltre : $LM = MN = NP = PQ = QR = RL$ in quanto somma di segmenti uguali , che sono lati obliqui di triangoli isosceli uguali . Il poligono $LMNPQR$, essendo equilatero ed equiangolo è regolare.



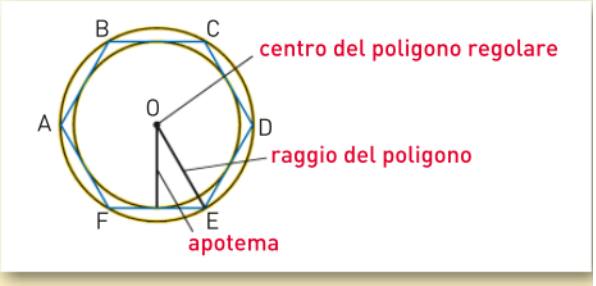
TEOREMA

Dato un poligono regolare, esistono la sua circonferenza inscritta e la sua circonferenza circoscritta, e hanno lo stesso centro.



I poligoni regolari

Un poligono **regolare** è un poligono avente tutti i lati e tutti gli angoli congruenti, ossia è equilatero ed equiangolo.
Se un poligono è regolare, allora esso è inscrivibile in una circonferenza e circoscrivibile a un'altra.
Le due circonferenze hanno lo stesso centro, detto **centro del poligono**.
Si chiama **raggio del poligono** il raggio della circonferenza circoscritta.
Si chiama **apotema** del poligono il raggio della circonferenza inscritta.



Se una circonferenza è divisa in tre o più archi congruenti allora:

- il poligono inscritto che si ottiene congiungendo i punti di suddivisione è regolare;
- il poligono circoscritto che si ottiene tracciando le tangenti alla circonferenza nei punti di suddivisione è regolare.

Il lato di un esagono regolare inscritto in una circonferenza è congruente al raggio della circonferenza.