Unità Didattica N°32

Grandezze geometriche omogenee e loro misura

Classi di grandezze omogenee

Si dice che un insieme di grandezze geometriche forma una **classe di grandezze** quando:

1) è possibile definire per esse una relazione di uguaglianza che goda delle proprietà simmetrica, riflessiva e transitiva

2) è possibile definire l'operazione di somma, a risultato univoco, che goda delle proprietà associativa e commutativa

3) è possibile definire una relazione di disuguaglianza, tale che per due grandezze qualsiasi A e B della classe, si verifichi sempre una sola delle tre relazioni (**tertium non datur**; **principio del terzo escluso**) $A < B$, $A = B$, $A > B$ e che il verificarsi di una di esse escluda il verificarsi delle altre due.

4) prese due grandezze qualsiasi A e B della classe, con $A > B$, esiste sempre una ed una sola grandezza C tale che sia $A = B + C$.

Vedremo in seguito che la classe di grandezze sarà detta misurabile se per i suoi elementi valgono le seguenti ulteriori proprietà:

a) il *Postulato di Eudosso-Archimede*

b) il *Postulato della divisibilità indefinita*

Infine , una **classe misurabile** sarà detta **continua**, se in essa varrà il **postulato della continuità**.

Le grandezze di una stessa classe (cioè tali che si possano confrontare, sommare e sottrarre tra loro) si dicono **omogenee**; quelle appartenenti a classi diverse si dicono eterogenee.

Sono grandezze omogenee i segmenti, gli angoli, le superfici piane .

Sono grandezze eterogenee un segmento ed un angolo, un segmento ed una superficie piana.

Multipli e sottomultipli di una grandezza geometrica

Definizione: Data una grandezza geometrica **A** ed un numero naturale **n** , la grandezza geometrica **B** somma di **n** grandezze tutte uguali ad **A** dicesi **multipla di B** secondo il numero **n** e scriviamo : $\mathbf{B = n \cdot A}$

Diciamo pure che la grandezza **A** è sottomultipla della grandezza **B** secondo il numero **n** e scriviamo : $\mathbf{A = \frac{1}{n} \cdot B}$

Dire che la grandezza B è multipla della grandezza A secondo il numero intero n significa che la grandezza G contiene **n** volte la grandezza **A**.

Dire che la **grandezza A è sottomultipla della grandezza B** secondo il numero intero **n** vuole dire che la grandezza **A** è contenuta **n** volte nella grandezza **B**.

Postulato della divisibilità: **Ogni grandezza geometrica è sempre divisibile in un numero qualunque di parti.**

Postulato di Eudosso-Archimede: **Date due grandezze omogenee disuguali, esiste sempre una grandezza multipla della minore che supera la maggiore.**

Grandezze commensurabili e grandezze incommensurabili

Due grandezze omogenee A e B si dicono commensurabili quando ammettono una comune sottomultipla, cioè quando esiste una terza grandezza **U**, omogenea con A e B, contenuta un numero intero di volte (ad esempio n) in A ed un numero intero (ad esempio m) di volte in B, cioè tale che: $\mathbf{A = n \cdot U}$ $\mathbf{B = m \cdot U}$ $\left[\ \dfrac{A}{n} = \dfrac{B}{m} = U \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot A = n \cdot B \ \right]$

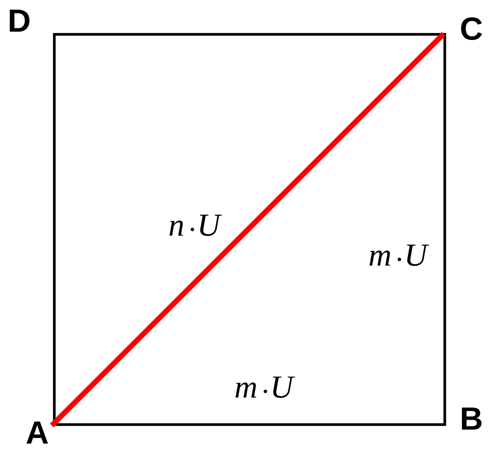
Due grandezze omogenee A e B si dicono incommensurabili quando non ammettono una comune sottomultipla, cioè quando non esiste una terza grandezza **U**, omogenea con A e B, contenuta un numero intero di volte (ad esempio n) in A ed un numero intero (ad esempio m) di volte in B CD.

Teorema: **La diagonale ed il lato di un qualsiasi quadrato sono segmenti incommensurabili.**

Premessa: **Due numeri interi sono uguali quando decomposti in fattori primi ammettono lo stesso numero di fattori uguali con gli stessi esponenti.**

Hp $\{ ABCD \text{ è un quadrato}$

Th $\begin{cases} AB \quad ed \quad AC \quad sono \\ segmenti incommensurabili \end{cases}$



Dimostriamo questo teorema per assurda negando la tesi affermando, cioè, che i segmenti AB ed AC sono **commensurabili**. Questo significa che esiste un segmento **U** contenuto **n** volte in AC ed **m** volte in AB . In simboli matematici abbiamo: $AC = n \cdot U$; $AB = BC = m \cdot U$.

Applico il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC .

Ottengo : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2 \cdot AB^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 \cdot U^2 = 2m^2 \cdot U^2$

Dividendo ambo i membri per U^2 , cioè per il quadrato di lato **U** , otteniamo : $n^2 = 2m^2$

Ma questa uguaglianza è assurda , perché il numero intero $2m^2$ contiene il fattore **2** un numero dispari di volte , mentre il numero n^2 o non contiene il fattore **2** o lo contiene un numero pari di volte . Quindi l'affermazione << AB ed AC sono segmenti commensurabili >> è falsa .

Questo implica la verità della proposizione contraria: << AB ed AC sono segmenti incommensurabili>>.

Rapporto di due grandezze

Si definisce rapporto fra le grandezze commensurabili A e B il numero $\frac{n}{m}$ e si scrive:

$$\frac{A}{B} = A:B = \frac{n}{m} \quad .$$

Il rapporto fra due grandezze commensurabili è un numero razionale.

Viceversa, se è razionale il rapporto fra due grandezze omogenee, allora esse sono **commensurabili**. Esistono grandezze fra loro omogenee che non ammettono una comune sottomultipla. Esse prendono il nome di grandezze incommensurabili. Il rapporto fra due grandezze incommensurabili è un numero reale.

Definizione di numero reale

Dicesi **numero razionale** un qualsiasi numero che può essere scritto sotto forma di frazione.

Sono pertanto numeri razionali: 1) tutti i numeri interi 2) tutti i numeri decimali limitati 3) tutti i numeri decimali periodici. Dicesi numero irrazionale ogni numero che non può essere scritto sotto forma di frazione. Un numero razionale o irrazionale dicesi reale.

$$\text{numeri reali}\begin{cases}\text{RAZIONALI (numeri frazionari)}\begin{cases}\text{1) Numeri interi}\\ \text{2) Numeri decimali limitati}\\ \text{3) Numeri decimali periodici}\end{cases}\\ \\ \text{IRRAZIONALI} = \text{numeri che si possono scrivere sotto forma di frazione} = \\ \qquad\qquad\qquad = \text{numeri decimali illimitati e non periodici}\end{cases}$$

Il postulato della continuità della retta

Vediamo se possiamo chiarire il significato di continuità della retta. In precedenza abbiamo detto che tra due punti distinti, per quanto vicini essi siano, esiste sempre almeno un altro punto distinto dagli estremi, anzi posiamo affermare che tra due punti infinitamente vicini esistono infiniti punti. Questa affermazione è un primo approccio elementare col concetto del continuo in geometria. Tuttavia esso va chiarito meglio mediante appropriate definizioni ed opportuni postulati.

Definizione di classi contigue di grandezze geometriche

Consideriamo due classi contenenti ciascuna infinite grandezze omogenee (ad esempio due classi di segmenti). Diciamo che tali classi sono contigue se godono delle due seguenti proprietà:

01) Ogni grandezza (segmento) della prima classe è minore di tutte le grandezze (segmenti) della seconda classe (Questo ci consente di affermare che le due classi sono separate)

02) Comunque piccola si scegliamo una grandezza (segmento) ε, omogenea alle grandezze delle due classi, è possibile trovare una grandezza (segmento) della seconda classe ed una grandezza (segmento) della prima classe la cui differenza è minore di ε.

Postulato di Eudosso-Archimede:

Date due grandezze omogenee disuguali, esiste sempre una grandezza multipla della minore che supera la maggiore.

L'introduzione di questo postulato ci consente di fare corrispondere ad un qualsiasi segmento un numero reale. Infatti, scelto il segmento **U**, possiamo fare corrispondere al segmento AB il numero reale α rapporto tra il segmento AB ed il segmento **U**: $\alpha = \dfrac{AB}{U}$.

Però il detto postulato non ci consente di potere stabilire che, viceversa, ad ogni numero reale α corrisponde un segmento AB. Per fare ciò occorre riformulare il postulato della continuità della retta.

Postulato della continuità della retta secondo Cantor (1872)

Dati due classi di segmenti di rette, se:

1) nessun segmento della prima classe è maggiore di qualche segmento della seconda classe

2) fissato un segmento ε piccolo a piacere, esiste sempre un segmento della seconda classe ed uno della prima la cui differenza sia minore di ε

Allora esiste un segmento che non è minore di alcun segmento della prima classe né maggiore di alcun segmento della seconda classe.

Postulato della continuità della retta secondo Dedekind

Se un segmento di retta AB è diviso in due parti, in guisa che:

a) ogni punto del segmento AB appartenga ad una sola delle due parti

b) l'estremo A appartenga alla prima parte e l'estremo B alla seconda parte

c) un punto qualsiasi della prima parte preceda un punto qualsiasi della seconda parte (nell'ordine naturale fissato sul segmento)

allora esiste un solo punto C del segmento AB (detto **punto di separazione**) appartenente alla prima o alla seconda parte, tale che ogni punto di AB che precede C appartiene alla prima parte ed ogni punto che segue C appartiene alla seconda parte nella divisione stabilita.

Osservazione

- Il postulato di Dedekind contiene i postulati di Cantor e di Eudosso-Archimede. Questo significa che dal postulato di Dedekind possiamo dedurre i postulati di Cantor e di Eudosso-Archimede.
- Il solo postulato di Cantor non è equivalente a quello di Dedekind.
- Il postulato di Cantor e quello di **Eudosso-Archimede** conducono insieme al postulato di Dedekind
- Il postulato di **Eudosso-Archimede** è indipendente dal postulato di Cantor.

Le grandezze geometriche che verificano il *postulato della continuità della retta secondo Dedekind* sono dette **grandezze continue**.

Le grandezze geometriche per le quali è valido il *postulato della continuità della retta secondo Cantor* ma non il *postulato di Eudosso-Archimede* sono dette grandezze non archimedee.

Misura di una grandezza geometrica

In una classe di grandezze geometriche si scelga una grandezza **U**, come **unità di misura** o **grandezza unitaria** per le grandezze della classe.

Definizione: Dicesi misura di una grandezza A, rispetto all'unità prescelta **U**, il numero reale α che esprime il rapporto di A ad U. In simboli abbiamo: $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{U}} = \boldsymbol{\alpha}$ $\quad \mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{U}$

Se le grandezze A ed U sono commensurabili allora il numero α è il numero razionale $\frac{m}{n}$.

Abbiamo: $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$ $\quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{U}$

In questo caso il numero razionale $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$ è la misura della grandezza A rispetto alla grandezza **U** scelta come unità di misura.

Si può dimostrare che per ogni numero reale α esiste una sola grandezza **A** la cui misura rispetto ad una assegnata grandezza unitaria **U**, sia α. Si esprime ciò dicendo che << **intercede una corrispondenza biunivoca tra le grandezze geometriche di una stessa classe ed i numeri reali**>>.

Pitagora ed i numeri incommensurabili

Pitagora aveva un concetto corpuscolare del punto (punto monade), e quindi riteneva che ogni segmento fosse costituito da un numero finito di punti. Ne conseguiva che due segmenti, ad esempio AB e CD, dovevano avere sempre un comune sottomultiplo e quindi dovevano essere sempre commensurabili. Infatti, nel caso più sfavorevole, tale sottomultiplo si riduceva ad essere il punto contenuto **m** volte in AB ed **n** volte in CD. Quindi il rapporto di due qualsiasi segmenti doveva essere sempre espresso da un numero razionale $\frac{m}{n}$ ed i due segmenti risultavano tra loro commensurabili. L'esistenza di grandezze fra loro incommensurabili, come il lato e la diagonale di uno stesso quadrato, costrinse i matematici greci ad ammettere che i segmenti fossero costituiti da un numero infinito di punti. Ciò determinò l'ingresso nella matematica del concetto di infinito con tutte le sue difficoltà.

I sofismi di Zenone

I argomento: la dicotomia

Con questo sofisma Zenone vuole dimostrare che il movimento non esiste. Secondo Zenone si pretende, in contrapposizione a quanto affermava Parmenide, che un corpo, muovendo da un punto di partenza, possa giungere ad un termine stabilito. Questo non è possibile in quanto tale corpo, prima di raggiungere il termine stabilito, dovrebbe percorrere la metà della strada stabilita, e prima ancora, la metà della metà e, poi, la metà della metà della metà, e così di seguito all'infinito. Con tale suddivisione non si perviene mai allo zero. Quindi il movimento non esiste.

II argomento: Achille e la tartaruga

Il secondo argomento consiste nel fatto che il più lento non sarà mai sorpassato nella sua corsa dal più veloce, perché l'inseguitore deve sempre prima arrivare al punto dal quale l'inseguito si è appena mosso, cosicché il più lento deve sempre trovarsi in poco più avanti dell'altro.

III argomento: la freccia. La freccia che si muove è ferma.

Col terzo argomento Zenone dimostra che una freccia scoccata da un arco, che qualsiasi persona di buon senso crede di essere in movimento, in realtà è ferma. Questo gli consente di affermare che il moto non esiste.

Una freccia lanciata è in ogni momento nello stato di riposo o nello stato di non-riposo, cioè in **movimento**; se l'istante è indivisibile, la freccia non si può muovere, altrimenti l'istante potrebbe immediatamente dividersi. Ora il tempo è fatto di istanti; siccome la freccia non può muoversi in nessun istante, non può muoversi mai. Essa resta sempre in riposo.

IV argomento: lo stadio

Col quarto argomento Zenone dimostra che uno stesso corpo percorre nello stesso tempo e con la stessa velocità spazi diversi. Questo gli consente di affermare che il moto non esiste. Il quarto argomento, detto anche delle masse nello stadio, è contro il movimento. Si abbiano tre aste uguali ciascuna delle quali è suddivisa in quattro tacche uguali.

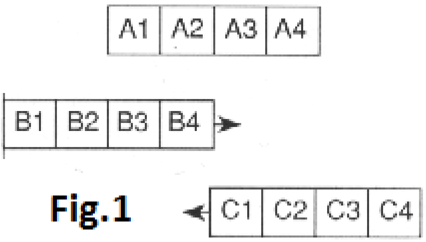


Fig.1

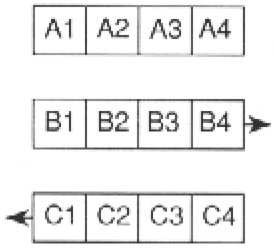
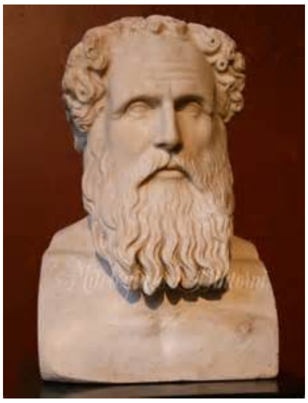


Fig.2

L'asta A ha le 4 tacche indicate con A1, A2, A3, A4, B ha le 4 tacche indicate con B1, B2, B3, B4, C ha le 4 tacche indicate con C1, C2, C3, C4. L'asta A è ferma, l'asta B si muove verso destra, l'asta C si muove verso sinistra con la stessa velocità dell'asta B. La posizione iniziale (finale) è quella indicata nella figura 1 (figura 2). Per passare dalla figura 1 alla figura 2, le aste B e C impiegano lo stesso tempo t. L'asta B, rispetto all'asta ferma A, si è spostata di 2 tacche mentre, rispetto all'asta mobile C, si è spostata di 4 tacche. Poiché le tacche sono tutte uguali, bisogna ammettere che l'asta B ha percorso nello stesso tempo t due spazi uno doppio dell'altro. Con parole diverse possiamo dire che nello stesso tempo t l'asta B rispetto all'asta A ha percorso due tacche, rispetto all'asta C ha percorso 4 tacche. La cella B rispetto all'asta ferma A si è spostata di due celle e rispetto all'asta mobile C si è spostata di 4 celle.

Il quarto sofisma di Zenone afferma che in uno stadio un punto mobile va ad una certa velocità e simultaneamente al doppio di essa, a seconda che sia riferito ad un punto fisso o ad un punto che si muove in verso opposto, generando in tal modo l'assurdo logico che la metà del tempo è uguale al suo doppio.

<table>
<tr>
<td>I celebri sofismi di Zenone a difesa della filosofia di Parmenide mirano a provare che, se la negazione del movimento e della molteplicità può a prima vista apparire assurda, l’ammissione di essa conduce ad assurdità ancora più gravi, nascoste, ma non risolta, dal linguaggio ordinario. Il perno di tali argomenti consiste nella dimostrazione che, sia nella nozione di movimento, sia in quella di pluralità, si annida il delicato concetto di infinito. Questi argomenti suscitarono presso i greci una tale diffidenza nei confronti dell’infinito, da persuaderli a compiere qualunque sforzo pur di escludere tale concetto da ogni seria costruzione scientifica.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Il metodo di cui Zenone si serve è, come notò Aristotele, quello della dialettica: la quale consiste nell’ammettere come vera l’affermazione dell’avversario per ricavarne deduzioni che la confutano. Tale è il procedimento di Zenone che ammette come ipotesi la molteplicità ed il movimento per dimostrarne l’assurdità. I 4 sofismi di Zenone sono 2 contro la pluralità delle cose ed altri 2 contro il movimento.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Si dice che una grandezza variabile costituisce un infinito potenziale quando, pur assumendo valori finiti, essa può crescere al di là di ogni limite; se per esempio immaginiamo di suddividere un dato segmento con successivi dimezzamenti, il risultato ottenuto sarà un infinito potenziale perché il numero delle parti a cui perveniamo, pur essendo in ogni caso finito, può crescere ad arbitrio. Si parla di infinito attuale quando ci si riferisce ad un ben determinato insieme, effettivamente costituito di un numero illimitato di elementi. Se per esempio immaginiamo di avere scomposto un segmento in tutti i suoi punti, ci troveremo di fronte ad un infinito attuale perché non esiste nessun numero finito che riesca a misurare la totalità di questi punti.

Le serie numeriche ed il sofisma di Achille piè veloce e la tartaruga

01) La scoperta dei numeri irrazionali portò all'abbandono dell'immagine pitagorica dei punti fisici disposti in fila. Essa fu sostituita dal concetto più sottile del continuo.

Ogni retta è infinitamente divisibile, cioè il numero dei punti in essa contenuto è infinito. Il problema dell'infinito apriva alla scienza un mondo nuovo. Sul concetto di <<infinito>> iniziava una battaglia dialettica che sarebbe durata millenni.

02) Pitagora aveva ipotizzato che lo spazio ed il tempo potessero essere concepiti rispettivamente come somma di un numero (intero) finito di punti e di istanti.

La scoperta delle grandezze incommensurabili condusse ad ammettere l'infinita suddivisibilità dello spazio e del tempo in termini di elementi indivisibili.

03) Zenone, con i suoi 4 sofismi , voleva evidenziare che non si poteva accettare la concezione pitagorica della suddivisione dello spazio e del tempo in un numero finito di elementi indivisibili, né la concezione post pitagorica (come ad esempio quella di Euclide) secondo la quale lo spazio ed il tempo possono essere concepiti come un insieme di infiniti elementi primordiali (indivisibili). In sintesi Zenone riteneva che non era lecito ritenere le grandezze spazio e tempo discrete e nemmeno continue.

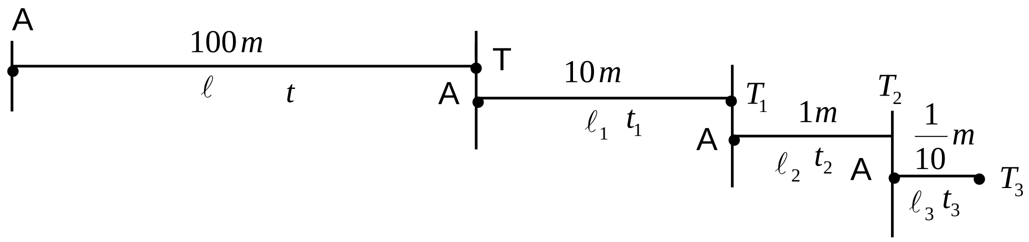
Zenone, con i sofismi della <<dicotomia>> e di <<Achille piè veloce>> voleva dimostrare che se, ammettiamo l'infinita suddivisibilità del tempo e dello spazio, il movimento è impossibile, mentre i sofismi della <<freccia>> e dello <<stadio>> volevano dimostrare che il movimento è ugualmente impossibile se ammettiamo il contrario, cioè se ammettiamo la suddivisibilità dello spazio e del tempo mediante un numero finito di elementi indivisibili.

04) Noi oggi analizzeremo, il seguente sofisma di Zenone, sia alla luce delle attuali conoscenze della matematica , che secondo il punto di vista del filoso eleatico.

<<**Achille piè veloce non può raggiungere la lenta tartaruga**>>

Con questo curioso sofisma Zenone di Elea (vissuto nel 500 A.C.) sembrava volere dimostrare l'impossibilità del moto, ma in realtà voleva semplicemente dire che con l'<<infinito>> non possiamo operare con le consuete regole applicate alle quantità finite.

Doveva ancora nascere il primo matematico che avrebbe ammesso e dimostrato che la somma di infiniti termini, a determinate condizioni, può dare come risultato una quantità finita.



<< **Achille e la tartaruga sono distanziati di un tratto $\ell = 100\,m$. Partono contemporaneamente, si muovono con velocità costante e la velocità di Achille è 10 volte quella della tartaruga. Dopo quanto tempo Achille raggiungerà la tartaruga? e se la raggiungerà quale spazio avrà percorso?>>**

Secondo il ragionamento di Zenone Achille non poteva raggiungere la tartaruga in quanto sosteneva che la somma di infiniti termini non poteva dare una quantità finita. Secondo le nostre attuali conoscenze Achille raggiungerà la tartaruga in quanto, a determinate condizioni, la somma di infiniti termini può dare una quantità finita.

Osservazione preliminare: $\mathrm{v}_A = 10 \cdot \mathrm{v}_T \quad \Rightarrow \quad s_A = 10 \cdot s_T$.

Ragionamento di Zenone: E' logico ammettere che Achille, prima di raggiungere la tartaruga, debba percorrere i primi $100\,m$. Quando Achille percorre il tratto $\ell = 100\,m$ che lo separa dalla tartaruga, questa sarà avanzata del tratto $\ell_1 = \frac{1}{10}\ell = 10\,m$, quando Achille percorre il tratto ℓ_1, la tartaruga percorre il tratto $\ell_2 = \frac{1}{10}\ell_1 = 1\,m$. Così seguitando vediamo che Achille è costretto a passare per una serie infinita di punti $T_1, T_2, T_3, \cdots$ posti rispettivamente a $100\,m$, $(100+10)m$, $(100+10+1)m$ da A senza raggiungere mai la tartaruga.

La conclusione di Zenone di Elea era la seguente: <<**il corridore più lento, la tartaruga, si troverà sempre un poco più avanti del corridore più veloce, Achille**>>.

Achille percorre il seguente tratto:

$$s = \ell + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \cdots + \ell_n + \cdots = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots$$

Zenone sosteneva che la somma di infiniti termini, anche piccoli, non può mai essere una quantità finita e quindi Achille non raggiungerà mai la tartaruga.

Alla luce delle nostre attuali conoscenze noi diciamo che Achille raggiungerà la tartaruga dopo avere percorso il seguente tratto:

$$s = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots = 111 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

Siamo in presenza di una serie geometrica avente ragione $q=\frac{1}{10}<1$ e primo termine $a_1=\frac{1}{10}$

Mi calcolo: $$s_n=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^n}=\frac{1-q^n}{1-q}\cdot a_1=\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\cdot\frac{1}{10}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{9}$$

Achille raggiungerà la tartaruga dopo avere percorso il tratto:

$$\boxed{s=111+\frac{1}{9}=\frac{1000}{9}m}$$

I tratti via via percorsi da Achille, per quanto sempre più piccoli, sono sempre ben determinati e finiti. Vediamo così che una somma infinita di infinite quantità finite non è necessariamente infinita, non supera necessariamente, da un certo indice in poi, ogni numero per quanto grande esso sia. Se le quantità che si succedono sono sempre più piccole può accadere che il limite delle loro successive somme sia finito.

Dopo quanto tempo Achille raggiungerà la tartaruga ?

Supponiamo che Achille si muova con una velocità costante $v=10\frac{m}{s}$. $v=\frac{s}{t} \Rightarrow t=\frac{s}{v}$.

t^* = tempo impiegato da Achille per raggiungere la tartaruga

$$\boxed{t^*=10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots=11+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=11+\frac{1}{9}=\frac{100}{9}s}$$

$$t^*=10\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots\right)=10\sum_{n=0}^{n=+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=10\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=10\cdot\frac{10}{9}=\frac{100}{9}$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $q=\frac{1}{10}<1$ e primo termine $a_1=\frac{1}{10}$ Essa converge al valore $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{9}$

- Il sofisma di <<**Achille piè veloce e la tartaruga** >> è un sofisma dell'infinito potenziale perché in esso non si fa mai ricorso ad un infinito in atto (infinito attuale): sono in gioco sempre e soltanto delle successioni, delle aggiunte in numero sempre crescente, illimitato. Il sofisma viene pienamente chiarito nell'ambito della teoria dei limiti, della convergenza o meno di una successione ad un limite, dall'essere questo limite finito o infinito (caso delle serie divergenti).

La teoria dei limiti sviluppata col massimo rigore dal matematico tedesco Karl Weierstrass (1815–1897) e dalla sua scuola, elimina dal calcolo infinitesimale ogni riferimento agli ambigui <<infinitesimi in atto>> [1] . In un certo qual senso è la rivincita di Aristotele che ammetteva l'**esistenza solo degli infinitesimi potenziali** e degli **infiniti potenziali** **ma non ammetteva l'esistenza dell'**infinito attuale **e dell'**infinitesimo attuale**.**

Saranno due allievi di Karl Weierstrass, il liquidatore degli infinitesimi e degli infiniti in atto nella tecnica della matematica, che riapriranno la spirale dialettica dell'infinito.

Reintrodurranno l'infinito attuale, ma con il rigore della scuola alla quale si erano formati, senza più ambiguità, oscurità e misticismo.

● A mio parere Zenone non voleva dimostrare l'impossibilità del moto, ma ridurre all'assurdo la tesi dei pitagorici, che componevano il continuo con atomi (punti) di dimensione finita.

Nell'ipotesi pitagorica la somma di un numero crescente di segmenti, anche se decrescenti, dovrebbe tendere comunque all'infinito, perché ciascuno conterrebbe un numero intero di atomi dotati di dimensione (sarebbe come fare la somma di infiniti numeri interi, che tende certamente all'infinito).

● <<**Il primo paradosso dell'infinito attuale: una parte può essere uguale al tutto**>>

● Sofisma matematico: dimostrazione apparentemente rigorosa, che conduce ad un risultato palesemente assurdo.

● **Sofisma filosofico**: ragionamento che, partendo da premesse vere o verosimili e rispettando le regole del ragionamento, perviene ad una conclusione assurda.

Sofismi storicamente importanti sono i sofismi di Zenone contro il movimento e la pluralità.

● Per Galileo Galilei il <<continuo>> era composto da infinite particelle <<indivisibili>>, prive di grandezza, ma non nulle.

● Il metodo degli indivisibili è di portata assai più limitata del metodo del passaggio al limite, nel quale non si considerano <<infinitesimi in atto>> (gli **INDIVISIBILI**), ma <<**infinitesimi in potenza**>> (i **differenziali**).

---

[1] Leibniz, nella sua teoria del calcolo infinitesimale, aveva introdotto le quantità sempre più piccole, evanescenti, ma non nulle; aveva introdotto gli **infinitesimi in atto**, cioè gli infinitesimi attuali. Questo aveva reso logicamente vulnerabile la teoria di Leibniz.

● Per Guldino, oppositore di Torricelli e di Cavalieri, il continuo è divisibile all'infinito, ma non consta di infinite parti in atto, le quali non possono mai essere esaurite. Per Guldino il continuo è costituito da infinite parti in potenza (infinito potenziale di matrice Aristotelica)

Due segmenti AB e CD si dicono **commensurabili** quando ammettono un **comune sottomultiplo**, cioè quando esiste un segmento PQ contenuto un numero intero di volte (ad esempio m) in AB ed un numero intero (ad esempio n) di volte in CD, cioè tale che:

$$\mathbf{AB = m \cdot PQ} \qquad \mathbf{CD = n \cdot PQ} \qquad \left[\frac{AB}{CD} = \frac{m \cdot PQ}{n \cdot PQ} = \frac{m}{n}\right]$$

Il rapporto di due segmenti commensurabili è sempre un numero razionale.

Due segmenti AB e CD si dicono in**commensurabili** quando non ammettono un **comune sottomultiplo**, cioè quando non esiste nessun segmento PQ contenuto un numero intero di volte in AB ed un numero intero di volte in CD.

Il rapporto di due segmenti incommensurabili è sempre un numero irrazionale.