

Unità Didattica N° 33

Proporzioni tra grandezze geometriche

- 01) Definizioni
- 02) Teorema fondamentale
- 03) Proprietà delle proporzioni
- 04) Grandezze proporzionali
- 05) Criterio generale di proporzionalità
- 06) Una prima applicazione del criterio di proporzionalità

Rapporti e proporzioni fra numeri

Definizione: Dicesi **rapporto** tra due numeri, dati in un certo ordine e col secondo numero diverso da zero, il **quoziente** ottenuto dividendo il primo per il secondo.

Definizione: **Quattro** numeri assegnati in un certo ordine **formano una proporzione** quando il rapporto fra il primo ed il secondo è uguale al rapporto tra il terzo ed il quarto.

In simboli abbiamo: **$a:b=c:d$** I 4 numeri della proporzione si chiamano **termini della proporzione**, precisamente 1°, 2°, 3°, 4° termine a cominciare dalla sinistra.

antecedenti di una proporzione sono il 1° ed il 3° termine

consequenti di una proporzione sono il 2° ed il 4° termine

estremi di una proporzione sono il 1° ed il 4° termine

medi di una proporzione sono il 2° ed il 3° termine

Il quarto termine di una proporzione si chiama **quarto proporzionale** dopo gli altri nell'ordine dato. Una **proporzione** si dice **continua** se ha i medi uguali. In una proporzione continua il termine centrale si dice **medio proporzionale** fra gli estremi; l'ultimo termine si dice **terzo proporzionale** dopo i primi due. Nella proporzione continua **$a:b=b:c$** **b** è il **medio proporzionale** fra **a** e **c**; **c** è il **terzo proporzionale** dopo **a** e **b**.

Proprietà fondamentale: In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi. **$a \cdot d = b \cdot c$**

Proprietà dell'invertire: In ogni proporzione se invertiamo un antecedente con il proprio conseguente si ottiene una nuova proporzione. **$b:a=d:c$**

Proprietà del permutare: In ogni proporzione se scambiamo fra loro i due medi, oppure i due estremi, otteniamo una nuova proporzione. **$a:c=b:d$ $d:b=c:a$**

Proprietà del comporre: In ogni proporzione, la somma del primo e del secondo termine sta al primo (o al secondo) termine, come la somma del terzo e del quarto termine sta al terzo (o al quarto) termine. **$(a+b):a=(c+d):c$ $(a+b):b=(c+d):d$**

Proprietà dello scomporre: In ogni proporzione se il primo termine è maggiore del secondo (e di conseguenza il terzo è maggiore del quarto), la differenza fra il primo ed il secondo sta al primo (o al secondo) come la differenza fra il terzo ed il quarto sta al terzo (o al quarto).

$$(a-b):a=(c-d):c \quad (a-b):b=(c-d):d \quad \text{con } a>b \text{ e } c>d$$

Proprietà del componendo degli antecedenti e dei conseguenti

In ogni proporzione la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come ogni antecedente sta al proprio conseguente. $(a+c):(b+d)=a:b \quad (a+c):(b+d)=c:d$

Proprietà dello scomponendo degli antecedenti e dei conseguenti

Se in una proporzione il primo antecedente è maggiore del secondo antecedente (e quindi il primo conseguente è maggiore del secondo conseguente) la differenza degli antecedenti sta alla differenza dei conseguenti come ogni antecedente sta al proprio conseguente.

$$(a-c):(b-d)=a:b \quad (a-c):(b-d)=c:d \quad a>c \text{ e } b>d$$

Proporzioni fra grandezze

Definizione: Si dice che 4 grandezze **A, B, C, D** (a due a due omogenee tra loro) **formano una proporzione**, se il rapporto tra le prime due grandezze è uguale al rapporto fra le ultime due grandezze. In simboli abbiamo: $A:B=C:D$ oppure $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

Lessico

- 1) Le grandezze **A, B, C, D** si dicono i **termini** della proporzione
- 2) **A** e **B** sono gli << **estremi** >> della proporzione, **B** e **C** sono i << **medi** >> della proporzione, **A** e **C** sono gli << **antecedenti** >> della proporzione, **B** e **D** sono i << **conseguenti** >> della proporzione.
- 3) Se tra le grandezze **A, B, C** sussiste la seguente proporzione $A:B=B:C$ allora la grandezza **B** prende il nome di **media proporzionale** fra le grandezze **A** e **C**, mentre la grandezza **C** prende il nome di **terza proporzionale** dopo le grandezze **A** e **B**.

Una **proporzione** si dice **continua** quando i suoi medi sono uguali.

Teorema fondamentale delle proporzioni fra grandezze

Condizione necessaria e sufficiente perché 4 grandezze formino una proporzione è che siano in proporzione le rispettive misure.

$$A:B=C:D \quad \Leftrightarrow \quad a:b=c:d$$

Dove **a, b, c, d** sono rispettivamente le **misure** delle grandezze **A, B, C, D** rispetto alla stessa unità di misura.

Proprietà delle proporzioni fra grandezze

La proporzione $A:B=C:D$ fra 4 grandezze **A, B, C, D** gode delle seguenti proprietà formali:

1) In ogni proporzione fra grandezze è lecito scambiare ogni antecedente col proprio conseguente (*proprietà dell'invertendo*)

$$A:B=C:D \Rightarrow B:A=D:C$$

2) Se 4 grandezze **A, B, C, D** sono in proporzione, allora si possono scambiare i medi tra loro o gli estremi tra loro (*proprietà del permutando*)

$$A:B=C:D \Rightarrow A:C=B:D \wedge D:B=C:A$$

Questa proprietà è valida se le 4 grandezze **A, B, C, D** sono omogenee tra loro.

3) Se 4 grandezze **A, B, C, D** sono in proporzione, la prima più la seconda sta alla prima o alla seconda, come la terza più la quarta sta alla terza o alla quarta (*proprietà del componendo*)

$$A:B=C:D \Rightarrow (A+B):A=(C+D):C \wedge (A+B):B=(C+D):D$$

4) Se 4 grandezze **A, B, C, D** sono in proporzione, la prima meno la seconda sta alla prima o alla seconda, come la terza meno la quarta sta alla terza o alla quarta (*proprietà dello scomponendo o del dividendo*)

$$A:B=C:D \Rightarrow (A-B):A=(C-D):C \wedge (A-B):B=(C-D):D$$

5) In ogni serie di rapporti uguali tra grandezze tutte omogenee, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un antecedente sta al proprio conseguente.

$$A:B=C:D=E:F \Rightarrow (A+C+E):(B+D+F)=C:D$$

Grandezze proporzionali

Siano date due classi di grandezze, che possiamo indicare nella seguente maniera:

$$A, B, C, D, E, F, G, \dots \quad A', B', C', D', E', F', G', \dots$$

Definizione: Si dicono in *corrispondenza biunivoca* quando ad ogni grandezza della prima classe corrisponde una ed una sola grandezza della seconda classe e, viceversa, ad ogni grandezza della seconda classe corrisponde una ed una sola grandezza della prima classe.

Definizione: Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca si dicono **direttamente proporzionali** (o semplicemente **proporzionali**) quando il rapporto tra due grandezze qualsiasi di una classe è uguale al rapporto delle grandezze corrispondenti dell'altra classe .

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \quad \wedge \quad \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'} \quad \wedge \quad \frac{E}{F} = \frac{E'}{F'}$$

Se poi le grandezze della prima classe sono omogenee con le grandezze della seconda classe , allora alle precedenti proporzioni corrispondono , permutando i medi , le seguenti proporzioni :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \quad \wedge \quad \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \quad \wedge \quad \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'}$$

Questo ci consente di affermare che si mantiene costante il rapporto di due qualsiasi grandezze corrispondenti e di scrivere :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \dots\dots\dots = k$$

Definizione: Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca si dicono **inversamente proporzionali** quando il rapporto tra due grandezze qualsiasi di una classe è uguale al rapporto inverso delle grandezze corrispondenti dell'altra classe.

$$\frac{A}{B} = \frac{B'}{A'} \quad \wedge \quad \frac{E}{F} = \frac{F'}{E'} \quad \wedge \quad \frac{B}{C} = \frac{C'}{B'}$$

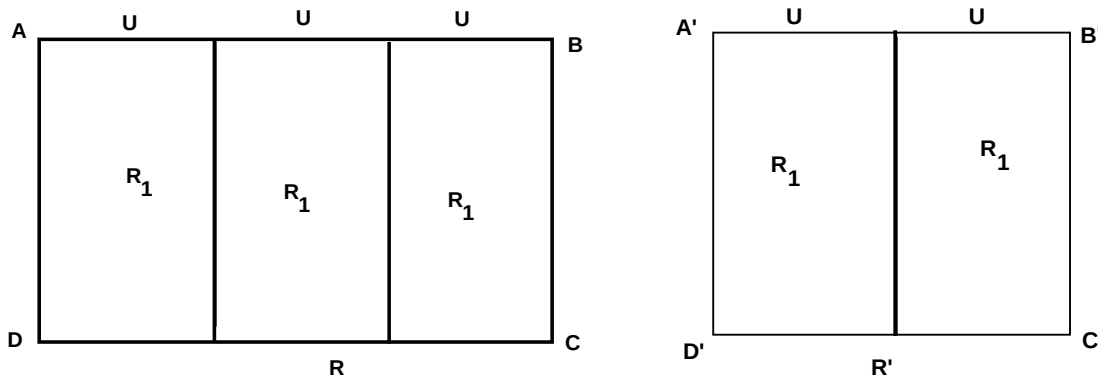
Criterio generale di proporzionalità

Teorema: Condizione necessaria e sufficiente perché due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca risultino direttamente proporzionali è che siano verificate le due seguenti condizioni:

- 1) a grandezze uguali in una delle due classi corrispondano grandezze uguali nell'altra classe
- 2) alla somma di due grandezze qualsiasi di una delle due classi corrisponda, nell'altra classe, la somma delle due grandezze ad esse corrispondenti.

Una prima applicazione dei criteri di proporzionalità

Teorema: I rettangoli di uguale altezza sono direttamente proporzionali alle rispettive basi.



Hp: $ABCD$ e $A'B'C'D'$ sono due rettangoli $AD = A'D'$

Th $R:R' = AB:A'B'$

Dimostrazione:

Supponiamo che le basi AB ed $A'B'$ siano commensurabili e per semplicità supponiamo che il segmento U sia contenuto 3 volte nel segmento AB e 2 volte nel segmento $A'B'$. Questo ci

consente di scrivere : $AB = 3U$, $A'B' = 2U$ [$\frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{2}$]

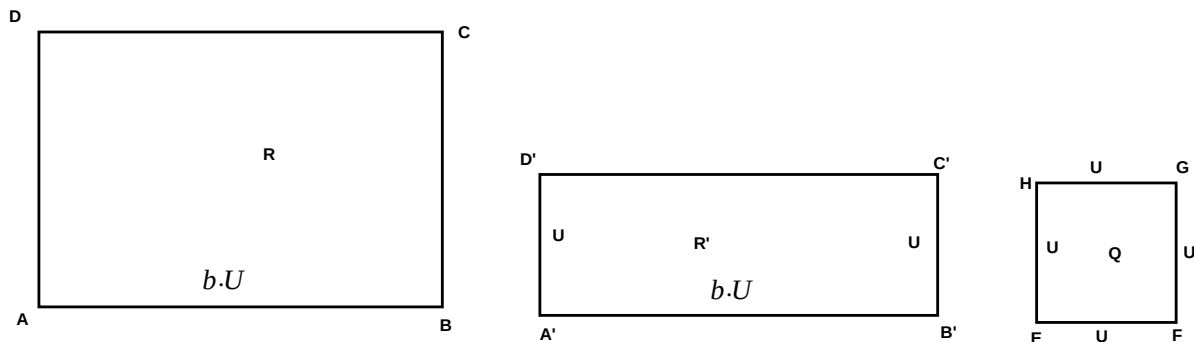
Per i punti di suddivisione conduciamo le parallele alle altezze dei rettangoli . Risulta :

$$R = 3R_1 \quad R' = 2R_1$$

Dividendo membro a membro otteniamo : $\frac{R}{R'} = \frac{3}{2}$ e ricordando che : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{2}$ abbiamo :

$$\frac{R}{R'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Teorema: L'area S di un rettangolo è uguale al prodotto delle misure delle sue dimensioni, cioè è uguale al prodotto della misura b della sua base per la misura h della sua altezza.



Sia U l'unità di misura per i segmenti. Considero il rettangolo $A'B'C'D'$ avente la base $A'B'$ uguale alla base AB del rettangolo $ABCD$ e l'altezza uguale ad U . Sia S l'area del rettangolo $ABCD$. Considero il quadrato Q di lato unitario U .

Risulta: $AB = b \cdot U$; $A'B' = b \cdot U$; $BC = h \cdot U$. I rettangoli R ed R' hanno la stessa base e quindi i due rettangoli stanno fra loro come le rispettive altezze:

$$R:R' = BC:B'C' \quad ; \quad \frac{R}{R'} = \frac{h \cdot U}{U} = h$$

R' e Q hanno la stessa altezza. Quindi il rettangolo R' ed il quadrato Q stanno fra di loro come le

rispettive basi . $R':Q = A'B':EF \quad \frac{R'}{Q} = \frac{b \cdot U}{U} = b$

$$\left[\frac{R}{R'} = h ; \frac{R'}{Q} = b \right] \Rightarrow \frac{R}{R'} \cdot \frac{R'}{Q} = \frac{R}{Q} = b \cdot h \quad S = \frac{R}{Q} = b \cdot h \quad \mathbf{S = b \cdot h}$$