Unità Didattica N°30

Equivalenza delle superfici piane

Concetti primitivi e postulati

Definizione: Dicesi **superficie piana** (finita) una qualsiasi parte di piano delimitata da una linea piana chiusa. Ad ogni superficie piana associamo intuitivamente una certa **estensione** che è una nozione primitiva non definibile e caratterizzata da opportuni postulati che introdurremo in seguito e che possono essere considerati come una sua definizione indiretta. Ci proponiamo di illustrare tale concetto intuitivo e di chiarire come le estensioni delle varie possibili superfici piane si possano confrontare fra loro. **Definizione**: Due **figure geometriche** piane si dicono **equivalenti** quando hanno la stessa estensione. Per indicare che due figure geometriche F_1 ed F_2 sono equivalenti si usa la scrittura $\mathbf{F_1 \doteq F_2}$ e si legge: <<F_1 è equivalente ad F_2>>.

Per l'equivalenza tra figure geometriche valgono i seguenti postulati:

Postulato N°1: Due figure geometriche uguali sono equivalenti.

Postulato N°2: Ogni figura geometrica piana è equivalente a se stessa, cioè:

$$\mathbf{F_1 \doteq F_1} \qquad (\textit{Proprietà riflessiva})$$

Postulato N°3: Se una figura geometrica è equivalente ad un'altra, anche questa seconda figura geometrica è equivalente alla prima, cioè: $\mathbf{F_1 \doteq F_2} \Rightarrow \mathbf{F_2 \doteq F_1}$ (*Proprietà simmetrica)*

Postulato N°4: Se una figura geometrica è equivalente ad una seconda e questa è equivalente ad una terza, anche la prima figura geometrica è equivalente alla terza, cioè:

$$\left\{\mathbf{F_1 \doteq F_2} \wedge \mathbf{F_2 \doteq F_3}\right\} \Rightarrow \mathbf{F_1 \doteq F_3} \qquad (\textit{Proprietà transitiva})$$

Postulato N°5: Somme di superfici uguali sono equivalenti

Postulato N°6: Somme di superfici equivalenti sono equivalenti

Postulato N°7: Differenze di superfici equivalenti sono equivalenti

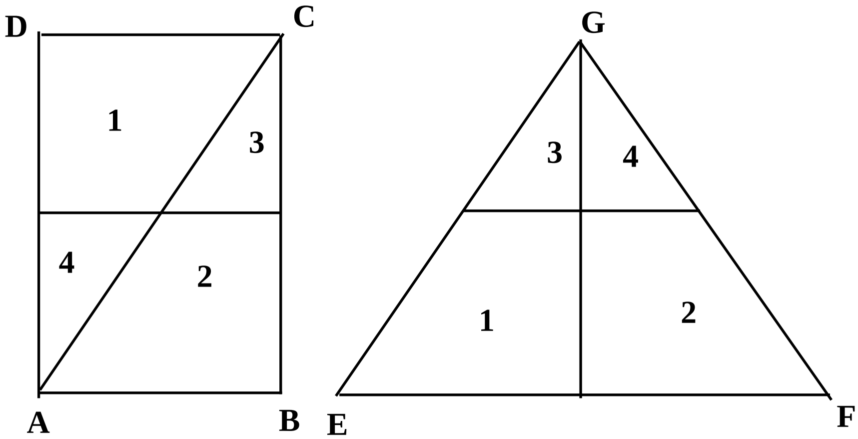
Postulato N°8: Differenze di superfici uguali sono equivalenti

Postulato N°9: Una superficie è prevalente ad ogni sua parte

Osservazione: Due figure geometriche uguali sono equivalenti ma non viceversa

Per dimostrare l'**equivalenza** di due figure geometriche piane si ricorre al seguente <<*criterio di equivalenza per somma*>>, il quale afferma quanto segue:

due figure geometriche piane sono equiscomponibili o equivalenti per somma quando possono essere divise nello stesso numero di poligoni uguali o equivalenti.

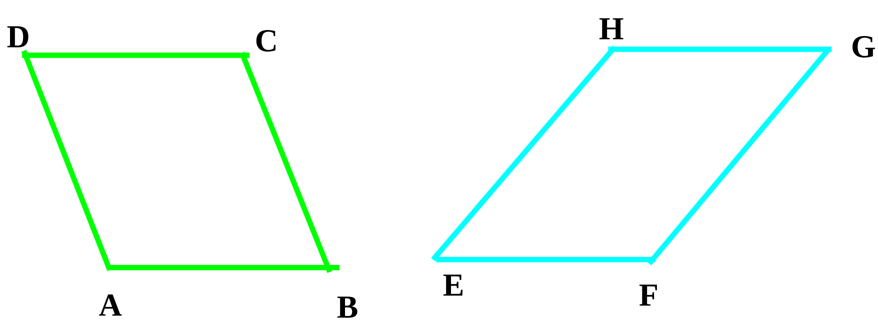


$ABCD \doteq EFG$

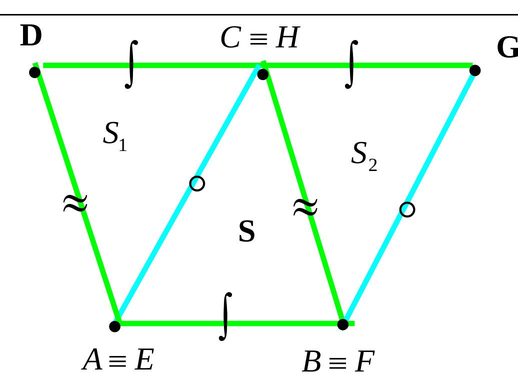
in quanto i due poligoni sono equiscomponibili

Parallelogrammi equivalenti

Teorema: Due parallelogrammi aventi basi ed altezze uguali sono equivalenti



Consideriamo due parallelogrammi $ABCD$ e $EFGH$ aventi uguali le basi AB ed EF e le relative altezze. Trasporto il parallelogramma $EFGH$ sul parallelogramma $ABCD$ in modo che $A \equiv E$, $B \equiv F$. Poiché i due parallelogrammi hanno altezze uguali, il lato HG apparterrà alla retta che contiene il lato CD. Si possono presentare tre casi:

1° caso: $H \equiv C$	

I triangoli ACD e FGH sono uguali per avere:

1) $CD = HG = AB$ in quanto a due a due lati opposti dello stesso parallelogrammo

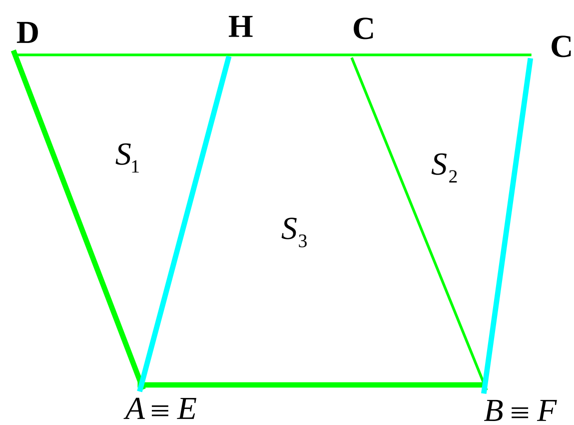
2) $AD = HF$ in quanto lati opposti dello stesso parallelogrammo $ABCD$

3) $AC = FG$ in quanto lati opposti dello stesso parallelogrammo $ABGH$

$$\left.\begin{array}{lcl} ABCD & = & S_1 + S \\ EFGH & = & S_2 + S \\ S_1 & = & S_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ABCD \doteq EFGH$$

2° caso:

I lati CD ed HG hanno in comune il segmento HC .



I triangoli AHD e BCG sono uguali per avere:

1) $AD = BC$ in quanto lati opposti dello stesso parallelogrammo $ABCD$

2) $AH = BG$ in quanto lati opposti dello stesso parallelogrammo $ABGH$

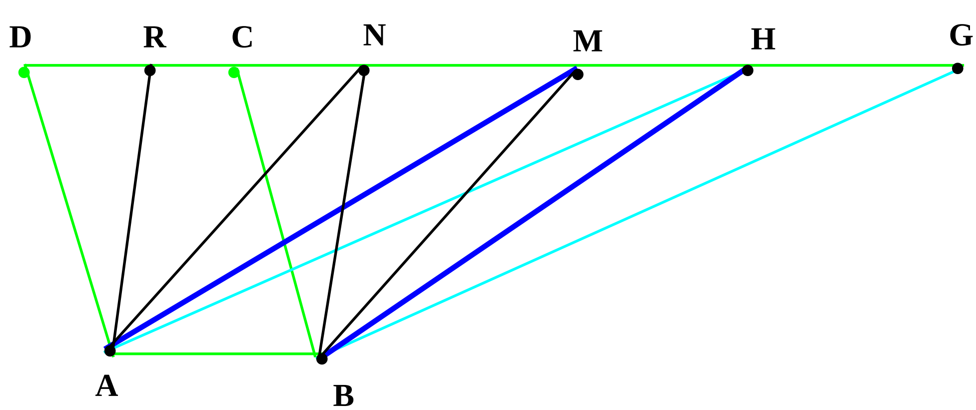
3) $DH = CG$ perché differenza di segmenti uguali

[$DH = DC - HC$, $GC = HG - HC$, $DC = HG = AB$]

$$\left.\begin{array}{lcl} ABCD & = & S_1 + S_3 \\ EFGH & = & S_2 + S_3 \\ S_1 & = & S_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ABCD \doteq EFGH$$

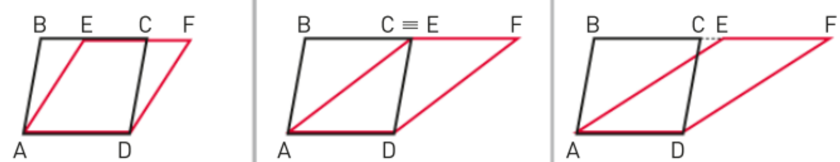
3° caso:

I lati CD ed HG sono esterni uno rispetto all'altro



A partire dal punto H si prendono tanti segmenti consecutivi ad HG quanto bastano a trovarne uno (ad esempio RN) che abbia come secondo estremo un punto R interno a CD o coincidente con C.

Per uno dei due casi precedenti risulta: $ABGH \doteq ABHM \doteq ABMN \doteq ABNR \doteq ABCD$



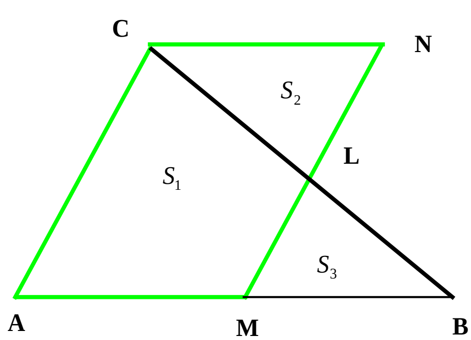
a. I segmenti *BC* ed *EF* hanno una parte in comune.

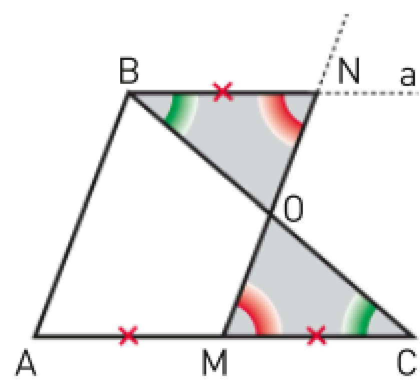
b. I segmenti *BC* ed *EF* hanno soltanto un estremo in comune.

c. I segmenti *BC* ed *EF* non hanno punti in comune.

Parallelogrammi e triangoli equivalenti

Teorema Un triangolo è equivalente ad un parallelogramma che ha per base metà base del triangolo e per altezza la stessa altezza del triangolo.



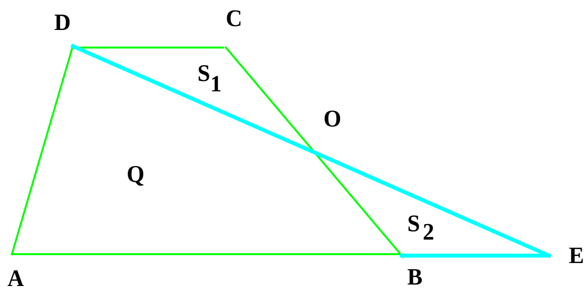


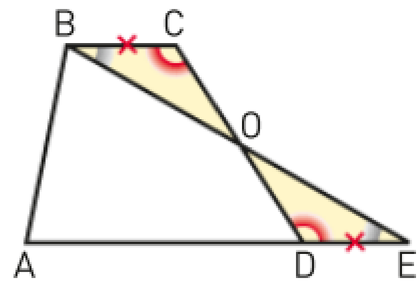
Se nel triangolo ABC conduciamo, per il punto medio M della base AB, la parallela al lato AC, e per il vertice C la parallela ad AB, otteniamo il quadrilatero $AMNC$ che, per costruzione, è un parallelogramma avente per base la metà della base del triangolo ABC e per altezza la stessa altezza. I triangoli MLB ed LNC sono uguali per avere: 1) $CN = MB$ in quanto entrambi uguali al segmento AM 2) $N\hat{C}L = L\hat{B}M$ in quanto angoli alterno-interni rispetto alle rette parallele CN ed MB tagliate dalla trasversale CB 3) $C\hat{N}L = L\hat{M}B$ in quanto entrambi uguali al segmento AM

$$\left.\begin{array}{rcl} ABC & = & S_1 + S_3 \\ AMNC & = & S_1 + S_2 \\ S_2 & = & S_3 \end{array}\right\} \Rightarrow ABC \doteq AMNC$$

Trapezi e triangoli equivalenti

Teorema: Un trapezio è equivalente ad un triangolo avente come base la somma delle basi del trapezio e come altezza la stessa altezza.





Si prolunghi il segmento AB dalla parte di B di un segmento $BE = CD$. I triangoli OCD e OBE sono uguali per avere:

1) $BE = CD$ per costruzione 2) $O\hat{B}E = O\hat{C}D$ perché angoli alterno-interni rispetto alle rette parallele AE e CD tagliate dalla trasversale CB

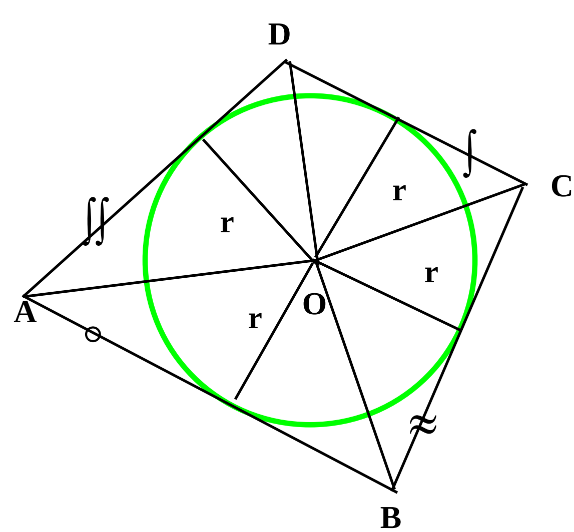
3) $O\hat{E}B = O\hat{D}C$ perché angoli alterno-interni rispetto alle rette parallele AE e CD tagliate dalla trasversale DE

$$\left.\begin{array}{rcl} ABCD & = & Q + S_1 \\ AED & = & Q + S_2 \\ S_1 & = & S_2 \end{array}\right\} \Rightarrow ABCD \doteq AED$$

Equivalenza tra un poligono circoscritto ed un triangolo

Teorema

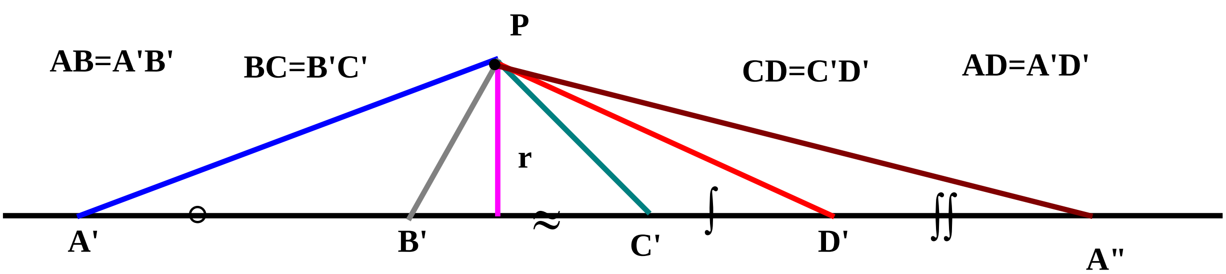
Un poligono circoscritto ad una circonferenza è equivalente ad un triangolo avente per base il perimetro del poligono e per altezza il raggio della circonferenza

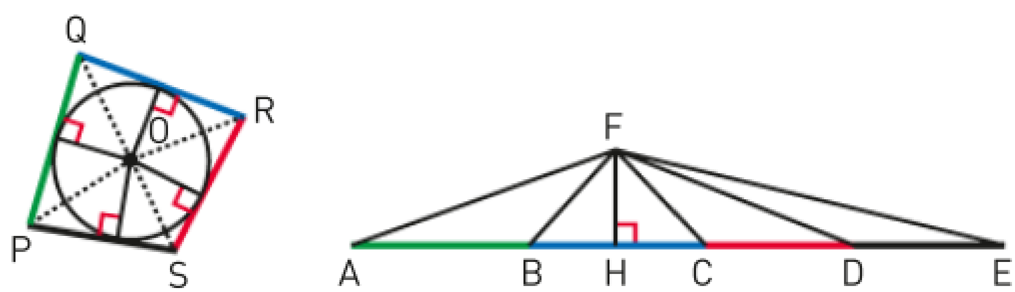


Congiungendo il centro O della circonferenza con i vertici del poligono otteniamo tanti triangoli quanti sono i lati del poligono (nel caso nostro 4). Poi trasportiamo sopra una retta, consecutivamente l'una all'altro, i segmenti $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A''$ congruenti ai lati del poligono e congiungiamo i punti A', B', C', D', A'' con un punto P che disti dalla retta di un segmento uguale al raggio della circonferenza.

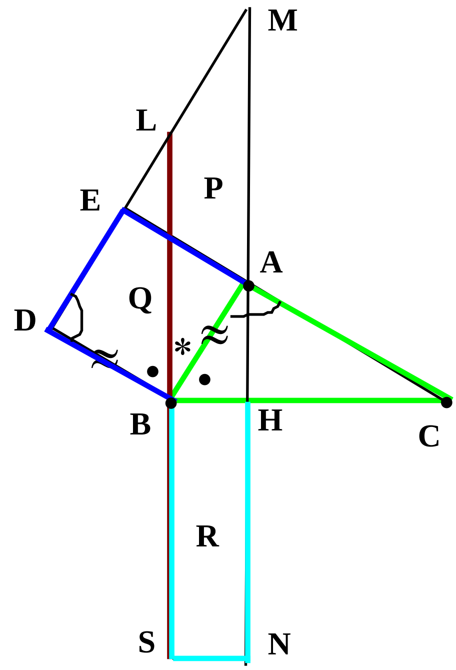
$$AOB \doteq A'B'P \quad , \quad BOC \doteq B'C'P \quad , \quad COD \doteq C'D'P \quad , \quad AOD \doteq D'A''P$$

in quanto si tratta di triangoli aventi uguali le rispettive basi e le rispettive altezze. Si conclude che $ABCD$ e $A'A''P$, essendo equicomposti, sono equivalenti.





$AB \cong PQ$, $BC \cong QR$, $CD \cong RS$, $DE \cong SP$.



Primo teorema di Euclide

In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su di un cateto è equivalente al rettangolo avente come dimensioni l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa. $Hp \ \{ B\hat{A}C = 90°$ $Th \ \{ Q \doteq R$

Costruiamo sul cateto AB il quadrato $Q = ABDE$ ed il rettangolo $R = BHNS$ avente come lati $BS = BC$, BH .

I triangoli ABC e BDL sono uguali per avere :

1) $AB = BD$ in quanto lati dello stesso quadrato Q

2) $B\hat{A}C = B\hat{D}L$ in quanto entrambi retti

3) $A\hat{B}C = L\hat{B}D$ in quanto complementari dello stesso angolo $A\hat{B}C$.

Ne consegue che: $BL = BC = BS$

$Q \doteq P$ per avere la stessa base AB e la stessa altezza AE

$R \doteq P$ per avere basi congruenti ($LB = BS$) e la stessa altezza AH .

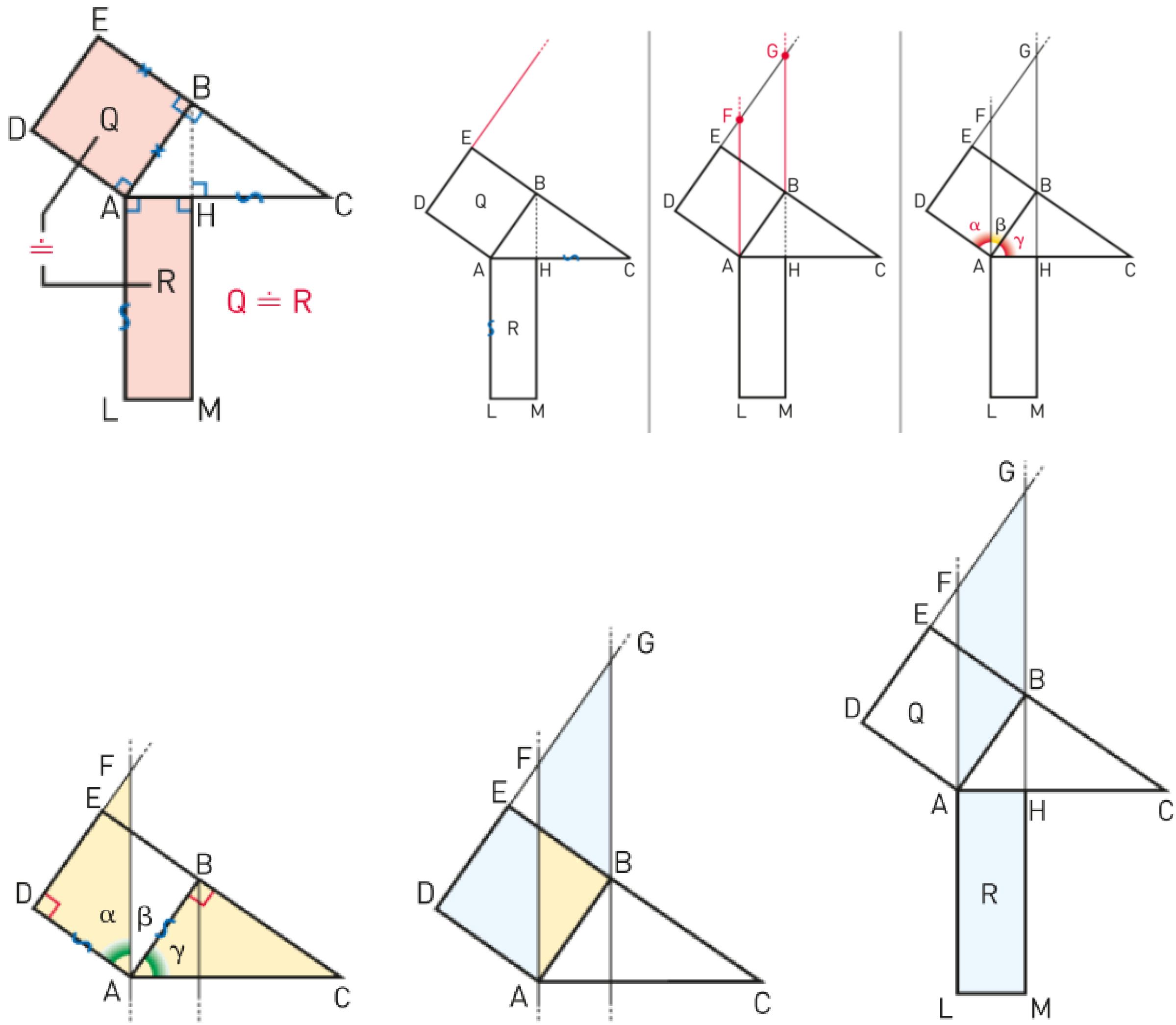
Per la proprietà transitiva dell'equivalenza abbiamo: $R \doteq Q$

Il primo teorema di Euclide scritto in forma metrica (cioè considerando le misure dei lati del triangolo rettangolo) diventa:

$AB^2 = BH \cdot BC$ $\qquad AB = \sqrt{BH \cdot BC}$ $\qquad BH = \dfrac{AB^2}{BC}$ $\qquad BC = \dfrac{AB^2}{BH}$

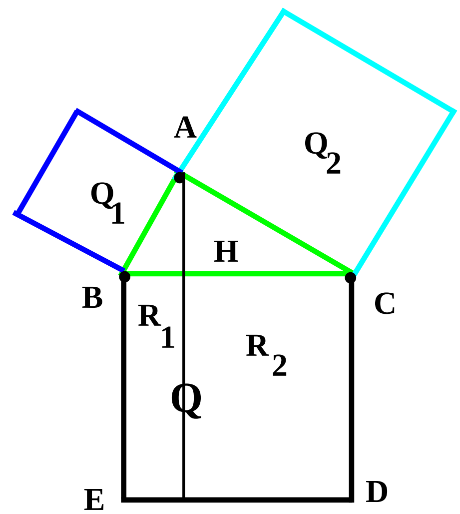
$AC^2 = HC \cdot CB$ $\qquad AC = \sqrt{HC \cdot CB}$ $\qquad HC = \dfrac{AC^2}{CB}$ $\qquad BC = \dfrac{AC^2}{HC}$

Inverso del primo teorema di Euclide: Se in un triangolo il quadrato costruito su un lato è equivalente al rettangolo che ha le dimensioni uguali al lato maggiore ed alla proiezione del primo lato su questo, allora il triangolo è rettangolo.


E
D
Q
B
A
H
C
R
$Q \doteq R$
L
M
F
G
α
β
γ

Teorema di Pitagora

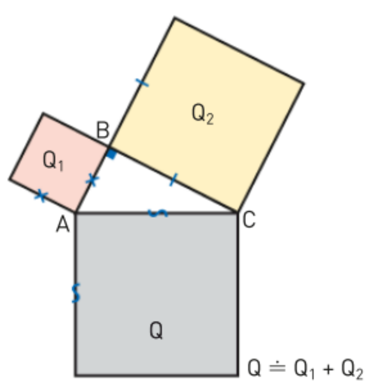
In triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti.

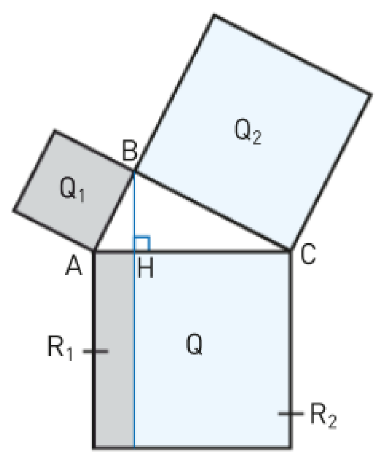


$Hp\ \{ B\hat{A}C = 90° \qquad Th\ \{ \ Q \doteq Q_1 + Q_2$

Siano Q_1 , Q_2 , Q i quadrati costruiti rispettivamente sui cateti AB ed AC e sull'ipotenusa BC . Il prolungamento dell'altezza AH relativa all'ipotenusa BC divide il quadrato Q nei rettangoli R_1 ed R_2 .

$$\begin{array}{cccl} Q_1 & \doteq & R_1 & 1° \textit{ teorema di Euclide applicato al cateto } AB \\ Q_2 & \doteq & R_2 & 1° \textit{ teorema di Euclide applicato al cateto } AC \\ \hline Q_1 + Q_2 & \doteq & R_1 + R_2 & \qquad Q_1 + Q_2 \doteq Q \end{array}$$





Il teorema di Pitagora scritto in forma metrica diventa :

$$\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2} \qquad \mathbf{BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}} \qquad \mathbf{AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}} \qquad \mathbf{AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}}$$

Osservazione

$$S(ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2} \qquad S(ABC) = \frac{BC \cdot AH}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2} \quad \frac{AB \cdot AC}{\cancel{2}} = \frac{BC \cdot AH}{\cancel{2}}$$

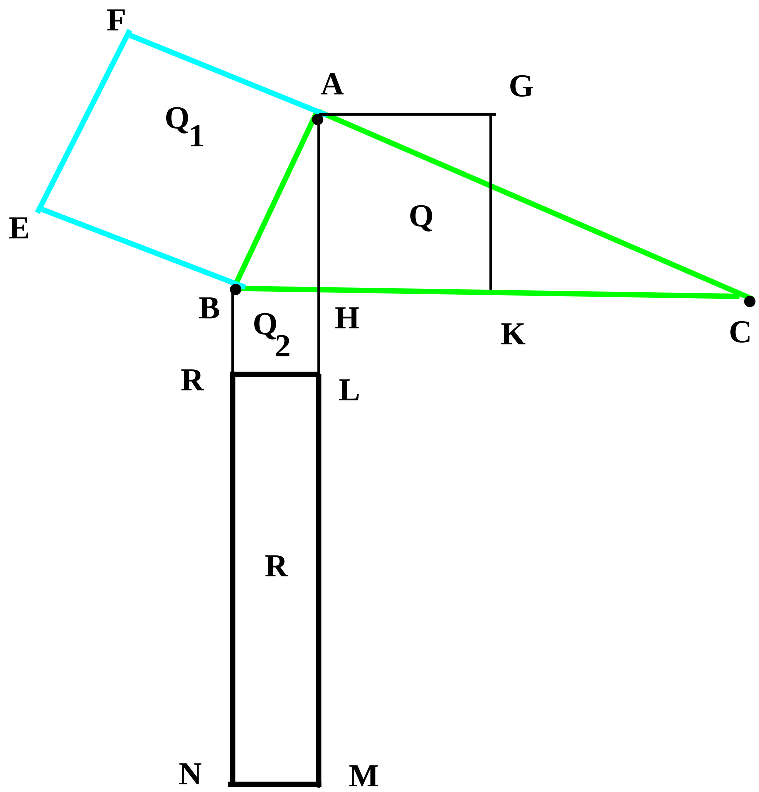
$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} \qquad \frac{cateto \cdot cateto}{ipotenusa} = \text{altezza relativa all'ipotenusa}$$

$$AB = \frac{BC \cdot AH}{AC} \qquad AC = \frac{BC \cdot AH}{AB} \qquad BC = \frac{AB \cdot AC}{AH}$$

Inverso del teorema di Pitagora: Se in un triangolo il quadrato costruito su un lato è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati, allora il triangolo è rettangolo

Secondo teorema di Euclide

In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente come dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



$Hp \left\{ B\hat{A}C = 90° \right.$

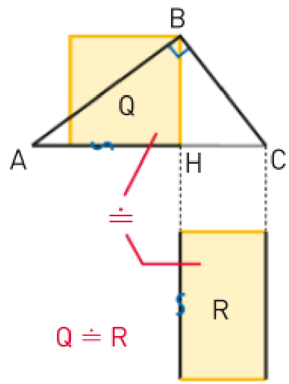
$Th \left\{ Q \doteq R \right.$

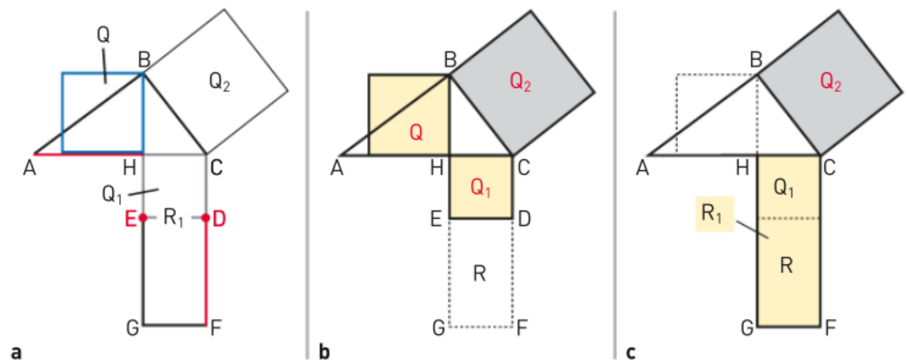
Costruiamo il quadrato Q_1 sul cateto AB ,il quadrato Q sull'altezza AH relativa all'ipotenusa BC , il rettangolo $BHMN$ avente come lati $BN = BC$ e BH , il quadrato Q_2 sulla proiezione BH .

$Q_1 \doteq Q_2 + R$ primo teorema di Euclide applicato al cateto AB

$Q_1 \doteq Q_2 + Q$ teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo AHB

$$\left. \begin{array}{l} R \doteq Q_1 - Q_2 \\ Q \doteq Q_1 - Q_2 \end{array} \right\} \Rightarrow R \doteq Q$$





Il secondo teorema di Euclide scritto in forma metrica diventa:

$$AH^2 = BH \cdot HC \qquad AH = \sqrt{BH \cdot HC} \qquad BH = \frac{AH^2}{HC} \qquad HC = \frac{AH^2}{BH}$$

Inverso del secondo teorema di Euclide: ***Se il quadrato costruito sull'altezza relativa al lato maggiore di un triangolo è equivalente al rettangolo avente le dimensioni uguali alle proiezioni degli altri due lati sul primo, allora il triangolo è rettangolo***.

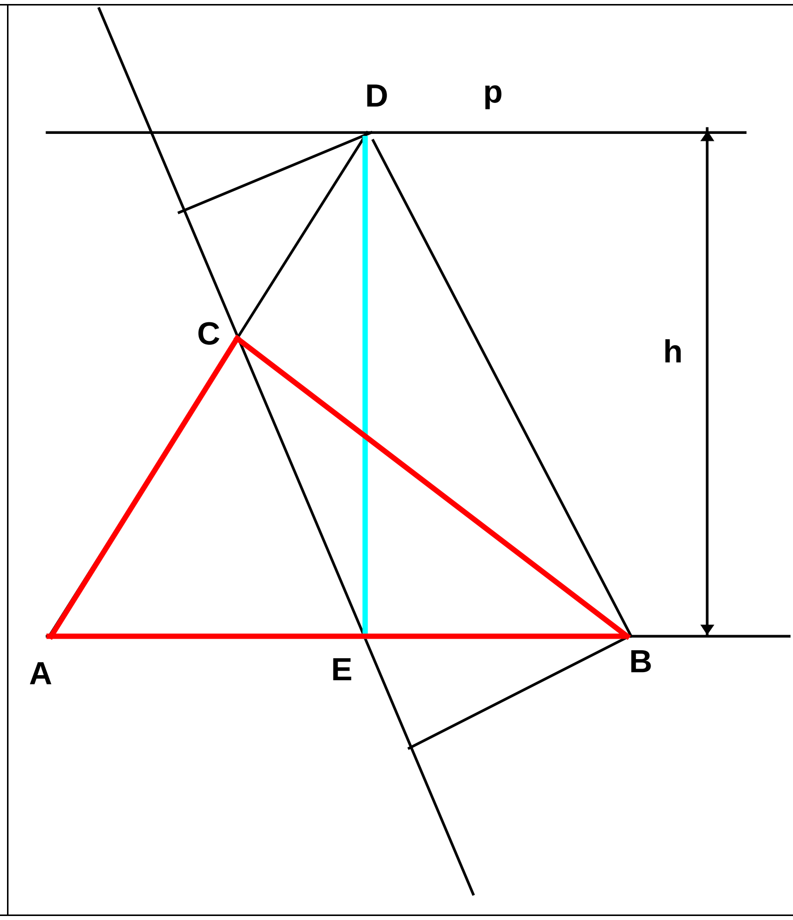
Trasformazione di un triangolo ABC in un altro equivalente di data altezza h

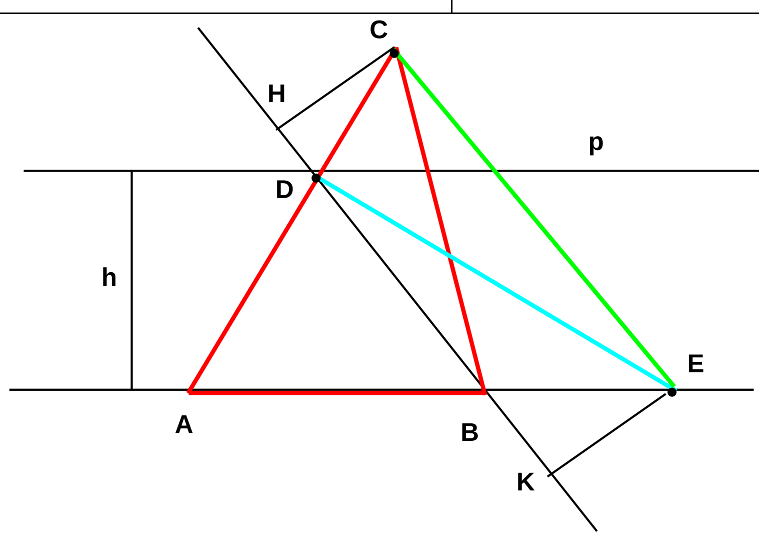
Si conduca la parallela p ad uno dei lati del triangolo ABC ad esempio al lato AB . Sia h la distanza tra le rette parallele p ed AB . Sia D il punto comune alla retta p ed alla retta che contiene il lato AC . Si congiunga D con B e da C si tracci la parallela a DB . Il triangolo AED è quello richiesto .

$\overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\triangle}{ACE} + \overset{\triangle}{CEB}$

$\overset{\triangle}{AED} \doteq \overset{\triangle}{ACE} + \overset{\triangle}{CED}$

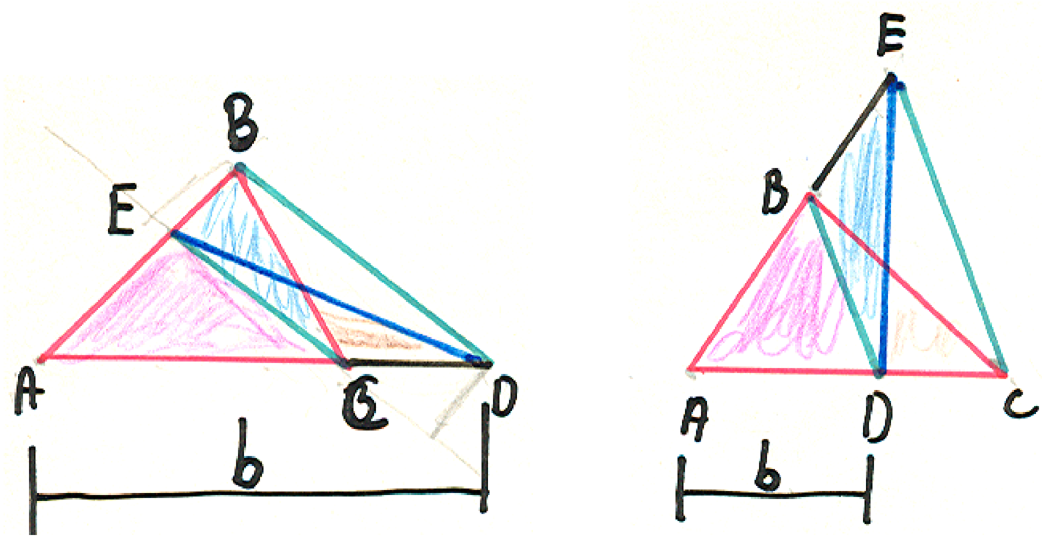
$\overset{\triangle}{CEB} \doteq \overset{\triangle}{CED}$ per avere la stessa base CE ed altezze uguali ($DH = BK$ oppure $CH = EK$)





Si costruisce la retta p parallela alla retta AB e distante da questa h . Sia $D = p \cap AC$. Si congiunga D con B ; per C tracciamo la retta parallela a DB che incontra AB nel punto E .

Trasformazione di un triangolo ABC in un altro equivalente di base b



Su AC si riporti il segmento $AD = b$. Da C conduco la parallela a BD sino a incontrare AB nel punto E. Il triangolo richiesto è **ADE**.

$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\triangle}{AEC} + \overset{\triangle}{CEB} \\ \overset{\triangle}{ADE} \doteq \overset{\triangle}{ADE} + \overset{\triangle}{ADE} \\ \overset{\triangle}{CEB} \doteq \overset{\triangle}{CED} \ \textit{per avere la stessa base EC ed uguali altezze} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\triangle}{ABD} + \overset{\triangle}{BDC} \\ \overset{\triangle}{ADE} \doteq \overset{\triangle}{ABD} + \overset{\triangle}{BDE} \\ \overset{\triangle}{BDC} \doteq \overset{\triangle}{BDE} \ \textit{per avere la stessa base BD ed altezze uguali} \end{cases}$$